ALGEBRA Dem. IX 27.3. 2012

$\boxed{1}$ Olkoon $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$, missä ω on primitiivinen kolmas ykkösenjuuri. Tällöin L on polynomin $f(x) = x^3 - 2$ hajoamiskunta yli kunnan $\mathbb{Q}$ (esimerkki 4.7.2, sivu 48). Osoita, että laajennuksen $L/\mathbb{Q}$ Galois'n ryhmän kertaluku on 6, ja $G(L/\mathbb{Q})$ ei ole Abelin ryhmä. (Itseasiassa se on symmetrinen ryhmä S_3, sillä on vain kaksi kertalukua 6 olevaa ryhmää C_6 ja S_3.

$\boxed{2}$ Olkoon L/K kunnan K Galois'n laajennus, ja olkoot H_1, H_2 Galois'n ryhmän $G(L/K)$ aliryhmiä, joiden kiintokunnat ovat M_1 ja M_2, vastaavasti. Olkoon H joukon $H_1 \cup H_2$ generoimaa aliryhmää. Todista huomautuksen 6.6 väite: aliryhmän H kiintokunta on $M_1 \cap M_2$.

$\boxed{3}$ Olkoon L/K äärellisen kunnan K äärellinen laajennus. Osoita, että $G(L/K)$ on syklinen ryhmä.

$\boxed{4}$ Ryhmän G **keskus** on joukko $Z(G) = \{a \in G \mid ag = ga \text{ kaikilla } g \in G\}$. Olkoon $H \leq Z(G)$ keskuksen aliryhmä.
(a) Osoita, että $H \trianglelefteq G$.
(b) Osoita, että jos tekijäryhmä G/H on syklinen, niin G on Abelin ryhmä.

$\boxed{5}$ Olkoon $\#G = p^2$, missä $p \in \mathbb{P}$ on alkuluku. Oletetaan, että G ei ole isomorfinen syklisen ryhmän $\mathbb{Z}_{p^2}$ kanssa. Osoita, että kaikkien alkioiden $a \neq 1$ kertaluku on p, ja että $\langle a \rangle$ on tällöin normaali aliryhmä.

$\boxed{6}$ Olkoon G ryhmä.
(a) Osoita, että jos $a^2 = 1$ kaikilla $a \in G$, niin G on Abelin ryhmä.
(b) Osoita, että jos $a^3 = 1$ kaikilla $a \in G$, niin G ei välttämättä ole Abelin ryhmä. (Tarkastele 3×3 yläkolmiomatriiseja yli kunnan $\mathbb{Z}_3$, joiden diagonaalialkiot ovat 1.)