

GEOMETRIA

Lyhyt kurssi

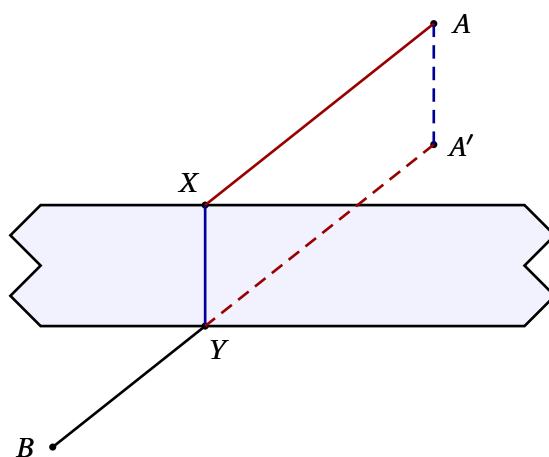
1989 – 2015

Tero Harju

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Turun Yliopisto

<http://users.utu.fi/harju>



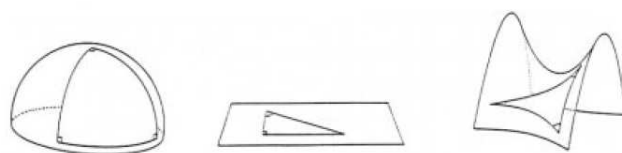
Aluksi

Tällä kurssilla keskitytään *Euklidiseen tasogeometriaan*. Lähestymistapa siihen on *intuitiivinen* eli *koulugeometrinen*, mikä tarkoittaa, että sopiva joukko käsitteiden merkityksiä ja niitä koskevia tuloksia oletetaan tunnetuiksi. Tällaisia käsitteitä ovat mm. *piste, suora, jana, janan pituus, kulma, kulman suuruus, kolmio*, ja *ympyrä*. Samalla kurssin tarkoitus on johdatella *ongelmanratkaisuun* matematiikassa. Tähän geometria soveltuu hyvin, sillä usein vaikeisiinkin ongelmiin päästään käsiksi ilman pitkällistä teorian kehittelyä. Geometriset todistukset ovat malliesimerkkejä 'puhtaasta' matemaattisesta päättelystä.

Aksiomaattinen ja analyttinen geometria

Intuitiivisen lähestymistavan vaihtoehtoina ovat aksiomaattinen ja analyttinen lähestymistapa. *Aksiomaattinen geometria* koostuu määrittelemättömistä peruskäsitteistä (piste, suora, jne), ja perusoletuksista (aksiomat eli postulaatit), jotka luettelevat peruskäsitteiden väliset suhteet. Aksiomeista johdetaan loogisin päättelyaskelin uusia tuloksia (teoreemoja), ja määritellään uusia käsitteitä helpottamaan teorian etenemistä.

Aksiomaattikka ei koske vain Euklidista geometriaa vaan esimerkiksi myös äärellisiä geometrioita ja epäeuklidisia geometrioita: *hyperbolisessa geometriassa* paralleeliaksioma korvataan aksiomalla, jossa pisteen kautta kulkee useita yhdensuuntaisia suoria, ja *elliptisessä geometriassa* kaksi suoraa leikkaavat aina toisensa. Geometrian luonne riippuu suuresti valituista aksiomeista. Jotkut geometriat ovat äärellisiä, eli niissä on vain äärellinen määrä pisteitä ja suoria. Erilaisiin sovellutuksiin tarvitaan erilaisia geometrioita. Suhteellisuusteoriassa käytetään kaarevien avaruuksien geometriaa kun taas monet kombinatoriset teoriat hyödyntävät äärellisiä geometrioita. Analyttinen geometria puolestaan samaistaa tason reaalitason kanssa, ja käyttää lineaarialgebran ja analyysin metodeja hyväkseen. Erityisesti tietyt metriset geometriat hyödyntävät myös analyysin työkaluja.



Elliptinen

Euklidinen

hyperbolinen geometria

Tasogeometrialle on aikojen saatossa kehitetty useita aksiomaattisia systeemejä:

- Eukleideen aksiomaattikka (n. 300 eaa) on tunnetuin aksiomaattinen systeemi. Eukleideen *Stoikheia* eli *Alkeet* koostuu kolmestatoista kirjasta ja niissä lähtökohtana on viisi aksiomaa ja viisi peruskäsitettä. Lyhykäisyydessään, ja nykykielellä ilmaistuna, aksiomat ovat:
 1. Jokaista pisteparia yhdistää yksikäsitteinen jana.
 2. Jokaista janaa voidaan jatkaa loputtomiin kumpaakin suuntaan.
 3. On olemassa yksikäsitteinen ympyrä kun keskipiste ja säde ovat annetut.
 4. Suorat kulmat ovat yhteneviä toistensa kanssa.
 5. Annetun pisteen kautta kulkee yksikäsitteinen annetun suoran suuntainen suora.

- Hilbertin aksiomatiikka vuodelta 1899 tarkensi Eukleideen työtä. Tämä systeemi käsitti 20 aksiomaa ja 6 määrittelemätöntä käsitettä.
- Tarskin aksiomatiikka vuodelta 1929 käsitti vain kaksi määrittelemätöntä käsitettä, “olla välissä” ja “yhtenevyys”, joita varten tarvittiin 11 aksiomaa.
- Birkhoffin aksiomatiikka vuodelta 1932 oli metristä geometriaa.
- Bachmannin aksiomatiikka vuodelta 1959 oli rakennettu ryhmäteorian pohjalle.

Koulugeometrisen lähestymistavan merkittävin ero aksiomaattiseen geometriaan nähden on peruskäsitteiden *merkityksen* olettamisessa. Uusien tulosten johtaminen vanhoista on kummasakin lähestymistavassa samanluontoista:

Intuitio ei saa koskaan korvata päättelyä!

Sisältö

1	Peruskäsitteitä	5
----------	------------------------------	---

Tasogeometrian perustuloksia

2	Kolmioiden geometriaa	10
2.1	Yhtenevyys	10
2.2	Yhdenmuotoisuus.....	13
2.3	Konsyklisyys	17
2.4	Konstruoituvuus	19
3	Merkilliset pisteet ja alat	22
3.1	Menelaus ja Ceva.....	22
3.2	Kolmion merkilliset pisteet	24
3.3	Monikulmioiden aloista.....	27

Liike tasossa

4	Isometriat	30
4.1	Transformaatiot	30
4.2	Isometrioiden määritelmä	31
4.3	Sovellutuksia	37
5	Yleisemmät kuvaukset	41
5.1	Similaarisuus	41
5.2	Affinit kuvaukset.....	43
5.3	Inversio	46
Liite 1: Isometriat ja ryhmät*	49
Liite 2: Fraktaaleista*	52
Kirjallisuutta valikoidusti	58

** Tähdellä merkityt kappaleet eivät tule tenttiin.*

1 Peruskäsitteitä

Tässä luvussa kuvaillaan Euklidisen geometrian peruskäsitteitä ja niiden välisiä yhteyksiä. Varsinaisia määritelmiä ei esitetä, koska nämä käsitteet oletetaan jo tunnetuiksi! Seuraavien sivujen perustulokset esitetään ilman todistuksia, ja näitä (ja vain näitä) käyttäen myöhemmät tulokset pyritään todistamaan.

Suorat ja janat

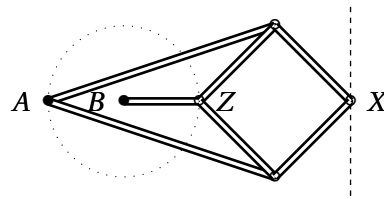
Euklidinen taso \mathbb{E} koostuu **pisteistä**, joita merkitään isoilla kirjaimilla A, B, \dots, P, Q, \dots , indekseihin ja ilman. Pisteet täyttävät tason homogeenisesti: mikään piste ei ole erityisasemassa muihin pisteisiin nähden, ja mikään suunta ei ole erityisasemassa. Taso näyttää samanlaiselta katsottiinpa sitä mistä pisteestä käsin tahansa ja mihin suuntaan tahansa. Erityisesti tasossa ei ole ennakolta määrättyä origoa eikä koordinaatistoa.

Tason **suora** on ääretön järjestetty joukko pisteitä. Jos $P, Q, R \in \ell$ ovat suoran ℓ eri pisteitä, on tarkalleen yksi niistä kahden muun **välissä**. Jos piste R on pisteiden P ja Q välissä, voidaan merkitä $P - R - Q$. Suoria merkitään pienillä kirjaimilla ℓ, a, b, \dots

Lause 1.1. *Kahden eri pisteen P ja Q kautta kulkee tarkalleen yksi suora $\ell(P, Q)$. Erityisesti kahdella eri suoralla on korkeintaan yksi yhteinen piste.*

Samalla suoralla a olevat pisteet $P_1, P_2, \dots, P_n \in a, n \geq 2$, ovat **kollineaariset**. Tällöin merkitään $a = \ell(P_1, P_2, \dots, P_n)$.

Esimerkki 1.1 Mekaanisissa sovelluksissa suoran piirtämiseksi voi käyttää avuksi esimerkiksi *Peaucellierin nivelikköä* (1864), missä pisteet A ja B ovat kiinnitetyt ja piste Z liikkuu. Tällöin piste X piirtää suoraa. \square



Suorat a ja b ovat **yhdensuuntaiset**, merkitään $a \parallel b$, jos $a = b$ tai $a \cap b = \emptyset$.

