ALGEBRA Dem. I 17.1. 2012

1 Olkoon R kommutatiivinen rengas, jossa $0 \neq 1$. Osoita, että jos $A \subseteq R$ on mikä tahansa osajoukko, niin $I = \{r \in R \mid ra = 0 \text{ kaikilla } a \in A\}$ on renkaan R ihanne.

> Merkitään renkaan R osajoukon $A \subseteq R$ generoimaa ihannetta $\langle A \rangle$. Erityisesti $\langle a \rangle$ on pääihanne, kun $a \in R$.

Oletetaan, että kaikissa renkaissa on ykkösalkio. Renkaan alkio $a \in R$ on **yksikkö**, jos sillä on multiplikatiivinen käänteisalkio b, jolla siis $ab = 1$. Renkaan alkio a on **nollanjakaja**, jos $ab = 0$ jollain b. Ajatellaan myös, että 0 on nollanjakaja.

2 Olkoon R äärellinen kommutatiivinen rengas (missä $0 \neq 1$). Osoita, että sen jokainen alkio on joko yksikkö tai nollanjakaja mutta ei kumpikin.

3 Rengas on **Artinin rengas**, jos sen jokainen aidosti laskeva ihanteiden jono $I_1 \supset I_2 \supset I_2 \supset \ldots$ on äärellisen pituinen. Osoita, että jos D on kokonaisalue, joka on Artinin rengas, niin se on kunta. Erityisesti jokainen äärellinen kokonaisalue on kunta.

4 Olkoon R kommutatiivinen rengas, jossa on ykkösalkio. Alkio m on alkioiden a ja b pienin yhteinen jaettava, jos $a|m$ ja $b|m$, ja jos $a|r$ ja $b|r$, niin $m|r$.
Osoita, että alkioilla a ja b on pienin yhteinen jaettava m jos ja vain jos m generoi suurimman pääihanteen $\langle m \rangle$, joka sisältyy leikkaukseen $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$.

5 Renkaan R ihanne on **alkuihanne**, jos ehdosta $ab \in P$ seuraa, että $a \in P$ tai $b \in P$. Olkoon R kommutatiivinen rengas, jossa on ykkösalkio $1 \neq 0$.

(a) Olkoot P sen alkuihanne, ja A, B renkaan R ihanteita siten, että $A \cap B \subseteq P$. Osoita, että joko $A \subseteq P$ tai $B \subseteq P$.

(b) Osoita, että renkaan R ihanne I on alkuihanne jos ja vain jos R/I on kokonaisalue.

(c) Osoita, että jos renkaan R jokainen aito ihanne on alkuihanne, niin R on kunta.

6 Olkoon I renkaan $R[x]$ ihanne, ja olkoon A sen polynomien $f(x) \in I$ johtavien kertoimien joukko, mukaanlukien nolla-alkio 0. Osoita, että A on renkaan R ihanne.

7 Olkoon R matriisien

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ missä } a, b \in \mathbb{Z}$$

muodostama rengas.
(a) Osoita, että R on isomorfinen renkaan $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ kanssa.

(b) Osoita, että $\det(M_{a,b}) = 0$ jos ja vain jos $a = 0 = b$.

(c) Osoita, että R, ja siten myös $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, on kokonaisalue.

(d) Renkaan R yksiköt ovat ne matriisit M, joille $\det(M) = 1$.

8 Olkoon M R-moduli ja olkoon r kommutatiivisen renkaan R kiinnitetty alkio. Osoita, että $rM = \{rm \mid m \in M\}$ on modulin M alimoduli.