Seuraava tulos on keskeinen Euklidisessa geometriassa.

Lause 1.2 (Paralleelipostulaatti). *Tason pisteen P kautta kulkee tarkalleen yksi annetun suoran ℓ suuntainen suora. Jos $P \in \ell$, niin kysytty suora on ℓ itse.*

Suoran $\ell(P, Q)$ pisteet, jotka ovat pisteiden P ja Q välissä muodostavat **janan**

$$PQ = \{R : P - R - Q\}.$$

Jos jana AB on valittu **yksikköjanaksi** (jolloin merkitään $|AB| = 1$), voidaan muiden janojen PQ pituudet ilmoittaa suhteessa siihen. Janan PQ **pituus** on ei-negatiivinen reaaliluku, $|PQ| = r$. Tällöin $|PQ|$ on pisteiden P ja Q **etäisyys** tasossa \mathbb{E} .

Myöhemmin, yksinkertaisuuden vuoksi, janalle PQ ja sen pituudelle käytetään samaa merkintää.

Janojen pituusfunktio tuottaa tasoon metriikan:

Lause 1.3 (Metriikka). Kaikille tason pisteille P, Q, R on voimassa:

- (1) $PQ \geq 0$.
- (2) $PQ = 0 \iff P = Q$.
- (3) $PQ = QP$.
- (4) $PQ \leq PR + RQ$ (**kolmioepäyhtälö**).
- (5) $PQ = PR + RQ \iff R \in PQ$.

Suunta

Suoralla ℓ on aina kaksi suuntaa. Jos toinen suunnista on valittu, on suora **suunnattu**. Tällöin 'ol-la välissä'-relaatio on epäsymmetrinen: jos $P \rightarrow Q$ suunnatulla suoralla ℓ ja $R \in PQ$ tai $Q \in PR$, niin $P \rightarrow R$. Huomattakoon, että suoran mitkä tahansa kaksi eri pistettä, P ja Q , määräävät sen suunnan. Korostettaessa suuntaa voidaan merkitä $\vec{\ell}(P, Q)$, kun suunta $P \rightarrow Q$ on valittu. Suunnatun suoran $\vec{\ell}(P, Q)$ jana PQ on suunnattu: $P \rightarrow Q$, ja korostettaessa suuntaa kirjoitetaan \overrightarrow{PQ} . Suoran $\vec{\ell}(Q, P)$ suunta on vastakkainen suoran $\vec{\ell}(P, Q)$ suunnalle. Suunnatun janan \overrightarrow{PQ} pituudelle käytetään merkintää

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP},$$

toisin sanoen, suunnatun janan pituus riippuu etumerkiltään valitusta suunnasta.

Esimerkki 1.2 Kun P, Q, R ovat kollineaariset pisteet suunnatulla suoralla $\vec{\ell}$, niin

$$PQ + QR + RP = 0 \quad \text{eli} \quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = 0.$$

Tämä on riippumattomuus pisteiden P, Q, R järjestyksestä suoralla ℓ . Esimerkiksi, jos $R \in PQ$, niin Lauseen 1.3(5) mukaan $PQ = PR + RQ$, ja siten $PQ - RQ - PR = 0$ eli $PQ + QR + RP = 0$. \square

Lause 1.4 (Janan siirto). Olkoot $\vec{\ell}(P, Q)$ suunnattu suora ja $r > 0$ positiivinen reaalivakio. Tällöin on yksikäsitteinen piste $R \in \ell$, jolla $P \rightarrow R$ ja $PR = r$. Erityisesti, jos pisteet A, X, Y ovat kollineaariset ja $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AY}$, niin $X = Y$.

Verrannollisuus

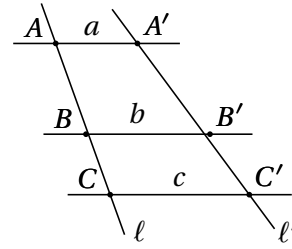
Esimerkki 1.3 Harjoitustehtävänä mainitaan seuraava jo tässä vaiheessa todistuva tulos. Jos X ja Y jakavat suunnatun janan AB samassa suhteessa, niin $X = Y$, eli suunnatuille janoille on voimassa

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB} \implies X = Y.$$

\square

Lause 1.5. Olkoot $a \parallel b \parallel c$ yhdensuuntaiset suorat, joita suorat ℓ ja ℓ' leikkaavat pisteissä A, A', B, B' ja C, C' , vastaavasti. Tällöin

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

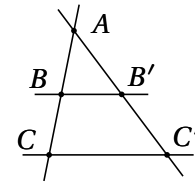


Lauseen 1.5 tarkoitus on välttää reaaliset raja-arvotarkastelut. Huomaa, että edellä suorien a, b ja c järjestystä ei ole kiinnitetty. Esimerkiksi suora c voi kulkea suorien a ja b välissä.

Esimerkki 1.4 Kuvassa $b = \ell(B, B') \parallel \ell(C, C') = c$ ja kolmas suora a kulkee pisteen A kautta yhdensuuntaisesti suorien b ja c kanssa. Sitä ei ole piirretty, koska $A' = A$. Lauseen 1.5 mukaan

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB + BC}{AB} = 1 + \frac{BC}{AB} = 1 + \frac{B'C'}{AB'} = \frac{AB' + B'C'}{B'C'} = \frac{AC'}{A'B'}.$$

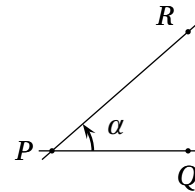
□



Kulmat

Suora ℓ jakaa tason \mathbb{E} kahteen puoliskoon \mathbb{E}_1 ja \mathbb{E}_2 , joiden leikkaus on ℓ ja unioni koko taso \mathbb{E} . Kaksi pistettä $P, Q \in \mathbb{E}_i$ (missä $i = 1$ tai 2) ovat **samalla puolella** suoraa ℓ . Aksiomaatikassa seuraava on **Paschin aksioma**: *Pisteet $P, Q \notin \ell$ ovat samalla puolen suoraa ℓ jos ja vain jos $PQ \cap \ell = \emptyset$.* **Kulma** on kahden leikkaavan suoran ℓ_1 ja ℓ_2 rajoittama tason osa. Leikkaavat suorat $\ell_1 = \ell(P, Q)$ ja $\ell_2 = \ell(P, R)$ jakavat tason neljään osaan, ja siksi tarvitaan tieto miten tietty kulma luetaan.

Kulma $\alpha = \angle QPR$ on se tason osa, joka saadaan lukemalla taso vastapäivään suunnassa Q, P, R . Suorat $\ell(P, Q)$ ja $\ell(P, R)$ ovat kulman α **kyljet**. Kulma $\angle QPR$ on luonnostaan suunnattu, joten voidaan puhua kahden kulman **samannimisistä** kyljistä (vasemmat/oikeat kyljet).



Usein kulma $\angle QPR$ lyhennetään muotoon $\angle P$, mikäli se on asiayhteydestään selvä; esimerkiksi kuvasta tai siitä, että kulma aukeaa monikulmion sisälle.

Kulman suuruutta mitataan **asteilla** ja **radiaaneilla**. Näiden vastaavuus on: $360^\circ = 2\pi$. Tässä 360° vastaa kulmaa, joka aukeaa koko tasoon. (Mikäli halutaan erottaa kulma $\angle P$ ja sen suuruus toisistaan, voidaan kirjoittaa $\sphericalangle P$ kulman suuruudelle. Jäljempänä tätä merkinnällistä erottelua ei ole tehty.)

Lause 1.6 (Samannimisyys). Jos kahden koveran kulman ($< 180^\circ$) α ja β samannimiset kyljet ovat yhdensuuntaiset, ovat ne yhtä suuret, $\alpha = \beta$.

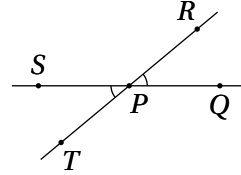
Lause 1.7 (Kulman siirto). Olkoot α kulma ja $\vec{\ell}(P, Q)$ suora. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen suora $\vec{\ell}(P, R)$ siten, että $\angle QPR = \alpha$.

Kulmien suuruudet lasketaan modulo 360° , ja kirjoitetaan: $\angle RPQ = -\angle QPR$, jolloin seuraava tulos tarjoaa säännön kulmien yhteenlaskun lisäksi myös niiden erotukselle.

Lause 1.8 (Summa). $\angle QPR = \angle QPS + \angle SPR$.

Lause 1.9 (Oikokulma). Jos $P \in AB$, niin $\angle APB = 180^\circ$.

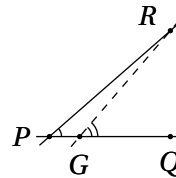
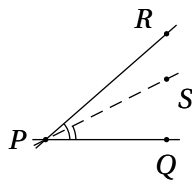
Esimerkki 1.5 Kulman $\angle QPR$ **ristikulma** on $\angle SPT$, missä $P \in SQ$ ja $P \in TR$. Kahden leikkaavan suoran ristikulmat ovat yhtä suuret. Todetaan tämä seuraavasti. Koska $180^\circ = \angle QPS = \angle QPR + \angle RPS$, ja $180^\circ = \angle RPS + \angle SPT$, niin $\angle QPR = \angle SPT$. \square



Kahden kulman yhtäsuuruuden tarkistamiseksi käytetään seuraavaa lausetta.

Lause 1.10 (Kulmat). (1) Olkoon piste S kulmassa $\angle QPR$. Tällöin $\angle QPS \leq \angle QPR$, missä yhtäsuuruus on voimassa vain jos $S \in \ell(P, R)$.

(2) Olkoon piste G janalla PQ ja $R \notin \ell(P, Q)$. Tällöin $\angle QPR \leq \angle QGR$, missä yhtäsuuruus on voimassa vain jos $G = P$.



Suorat a ja b ovat **kohtisuorassa**, merkitään $a \perp b$, jos niiden muodostamat kulmat ovat yhtä suuria, eli ne ovat suorita kulmia (90°). Jos $a \perp b$ ja $P \in b$, on b **normaali** pisteestä P suoralle a .

Lause 1.11 (Normaali). Normaali pisteestä suoralle on aina olemassa.

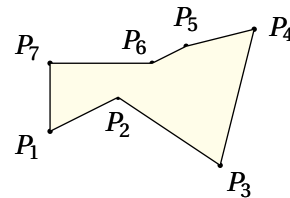
Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että normaali pisteestä P suoralle ℓ on aina yksikäsitteinen.

Yleisesti **ura** on pistejoukko, joka toteuttaa tietyt annetut ehdot. Esimerkiksi **ympyrä** $\omega(O, r)$ on niiden pisteiden ura, joiden etäisyys annetusta pisteestä O on annetun janan pituus $AB = r$.

Yhtenevyys

Järjestetty jono pisteitä $P_1 P_2 \dots P_n$ ($n \geq 2$) on **murtoviiva** eli **reitti**, jonka **sivut** ovat janat $P_i P_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Pisteet P_1, P_2, \dots, P_n ovat murtoviivan **kärjet** tai **kulmapisteet**.

Monikulmio $\Gamma = \diamond P_1 P_2 \dots P_n$ on suljettu murtoviiva $P_1 \dots P_n P_1$, missä pisteet ovat erillisiä, $n \geq 3$, ja jonka sivujen leikkauspisteet ovat tarkalleen P_1, P_2, \dots, P_n : kaksi sivua eivät leikkaa muualta kuin peräkkäisissä kärkipisteissä. Monikulmio on **tasasivuinen**, jos sen sivut ovat saman pituiset, ja se on **säännöllinen**, jos myös sen kärkikulmat ovat yhtä suuret.



Jokainen monikulmio Γ jakaa tason kahteen alueeseen: ulko- ja sisäpisteisiin. Sanotaan että Γ on **konvekksi**, jos aina kun P ja Q ovat sen sisäpisteitä, samoin ovat kaikki janat PQ pisteet.

Olkoot $\Gamma = \diamond P_1 P_2 \dots P_n$ ja $\Sigma = \diamond Q_1 Q_2 \dots Q_n$ monikulmioita, joissa on sama määrä pisteitä. Tällöin bijektio $P_i \mapsto Q_i$ on niiden välinen **vastaavuus**. Sivut $P_i P_{i+1}$ ja $Q_i Q_{i+1}$ ovat **vastinsivut** ja monikulmion sisään aukeavat kulmat $\angle P_i$ ja $\angle Q_i$ ovat niiden **vastinkulmat**. Monikulmiot Γ ja Σ ovat **yhtenevät** (eli **kongruentit**), $\Gamma \cong \Sigma$, mikäli niiden vastinsivut ovat pareittain yhtä pitkät ja vastinkulmat ovat pareittain yhtä suuret.

Geometriset konstruktiot ja tehtävät

Geometristen konstruktioiden apuvälineinä ovat **harppi** ja **viivain**. Viivaimen avulla voidaan piirtää suora kahden *annetun* pisteen kautta, ja harpin avulla voidaan piirtää ympyrä *annettu* piste keskipisteenä ja *annettu* jana säteenä. Harppi-viivain konstruktioissa uusia pisteitä määrätään ympyröiden ja suorien leikkauspisteinä.

Harppi ja viivain eivät ehkä tunnu kovin moderneilta välineiltä verrattuina uudempiin elektronisiin graafisiin työkaluihin. On kuitenkin huomattava, että

- pisteet, suorat ja ympyrät ovat edelleen geometrian peruskäsitteet, joiden konstruointeihin harppi ja viivain muodostavat pienen työkalupakin;
- harppi- ja viivainratkaisut selittävät ratkaisua havainnollisesti ja ratkaisujen luonne on hyvin algoritminen.

Geometrinen (**konstruktio-**) **tehtävä** koostuu

1. **Tehtävästä** eli oletuksista ja väitteestä muodossa “Piirrä ...” tai “Etsi ...”;
2. **Ratkaisusta**, joka on harppi-viivain konstruktio, eli luettelo ohjeista, joita seuraamalla ratkaisu löydetään;
3. **Todistuksesta**, että ratkaisu on oikein.

Osa I TASOGEOMETRIAN PERUSTULOKSIA

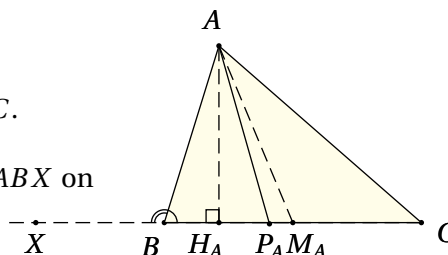
2 Kolmioiden geometriaa

Merkintöjä kolmioille

Kolme epäkollineaarista pistettä A, B, C määräävät kolmion $\triangle ABC$, jonka kärkipisteet ovat A, B, C . Suorat $\ell(B, C), \ell(A, C)$ ja $\ell(A, B)$ ovat sen **sivusuorat**. Suoran $\ell(B, C)$ piste on

- **mediaanin kantapiste** M_A : $BM_A = M_AC$.
- **korkeussuoran kantapiste** H_A : $\ell(A, H_A) \perp \ell(B, C)$.
- **kulmanpuolittajan kantapiste** P_A : $\angle BAP_A = \angle P_A AC$.

Vielä, $\angle B = \angle CBA$ on kolmion **kantakulma**. Kulma $\angle ABX$ on kulman $\angle B$ **ulkokulma**.



2.1 Yhtenevyys

Kolmiot Δ ja Δ' ovat **yhtenevät**, $\Delta \cong \Delta'$, jos niiden vastinsivut ovat yhtä pitkät ja vastinkulmat ovat yhtä suuret.

Esimerkki 2.1 Monikulmio on järjestetty joukko pisteitä ja niitä yhdistäviä viivoja, ja niinpä, formaalisesti ottaen, kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle BAC$ ovat eri monikulmioita, mutta toki vain sikäli että niiden kärkipisteet luetaan eri pisteestä lähtien ja eri suuntiin (myötä- ja vastapäivään).

Jos $\triangle ABC \cong \triangle BAC$, niin määritelmän mukainen vastaavuus on $A \mapsto B, B \mapsto A$ ja $C \mapsto C$, ja siten yhtenevyysoletuksen mukaan $AC = BC$, joten tämä kolmio on **tasakylkinen**. Vastaavasti, jos $\triangle ABC \cong \triangle BCA$, niin kyseinen kolmio on **tasasivuinen**, eli kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. \square

Seuraava kriteeri on yleensä postulaattina aksiomaattisessa geometriassa. Eukleides perusteli sitä käyttäen 'päällekkäin asettamisen' kriteeriä, joka on kuvaava mutta epämääräinen todistusmetodi: Kaksi tason kuviota ovat yhtenevät, jos ne voidaan 'kuvion muodon ja koon säilyttäen' siirtää toinen toisikseen.

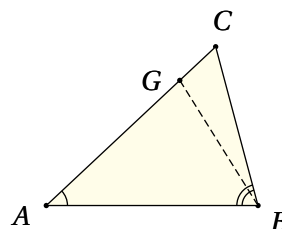
Lause 2.1 (SKS). Jos kolmion Δ kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat kolmiossa Δ' , niin $\Delta \cong \Delta'$.

Tähän nojautuen etsitään monimuotoinen kokoelma yhtenevyyskriteerejä, jotka koskevat kolmion luonnollisia janoja ja kulmia.

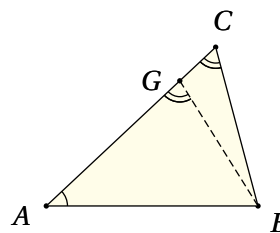
Lause 2.2 (2K+S). Jos kolmion Δ kaksi kulmaa ja yksi sivu ovat yhtä suuret kuin vastinosat kolmiossa Δ' , niin $\Delta \cong \Delta'$.

Todistus. Olkoot $\angle A = \angle A'$ ja $AB = A'B'$ kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$. Jaetaan todistus kahteen tapaukseen sen mukaan ovatko yhtä pitkät vastinsivut annettujen kulmien välissä vai eivät.

(KSK) Oletetaan $\angle B = \angle B'$. Lauseen 1.4 mukaan suoralla $\vec{\ell}(A, C)$ on yksikäsitteinen piste G , jolle $AG = A'C'$. (Piste G voi toki olla sivun AC jatkeella eli $C \in AG$.) Kriteerin (SKS) mukaan $\triangle ABG \cong \triangle A'B'C'$, ja näin ollen $\angle GBA = \angle C'B'A'$. Oletuksen mukaan $\angle B = \angle B'$, joten $\angle B = \angle GBA$, mistä $G = C$ seuraa lauseen 1.10 mukaan.



(KKS) Tapauksen, jossa $\angle C = \angle C'$, todistus on samanlainen kuin edellä. Väite seuraa jälleen lauseesta 1.10. \square



Esimerkki 2.2 Osoitetaan, että kolmio $\triangle ABC$ on tasakylkinen tarkalleen silloin kun sen kaksi kantakulmaa ovat yhtä suuret.

Oletetaan ensin, että kolmiossa $\triangle ABC$ on $\angle A = \angle B$. Koska $AB = BA$, on $\triangle ABC \cong \triangle BAC$ (KSK) ja eritoten $AC = BC$. Niinpä kolmio on tasakylkinen. Toisaalta, jos kolmio $\triangle ABC$ on tasakylkinen, $AC = BC$, niin $\triangle ABC \cong \triangle BAC$ (SKS) ja siten myös $\angle A = \angle B$.

Tästä tuloksesta seuraa myös, että kolmio $\triangle ABC$ on tasasivuinen jos ja vain jos sen kaikki kantakulmat ovat yhtä suuret. \square

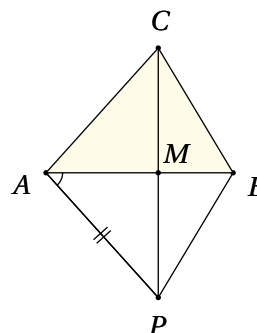
Esimerkki 2.3 Osoitetaan, että pisteelle P on voimassa $AP = BP$ jos ja vain jos P on janan AB keskinormaalilla.

Olkoon M janan AB keskipiste. Ensinnä jos $\ell(P, M)$ on keskinormaali, niin $\triangle AMP \cong \triangle BMP$ (SKS), ja erityisesti $AP = BP$. Toisaalta jos $AP = BP$, niin $\triangle PAB$ on tasakylkinen, ja edeltävän esimerkin mukaan siinä $\angle A = \angle B$ ja siten $\triangle AMP \cong \triangle BMP$ (SKS). Siis $\angle PMA = \angle BMP (= 90^\circ)$, ja niinpä $\ell(P, M)$ on keskinormaali. \square

Lause 2.3 (SSS). Jos kolmioiden \triangle ja \triangle' vastinsivut ovat yhtä pitkät, niin $\triangle \cong \triangle'$.

Todistus. Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ kyseiset kolmiot ja P piste, jolle $\angle PAB = \angle A'$ ja $AP = A'C'$ kuten kuvassa. Kriteerin (SKS) nojalla on $\triangle ABP \cong \triangle A'B'C'$. Nyt $AC = AP (= A'C')$, joten $\triangle ACP$ on tasakylkinen. Esimerkin 2.2 mukaan $\angle ACP = \angle CPA$. Vastaa- vasti $\angle PCB = \angle BPC$.

Kulmien yhteen- tai vähennyslaskun tuloksena saadaan $\angle ACB = \angle BPA$, ja siis $\triangle ABC \cong \triangle ABP$ (SKS). Siten myös alkuperäiset kolmiot ovat yhtenevät. \square



Seuraavat tulokset kolmioille jäävät harjoitustehtäviksi.

Lause 2.4 (SMS). Jos kolmion \triangle yhdestä kärkipisteestä lähtevät sivut ja mediaani ovat yhtä pitkät kuin vastinosat kolmiossa \triangle' , niin $\triangle \cong \triangle'$.

Lause 2.5 (HHH). Jos kolmioiden \triangle ja \triangle' vastinkorkeusjanat ovat yhtä pitkät, niin $\triangle \cong \triangle'$.

Seuraava kriteeri todistetaan parhaiten käyttäen kolmion merkillisiä pisteitä.

Lause 2.6 (MMM). Jos kolmioiden \triangle ja \triangle' vastinmediaanit ovat yhtä pitkät, niin $\triangle \cong \triangle'$.

Kulmanpuolittajia koskeva kriteeri on selvästi vaikeampi kuin edeltävät kriteerit.

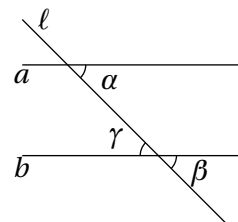
Lause 2.7 (PPP). Jos kolmioiden \triangle ja \triangle' vastaavat kulmanpuolittajat ovat yhtä pitkät, niin $\triangle \cong \triangle'$.

Suunnikassäännöt

Lauseen 1.10 ja paralleeliaksioman avulla todetaan helposti:

Lause 2.8. *Leikatkoon ℓ suorita a ja b . Tällöin seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä (katso kuvaa):*

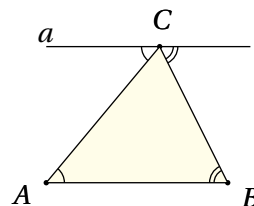
(1) $a \parallel b$ (2) $\alpha = \beta$ (3) $\alpha = \gamma$.



Kulmien α ja β sanotaan olevan **samankohtaisia**.

Todistus. Harjoitus. □

Lause 2.9. *Kolmion kulmien summa on 180° .*



Todistus. Olkoon a suora, jolle $a \parallel \ell(A, B)$ ja $C \in a$. Tällöin lauseen 2.8 mukaan kuvan kulmat ovat pareittain yhtä suuret. □

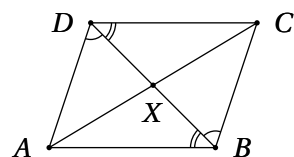
Lause 2.10 (Suunnikas). *Seuraavat nelikulmiota koskevat ehdot ovat yhtäpitävät:*

- (1) *vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset,*
- (2) *vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät,*
- (3) *vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret,*
- (4) *kaksi vastakkaista sivua ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset,*
- (5) *lävistäjät puolittavat toisensa.*

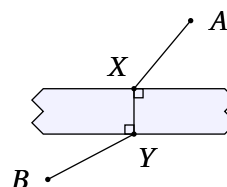
Lauseen ehdot täyttävää nelikulmiota kutsutaan **suunnikkaaksi**.

Todistus. Todistetaan, että ehto (2) seuraa ehdosta (1). Muut jäävät harjoituksiksi.

Olkoon $\diamond ABCD$ nelikulmio, jossa $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$. Tällöin $\angle ADB = \angle CBD$ ja $\angle BDC = \angle DBA$ lauseen 2.8 mukaan, ja siten $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (KSK). Näin ollen monikulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät. □



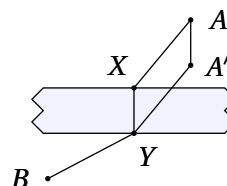
Esimerkki 2.4 Olkoot A ja B kaksi puhelinkeskusta, jotka sijaitsevat tasalevyisen kanaalin eri puolilla. Etsi lyhin reitti kaapelille, joka yhdistää keskuksia, kun kaapelin tulee alittaa kanaali kohtisuorasti.



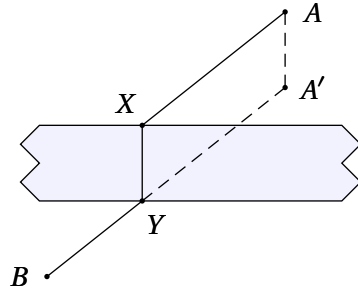
Ratkaisua varten täydennetään $\triangle AXY$ suunnikkaaksi $\diamond AXYA'$. Tällöin

$$AX + XY + YB = A'Y + AA' + YB.$$

Reitti on siis lyhin kun $A'Y + YB$ on pienin, sillä AA' on vakio. Kolmioepäyhtälön mukaan $A'Y + YB \geq A'B$, joten ratkaisu on:



Määrää A' , ja piirrä suora $\ell(A', B)$, jolloin leikkauspiste rannan kanssa on vaadittu kaapelin alituspaikka Y . Sitten piste X määräytyy yksiselitteisesti. □



2.2 Yhdenmuotoisuus

Kolmiot $\Delta = \triangle ABC$ ja $\Delta' = \triangle A'B'C'$ ovat **yhdenmuotoiset**, merkitään $\Delta \sim \Delta'$, jos niiden vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinsivut **verrannolliset**, eli

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Tässä vakio $\lambda = \frac{AB}{A'B'}$ on **verrannollisuuskerroin**. Todetaan helposti, että relaatio \sim on transitii-vinen. Oletetaan, että $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ja $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$. Jos $\frac{AB}{A'B'} = \lambda_1$ ja $\frac{A'B'}{A''B''} = \lambda_2$, niin

$$\frac{AB}{A''B''} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{A'B'}{A''B''} = \lambda_1 \lambda_2,$$

joten kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle A''B''C''$ verrannollisuuskerroin on $\lambda_1 \lambda_2$.

Lause 2.11. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät kolmioille $\Delta = \triangle ABC$ ja $\Delta' = \triangle A'B'C'$.

- (1) $\Delta \sim \Delta'$.
- (2) Kolmioiden Δ ja Δ' kaksi vastinkulmaa ovat yhtä suuret.
- (3) Kolmioiden Δ ja Δ' vastinsivut ovat verrannolliset.

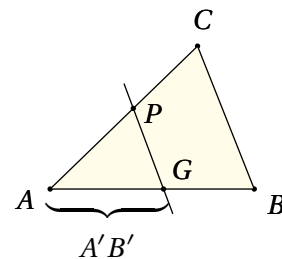
Todistus. Määritelmän nojalla ehdosta (1) seuraa ehdot (2) ja (3). Osoitetaan sitten että (1) seuraa ehdosta (2) ja myös ehdosta (3).

Olkoot $G \in \ell(A, B)$ ja $P \in \ell(A, C)$, joille $A'B' = AG$ ja $\ell(G, P) \parallel \ell(B, C)$.

Lauseen 1.5 (missä $A = A'$) mukaan on

$$\frac{AG}{AB} = \frac{AP}{AC}$$

ja lisäksi kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle AGP$ kaikki vastinkulmat ovat yhtä suuret, koska $\ell(B, C) \parallel \ell(G, P)$.



Oletetaan nyt että ehto (2) on voimassa. Tällöin kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ kaikki vastinkulmat ovat yhtä suuret lauseen 2.9 mukaan, ja siis $\triangle A'B'C' \cong \triangle AGP$ (KSK). Näin ollen

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{AG}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Symmetrisesti voidaan osoittaa, että

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

ja näin ollen ehdosta (2) seuraa (1) ja samalla (3).

Oletetaan sitten että ehto (3) on voimassa. Nyt $\triangle ABC \sim \triangle AGP$, sillä näillä kolmioilla kaksi vastinkulmaa ovat yhtä suuret, ja meidän tiedämme jo että ehdosta (2) seuraa (1). Saadaan

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC} = \frac{AG}{AP} = \frac{A'B'}{AP},$$

missä viimeinen yhtälö seuraa valinnasta $A'B' = AG$. Näin ollen $A'C' = AP$, ja vastaavasti nähdään, että $B'C' = GP$. Nyt $\triangle A'B'C' \cong \triangle AGP$ (SSS). Koska $\triangle AGP \sim \triangle ABC$, niin $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. \square

Yleisesti jokaista yhtenevyydestä vastaa yhdenmuotoisuustulos: Sivujen yhtäpituus korvataan vain niiden verrannollisuudella. Edellinen lause on (SSS \sim)-tulos. Kriteeriä (KSK) vastaava yhdenmuotoisuustulos on pelkkä (KK)-kriteeri.

Lause 2.12 (SKS \sim). Jos kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ on $\angle B = \angle B'$ ja

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'},$$

niin $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

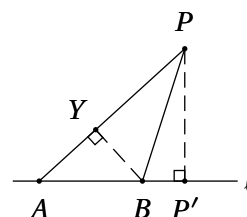
Todistus. Muutetaan edellistä todistusta niin, että käytetään kriteeriä (SKS) todentamaan, että $\triangle A'B'C' \cong \triangle AGP$. Tämä jää harjoitustehtäväksi. \square

Esimerkki 2.5 Sylvester esitti 1893 seuraavan ongelman: Onko olemassa sellaista äärellistä epä-kollinearisten pisteiden joukkoa \mathcal{P} , että kun pisteparit yhdistetään suoriksi, niin kullakin suoralla on ainakin kolme pistettä. Gallai (1933) ratkaisi ensimmäisenä Sylvesterin ongelman: Sylvesterin joukkoa \mathcal{P} ei ole olemassa. Seuraava melko yksinkertainen todistus on peräisin Kellyltä (1986).

Olkoon \mathcal{P} äärellinen epä-kollineaarinen pisteiden joukko. Tällöin on ainakin yksi suora, johon kuuluu tarkalleen kaksi joukon \mathcal{P} pistettä.

Todistusta varten olkoon $d(C, \ell)$ pisteen C etäisyys annetusta suorasta ℓ , eli $d(C, \ell)$ on normaalin CC' pituus, missä $C' \in \ell$.

Jos suoralle ℓ kuuluu kaksi joukon \mathcal{P} pistettä, niin on piste $P \in \mathcal{P}$, jolle $P \notin \ell$. Tällaisia pareja (P, ℓ) on vain äärellinen määrä, sillä \mathcal{P} on äärellinen. Valitaan pari (P, ℓ) , jolle $d(P, \ell)$ on pienin mahdollinen. Väitetään, että suoralla ℓ on vain kaksi joukon \mathcal{P} pistettä. Olkoon P' pisteen $P \in \mathcal{P}$ normaalin kantapiste suoralla ℓ .



Todetaan, että jos suoralla ℓ on vähintään kolme joukon \mathcal{P} pistettä, on niistä ainakin kaksi, sano- kaamme A ja B , samalla puolen suoraa $\ell(P, P')$. Oletetaan, että $B \in AP'$, ja olkoon BY normaali suoralle $\ell(P, A)$. Tällöin $\triangle AP'P \sim \triangle AYB$ (KK), ja siis

$$\frac{PP'}{BY} = \frac{AP}{AB} \leq \frac{AP}{AP'} < 1,$$

mikä antaa ristiriidan $d(B, \ell(A, P)) = BY < PP'$. \square

Kulmanpuolittajat

Lause 2.13 (Kulmanpuolittaja). Kolmion kulmanpuolittaja $\ell(A, P)$ jakaa vastakkaisen sivun viereisten sivujen suhteessa:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BC}.$$

Todistus. Olkoon $P = P_C$ kulman $\angle C$ puolittajan kantapiste. Piirretään jana $BE \parallel CA$, missä $E \in \ell(C, P)$, jolloin $\angle PCB = \angle ACP = \angle BEP$ oletuksen ja yhdensuuntaisuuden takia. Näin ollen $\triangle ECB$ on tasakylkinen, $BC = BE$. Koska $\triangle APC \sim \triangle BPE$ (KK), niin

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BE} = \frac{AC}{BC},$$

mikä olikin väite. \square

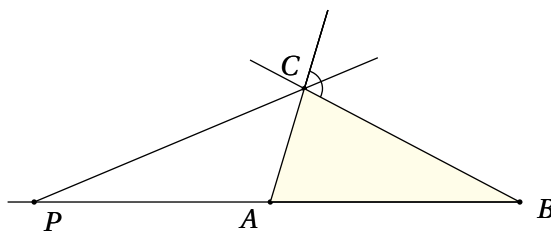
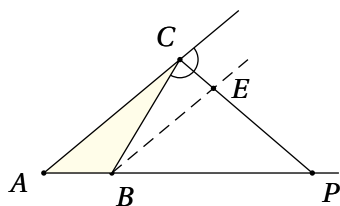
Edeltävä lause on voimassa myös kolmion ulkokulmien puolittajille.

Lause 2.14. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jossa $\angle A \neq \angle B$. Tällöin sen kärjen C ulkokulman puolittajasuora jakaa vastakkaisen sivun viereisten sivujen suhteessa:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC}.$$

Todistus. Olkoon p kärjen C ulkokulman puolittajasuora. Nyt p ei ole yhdensuuntainen suoran $\ell(A, B)$ kanssa, sillä oletuksen mukaan $\angle A \neq \angle B$. Muutoin todistus on edeltävän kaltainen.

Kyseeeseen tulee kaksi tapausta: $\angle A < \angle B$ ja $\angle A > \angle B$. Jälkimmäinen tapaus palautuu symmetriaan nojautuen ensimmäiseen. \square



Esimerkki 2.6 Jos piste P valitaan janalta AB siten, että

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB},$$

niin janalle AB on suoritettu **kultainen leikkaus**. Kun $AB = 1$ ja $AP = x$, niin kultaisessa leikkauksessa $1/x = x/(1-x)$, ja siten $x^2 + x - 1 = 0$. Ratkaisemalla todetaan, että $x = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.61803\dots$. Luku $\varphi = x + 1 = x^{-1} = 1.61803\dots$ esiintyy monissa yhteyksissä matematiikassa.

- Säännöllisen 5-kulmion halkaisijan suhde sivuun on φ .
- Määritellään **Fibonacci luvut**¹ f_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, ehdoista $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja

$$f_{i+1} = f_i + f_{i-1},$$

¹ Fibonacci eli Leonardo Pisalainen (n.1175 – 1250)

jolloin saadaan jono lukuja: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., jotka näkyvät Turun yössä Energia-laitoksen piippua koristamassa. Raja-arvo $\lim f_{i+1}/f_i$ on φ .

- Luku φ toteuttaa ketjumurtolukukehitelmän:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Samoin saadaan

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Stewartin lause

Pythagoraan² lauseelle on esitettävissä lukuisia erilaisia todistuksia, katso esimerkiksi web-sivulle <http://www.cut-the-knot.com>.

Lause 2.15 (Pythagoras). Olkoon $\triangle ABC$ suorakulmainen, $\angle C = 90^\circ$. Tällöin

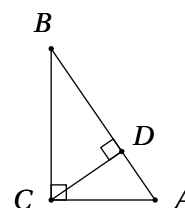
$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Todistus. Merkitään $D = H_C$. Kriteerin (KK) mukaan

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$$

ja siis

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \quad \text{ja} \quad \frac{DB}{CB} = \frac{CB}{AB}.$$



Näin ollen $AB^2 = AB(AD + DB) = AB \cdot \frac{AC^2 + CB^2}{AB} = AC^2 + CB^2$. \square

Pythagoraan lause on voimassa myös kääntäen, mutta tämä jää harjoitukseksi.

Lause 2.16. Jos kolmiossa $\triangle ABC$ on $AB^2 = AC^2 + BC^2$, niin $\angle C = 90^\circ$.

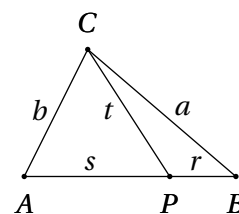
Seuraava Stewartin kaava yleistää Pythagoraan lauseen. Se on käyttökelpoinen geometrian laskennollisissa ongelmissa. Huomaa, että pisteiden A, B, C järjestystä suoralla ei ole kiinnitetty.

Lause 2.17 (Stewart 1746). Olkoot pisteet A, B, P kollineaariset ja C jokin tason piste. Tällöin

$$CA^2 \cdot \overline{BP} + CB^2 \cdot \overline{PA} + CP^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{PA} = 0$$

tai kuvan merkinnöin

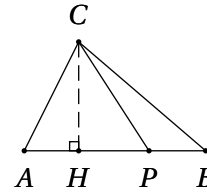
$$t^2 = \frac{s \cdot a^2 + r \cdot b^2}{s + r} - sr.$$



Todistus. (1) Tapaus $C \in \ell(A, B)$ on laskennollinen harjoitus.

² Pythagoras (n.580 – 500 eaa)

(2) Kun $C \notin \ell(A, B)$, niin $CA^2 = AH^2 + HC^2$, $CB^2 = BH^2 + HC^2$, $CP^2 = HP^2 + HC^2$, ja $AB + BP + PA = 0$. Väitteen kaavan vasen puoli tuottaa



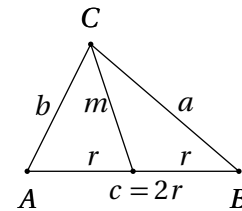
$$\begin{aligned} & (AH^2 \cdot BP + HC^2 \cdot BP) + (BH^2 \cdot PA + HC^2 \cdot PA) + (PH^2 \cdot AB + HC^2 \cdot AB) + AB \cdot BP \cdot PA \\ &= (AH^2 \cdot BP + BH^2 \cdot PA + PH^2 \cdot AB + AB \cdot BP \cdot PA) \\ &+ (HC^2 \cdot BP + HC^2 \cdot PA + HC^2 \cdot AB) = 0 + 0, \end{aligned}$$

missä siis $H \in \ell(A, B)$ ja siten väite seuraa kohdasta (1). □

Esimerkki 2.7 Sovelletaan Stewartin kaavaa kolmion $\triangle ABC$ kärkipisteisiin ja mediaanin kantapisteeseen M_C . Olkoon $m = CM_C$. Sadaan

$$m = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2}.$$

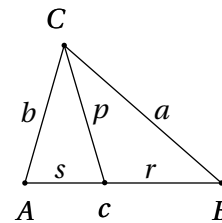
Näin mediaanin pituus on laskettu sivujen pituuksien avulla. □



Esimerkki 2.8 Harjoitustehtävänä on osoittaa, että kolmion kulmanpuolittajan pituus voidaan laskea sivujen pituuksien avulla:

Olkoot a, b, c kolmion $\triangle ABC$ sivujen pituudet, ja p sen kulmanpuolittajan pituus sivulle AB . Tällöin

$$p = \sqrt{ab \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right)}.$$



Erityisesti tämän avulla voidaan todistaa Steiner-Lehmusin tulos: Jos kolmion $\triangle ABC$ kaksi kulmanpuolittajaa ovat yhtä pitkät, on kolmio tasakylkinen. □

2.3 Konsyklisyys

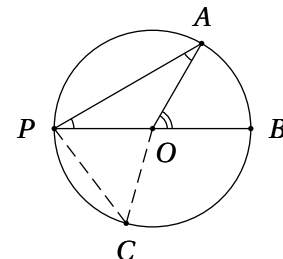
Olkoon $\omega = \omega(O, r)$ ympyrä, ja pisteet $A, P, B \in \omega$ sen kehällä. Kulma $\angle BPA$ on **kehäkulma**. Sitä vastaava **keskuskulma** on $\angle BOA$.

Lause 2.18. Ympyrän kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta.

Todistus. Oletetaan ensin, että kehäkulman $\alpha = \angle BPA$ toinen kylki, sanokaamme PB , on ympyrän $\omega(O, r)$ halkaisija, jolloin vastaava keskuskulma on $\beta = \angle BOA$. Kolmio $\triangle OAP$ on tasakylkinen, joten $\angle PAO = \alpha$. Nyt

$$2\alpha = 180^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta.$$

Toisaalta jokainen kehäkulma $\angle CPA$ voidaan esittää kahden kulman summana tai erotuksena, missä apukulmien toiset kyljet ovat halkaisijalla. □



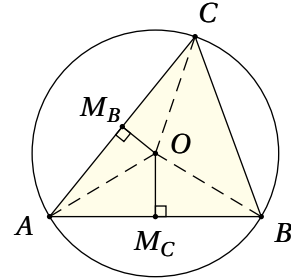
Koska samaa kaarta vastaavilla kehäkulmilla on sama keskuskulma, seuraava lause on voimassa.

Lause 2.19. *Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.*

Jos ympyrä ω kulkee monikulmion Γ kärkipisteiden kautta, sanotaan sitä monikulmion Γ **ympyräpiirretyksi ympyräksi**. Tällöin Γ on **konsyklinen**.

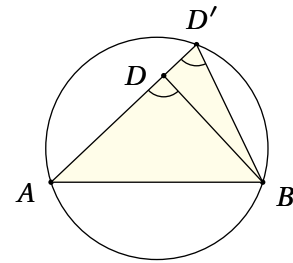
Lause 2.20. *Jokainen kolmio $\triangle ABC$ on konsyklinen, eli $\omega(A, B, C)$ on yksikäsitteisesti määrätty.*

Todistus. Olkoon O sivujen AB ja AC keskinormaalien leikkauspiste. Tällöin $\triangle AOM_B \cong \triangle COM_B$ (SKS), ja siten $OA = OC$. Samoin $OA = OB$, joten $OB = OC$ ja O on myös janan BC keskinormaalilla. Siis $\omega(O, OA)$ kulkee kolmion kärkipisteiden kautta. Yksikäsitteisyys on ilmeinen, sillä ympyrän keskipisteen on oltava sivujen keskinormaaleilla. \square



Lause 2.21. *Olkoot A, B, C epäkollineaariset pisteet, ja D samalla puolen suoraa $\ell(A, B)$ kuin C . Tällöin $\angle ACB = \angle ADB$ jos ja vain jos $D \in \omega(A, B, C)$.*

Todistus. Olkoon $D' \in \omega(A, B, C)$ suoralla $\ell(A, D)$ kuten kuvassa. Lauseen 1.10 mukaan $D = D'$, josta väite seuraa, sillä D' ja C vastaavat samaa kaarta. \square



Seuraava tulos on nyt selvä.

Lause 2.22. *Olkoot AB ympyrän ω halkaisija ja $P \notin \ell(A, B)$ tason piste. Tällöin P on ympyrän ω kaarella \widehat{AB} (vastapäivään luettuna) jos ja vain jos $\angle BPA = 90^\circ$.*

Lause 2.23. *Nelikulmio $\diamond ABCD$ on konsyklinen jos ja vain jos $\angle A + \angle C = 180^\circ$ jos ja vain jos $\angle B + \angle D = 180^\circ$.*

Todistus. Nelikulmion kulmien summa on 360° . (Todetaan jakamalla se kahteen kolmioon lävistäjän avulla.) Täten $\angle A + \angle C = 180^\circ$ jos ja vain jos $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

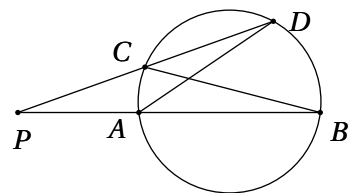
(\Rightarrow) Kehä- ja keskuskulmia koskevan tuoksen mukaan $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

(\Leftarrow) Piirretään ympyrä $\omega(A, B, C)$. Tällöin jänne AC näkyy pisteen B vastakkaisen kaaren AEC jokaisesta pisteestä kulman $180^\circ - \angle B = \angle D$ suuruisena. Lauseen 2.21 mukaan myös D on kaarella AEC . \square

Lause 2.24. *Olkoot P piste, ω ympyrä sekä $\ell(P, A, B)$ ja $\ell(P, C, D)$ suorina, missä $A, B, C, D \in \omega$, niin*

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Tässä vakio $PA \cdot PB$ on pisteen P **potenssi** ympyrän ω suhteen.



Todistus. Väite seuraa yhdenmuotoisuudesta $\triangle APD \sim \triangle CPB$. \square

Huomattakoon, että jos E on tangenttipiste (eli edellä $E = C = D$ ja $\ell(P, E) \perp \ell(O, E)$), niin tulos on yhä voimassa. Niinpä pisteen potenssi on PE^2 .

Lause 2.25 (Ptolemaios). Jos $\diamond ABCD$ on kossyklinen nelikulmio, niin

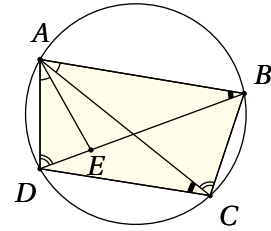
$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Todistus. Etsitään piste $E \in BD$ niin, että $\angle DAE = \angle CAB$. Tällöin $\triangle DAE \sim \triangle CAB$ ja $\triangle ADC \sim \triangle AEB$. Näin ollen

$$\frac{AD}{CA} = \frac{ED}{BC} \quad \text{ja} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DC}.$$

Yhdistämällä nämä saadaan väite,

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot (BE + ED) = AC \cdot BD. \quad \square$$



2.4 Konstruointuvuus

Tehtävä 1. (1) Siirrä annettu kulma $\angle ABC$ annetulle suoralle $\ell(R, S)$ sen pisteeseen R .

(2) Puolita annettu kulma.

(3) Puolita annettu jana.

(4) Piirrä suoralle normaali sen annettuun pisteeseen.

(5) Piirrä suoralle normaali sen ulkopuolella olevan pisteen kautta.

(6) Piirrä annetun pisteen kautta suora, joka on annetun suoran suuntainen.

Ratkaisu. Ratkaistaan (1); muut ovat harjoitustehtäviä.

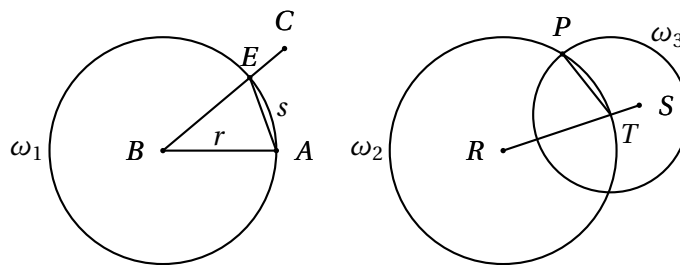
Tehtävässä (1) on siis konstruoitava piste P , jolle $\angle SRP = \angle ABC$. Merkitään $r = AB$.

1. Piirrä $\omega_1 = \omega(B, r)$. Olkoon $E = \omega_1 \cap \ell(B, C)$, ja merkitään $s = AE$.

2. Piirrä $\omega_2 = \omega(R, r)$ ja olkoon $T = \omega_2 \cap \ell(R, S)$.

3. Piirrä $\omega_3 = \omega(T, s)$ ja olkoon $P \in \omega_2 \cap \omega_3$.

Tällöin $\angle TRP$ on vaadittu kulma.

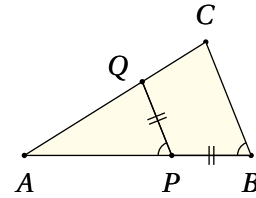


Todistus. Kriteerin (SSS) nojalla $\triangle ABE \cong \triangle TRP$, sillä $BA = BE = r = RP = RT$ ja $AE = s = TP$. Täten $\angle ABC = \angle TRP$ vastinkulmina. \square

Geometrisen tehtävän ratkaisu on algoritmi (ohjelma), joka kertoo miten tehtävä ratkaistaan askel askeleelta. Tällaisessa ratkaisussa voidaan käyttää hyväksi jo aikaisemmin ratkaistuja tehtäviä ikään kuin alirutiineina. Esimerkiksi ratkaisussa voi käyttää askelta: "Piirrä normaali suoran $\ell(A, R)$ pisteeseen P ", koska edeltävän tehtävän mukaan tiedetään miten tämä konstruktio tarkalleen tapahtuu.

Moniaskelisisissa ratkaisuissa on hyvä piirtää välivaiheet erikseen selkeyden vuoksi. Myös apukuviot ja esimerkkiratkaisut ovat hyödyllisiä.

Esimerkki 2.9 Etsi kolmion $\triangle ABC$ sivuilta AB ja AC pisteet P ja Q , joille $PB = PQ$ ja $PQ \parallel BC$.



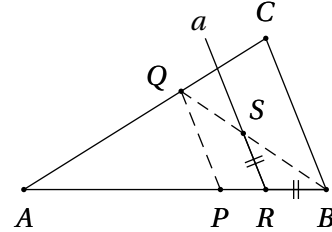
Ratkaisu. 1. Valitse piste R suoralta $\ell(A, B)$, ja piirrä suora $a \parallel \ell(B, C)$ sen kautta.

2. Etsi $S \in a$, jolle $RS = RB$.

3. Piirrä suora $\ell(B, S)$ ja olkoon $Q = \ell(B, S) \cap \ell(A, C)$.

4. Piirrä pisteen Q kautta suora $\ell(Q, P) \parallel \ell(C, B)$, missä $P \in \ell(A, B)$.

4. Tällöin pisteet P ja Q antavat vaaditun ratkaisun.



Todistus. Koska $\ell(P, Q) \parallel \ell(R, S)$, niin $\triangle BQP \sim \triangle BSR$, ja siten $PB = PQ$. \square

Tehtävä 2. Olkoot janat AB ja CD annettuina (yksikköjanan ohella).

(1) Etsi pituutta $AB + CD$ oleva jana.

(2) Etsi pituutta $\frac{AB}{k}$ oleva jana, missä k on luonnollinen luku.

(3) Etsi pituutta $AB \cdot CD$ oleva jana.

(4) Etsi pituutta $\frac{AB}{CD}$ oleva jana.

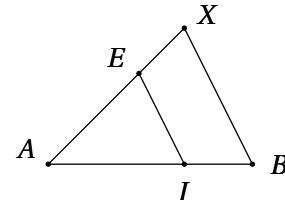
(5) Etsi pituutta \sqrt{AB} oleva jana.

Ratkaisu (1). Olkoon $E \in \ell(A, B)$, jolle $BE = CD$ ja $B \in AE$. Nyt $AE = AB + CD$.

Todistus. Selvä. \square

Ratkaisu (2). Harjoitus.

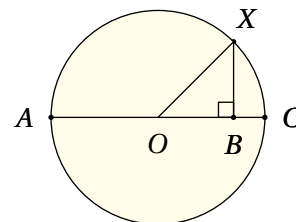
Ratkaisu (3). Olkoon $I \in \ell(A, B)$ niin, että $AI = 1$. (Kuvassa on tapaus $I \in AB$.) Piirretään suora $\ell \neq \ell(A, B)$ niin, että $A \in \ell$. Olkoon $E \in \ell$ piste, jolle $CD = AE$. Piirretään suoran $\ell(I, E)$ suuntainen suora $\ell(B, X)$, missä $X \in \ell$. Tällöin AX on kysytyn pituinen jana.



Todistus. Tässä $\triangle AIE \sim \triangle ABX$, jossa $AI = 1$. Väite seuraa verrannollisuudesta. \square

Ratkaisu (4). Harjoitus. (Muuta hieman edellistä konstruktiota.)

Ratkaisu (5). Olkoot $C \in \ell(A, B)$ niin että $B \in AC$ ja $BC = 1$. Puolita jana AC . Olkoon puolituspiste O . Piirrä $\omega = \omega(O, r)$, missä $r = OA$, ja normaali a suoralle $\ell(A, B)$ sen pisteeseen B . Kun $X \in \omega \cap a$, on BX kysytyn pituinen jana.



Todistus. Sovelletaan Pythagoraan lausetta kolmioon $\triangle OBX$. Tässä $OX = (AB + 1)/2$ on ympyrän ω säde, ja $OB = (AB - 1)/2$. Väite saadaan sitten laskemalla BX . \square

Sanotaan, että reaaliluku x on **konstruoituva**, jos on olemassa geometrinen (harppi-viivain)-konstruktio, joka tuottaa pituutta x olevan janan yksikköjanasta lähtien. Kaikkia jananpituuksia ei voida konstruoida harpin ja viivaimen avulla.

Edellisiä tehtäviä yhdistelemällä todetaan, että operaatiot summaus, tulo, jako ja neliöjuurenotto säilyttävät konstruoitavuuden. Esimerkiksi, jos janat AB ja CD ovat annettuina, voidaan geometrisesti konstruoida jana, jonka pituus on $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{AB^2 + CD}$. Seuraava tulos voidaan todistaa kuntalaajennusten avulla.

Lause 2.26. *Luku x on konstruoituva jos ja vain jos se saadaan yksikköjanasta rationaalisin operaatioin $(+, -, /, *)$ käyttäen neliöjuurenottoa.*

Esimerkiksi janaa, jonka pituus on $\sqrt[3]{2}$ ei voida geometrisesti konstruoida. Lauseen 2.26 nojalla on myös geometrisesti mahdotonta (1) jakaa mikä tahansa kulma kolmeen yhtä suureen kulmaan; (2) konstruoida neliö, jonka ala on sama kuin annetun ympyrän ala.

3 Merkilliset pisteet ja alat

3.1 Menelaus ja Ceva

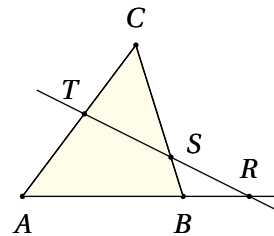
Menelauksen ja Cevan¹ lauseet koskevat kollineaarisuutta ja konkurrencsia, eli ongelmaa, milloin kolme pistettä ovat samalla suoralla ja milloin kolme suoraa leikkaavat yhteisessä pisteessä, vastaavasti.

Tässä kappaleessa janat oletetaan yleensä suunnatuiksi.

Sanotaan, että eri pisteet R, S, T ovat kolmion $\triangle ABC$ sivusuorilla, jos $R \in \ell(A, B)$, $S \in \ell(B, C)$, $T \in \ell(C, A)$. Erityisesti nämä pisteet eivät ole kärkipisteitä A, B, C .

Lause 3.1 (Menelaus). *Pisteet R, S, T kolmion $\triangle ABC$ sivusuorilla ovat kollineaariset jos ja vain jos*

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CT}{TA} = -1.$$



Tässä kolmio $\triangle ABC$ kierretään $A \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow C \rightarrow T \rightarrow A$ ja kaavan (suunnatut) janat kerätään matkan varrelta: $\downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow$.

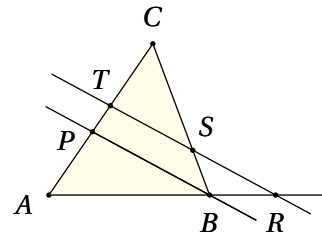
Todistus. (\Rightarrow) Oletetaan ensin, että pisteet R, S, T ovat kollineaariset, ja piirretään suora $b \parallel \ell(R, S, T)$ niin, että $B \in b$. Olkoon $P = \ell(A, C) \cap b$.

Lauseesta 1.5 seuraa, että

$$\frac{AR}{RB} = \frac{AT}{TP} \quad \text{ja} \quad \frac{BS}{SC} = \frac{PT}{TC},$$

ja siten

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CT}{TA} = \frac{AT}{TP} \cdot \frac{PT}{TC} \cdot \frac{CT}{TA} = -1.$$



(\Leftarrow) Oletetaan, että Menelauksen kaava toteutuu pisteille R, S, T . Olkoot $a = \ell(R, S)$ ja $T' = a \cap \ell(A, C)$. Pisteet R, S, T' ovat kollineaariset, joten edeltävän kohdan mukaan

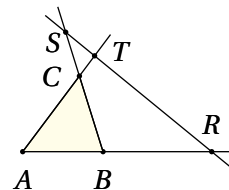
$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CT'}{T'A} = -1,$$

joten oletuksesta saadaan

$$\frac{CT}{TA} = \frac{CT'}{T'A}.$$

Esimerkin 1.3 mukaisesti $T = T'$, ja väite on todistettu. □

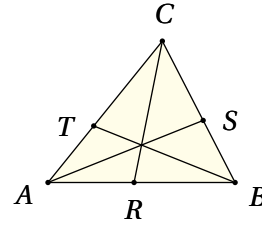
Menelauksen lauseessa yksi kollineaarisista pisteistä R, S, T on kolmion ulkopuolella – mahdollisesti kaikki kolme.



¹ Menelaus n.100; Ceva 1678

Lause 3.2 (Ceva). Olkoot pisteet R, S, T kolmion $\triangle ABC$ sivusuorilla. Tällöin suorat $\ell(A, S)$, $\ell(B, T)$, $\ell(C, R)$ ovat konkurrentit jos ja vain jos

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CT}{TA} = +1.$$

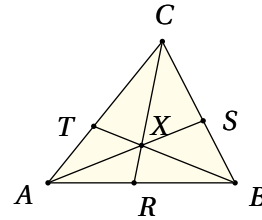


Todistus. (\Rightarrow) Olkoon X kyseisten suorien yhteinen leikkauspiste.

Sovelletaan Menelauksen lausetta tapauksiin $(\triangle ABT, \ell(R, X, C))$ ja $(\triangle BCT, \ell(S, X, A))$:

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BX}{XT} \cdot \frac{TC}{CA} = -1 \quad (3.1)$$

$$\frac{BS}{SC} \cdot \frac{CA}{AT} \cdot \frac{TX}{XB} = -1. \quad (3.2)$$



Kertomalla nämä yhtälöt keskenään saadaan Cevan kaava.

(\Leftarrow) Oletetaan, että Cevan kaava on voimassa, ja merkitään $X = \ell(C, R) \cap \ell(B, T)$ ja $S' = \ell(A, X) \cap \ell(B, C)$. Todistuksen alkuosan mukaan

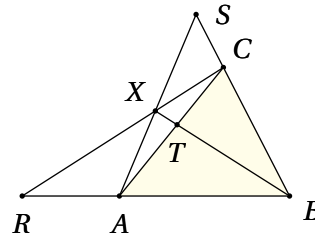
$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BS'}{S'C} \cdot \frac{CT}{TA} = +1,$$

joten oletuksen nojalla

$$\frac{BS'}{S'C} = \frac{BS}{SC}.$$

Esimerkistä 1.3 seuraa väite, eli $S = S'$. \square

Huomaa, ettei Cevan lauseessa oleteta, että pisteet R, S, T olisivat kolmion sivujanoilla. Ne saattavat olla sivusuorilla kolmion ulkopuolella.



Jatketaan hieman Cevan lauseen todistusta. Huomaa että lauseessa on nyt summaus.

Lause 3.3 (Van Aubel 1878). Olkoot pisteet R, S, T kolmion $\triangle ABC$ sivusuorilla siten, että $\ell(A, S)$, $\ell(B, T)$, $\ell(C, R)$ ovat konkurrentit leikatun pisteessä X . Tällöin

$$\frac{BX}{XT} = \frac{BR}{RA} + \frac{BS}{SC}.$$

Todistus. Yhtälöistä (3.1) ja (3.2) seuraa

$$\frac{BX}{XT} \cdot \frac{TC}{AC} = \frac{BR}{RA} \quad \text{ja} \quad \frac{BX}{XT} \cdot \frac{AT}{AC} = \frac{BS}{SC},$$

mistä laskemalla yhteen saadaan

$$\frac{BX}{XT} \cdot \frac{(AT + TC)}{AC} = \frac{BR}{RA} + \frac{BS}{SC},$$

ja näin ollen väite on todistettu. \square

3.2 Kolmion merkittävät pisteet

Lause 3.4 (Painopiste). Kolmion $\triangle ABC$ mediaanit leikkaavat pisteessä G . Tämä **painopiste** toteuttaa ehdon

$$AG = 2 \cdot GM_A.$$

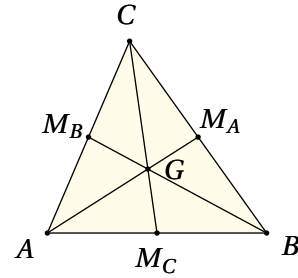
Luonnollisesti myös $BG = 2 \cdot GM_B$ ja $CG = 2 \cdot GM_C$ muille mediaaneille.

Todistus. Konkurrenttisuus seuraa Cevan lauseesta,

$$\frac{BM_A}{M_AC} \cdot \frac{CM_B}{M_BA} \cdot \frac{AM_C}{M_CB} = 1,$$

ja tarkennus van Aubelin lauseesta,

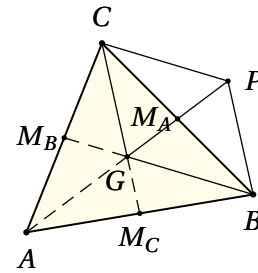
$$\frac{AG}{GM_A} = \frac{AM_C}{M_CB} + \frac{AM_B}{M_BC} = 2.$$



□

Esimerkki 3.1 Osoitetaan, että kolmion mediaanien pituudet määräävät kolmion: Olkoot annettuna kolmion \triangle mediaanien pituudet m_A, m_B, m_C . Konstruoidaan kolmio $\triangle ABC$, joka on yhtenevä kolmion \triangle kanssa.

Tätä varten tarkastellaan kolmiota $\triangle ABC$, joka on vielä meille tuntematon. Olkoon piste $P \in \ell(A, M_A)$, jolle $GM_A = M_AP$. Tällöin $\diamond CGBP$ on suunnikas, sillä sen lävistäjät puolittavat toisensa. Nyt $GM_C = PB/2 (= CG/2)$, sillä $GM_C = CM_C/3$ ja $CG = PB$.



Painopiste G on ympyröiden $\omega(B, 2m_B/3)$ ja $\omega(P, 2m_A/3)$ leikkauspiste. Kolmio $\triangle GBP$ voidaan siten konstruoida, kun jana BP ensin valitaan. Sivujen pituudet ovat

$$GP = 2m_A/3, GB = 2m_B/3, BP = 2m_C/3.$$

Näin ollen myös suunnikkaan kärki C on konstruoitavissa, ja sen jälkeen helposti myös kolmion piste A . □

Seuraava tulos on uudelleen Lause 2.20.

Lause 3.5 (Ympäri piirretty ympyrä). Kolmion \triangle sivujen keskinormaalit leikkaavat pisteessä O , joka on kolmion ympäri piirretyn ympyrän $\triangle(A, B, C)$ keskipiste.

Kumma kyllä, Eukleides ei mainitse korkeussuorien konkurrenttisuutta. Ensimmäinen todistus sille lienee Chapplen käsialaa vuodelta 1749. Tuloksen tarkennus on peräisin Eulerilta.²

Lause 3.6 (Ortosentri). Kolmion $\triangle ABC$ korkeussuorat leikkaavat pisteessä H . Lisäksi ortosentri H , painopiste G ja ympäri piirretyn ympyrän keskipiste O ovat kollineaariset ja

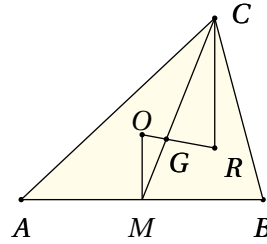
$$HG = 2 \cdot GO.$$

Suora $\ell(H, G, O)$ on **Eulerin suora**.

² Euler (1707 – 1783)

Todistus. Jos $\triangle ABC$ on tasasivuinen, niin $O = G = H$. Oletetaan siis, että $CA \neq CB$, jolloin $G \neq O$. Merkitään lyhyesti $M = M_C$. Olkoon R piste suoralla $\ell(O, G)$ niin, että $RG = 2 \cdot GO$.

Osoitetaan, että $R = H$. Lauseen 3.4 mukaan $G \in CM$ ja $CG = 2 \cdot GM$. Oletuksen mukaan $RG = 2 \cdot GO$, ja siten $\triangle CGR \sim \triangle MGO$, jolloin $\angle CRG = \angle MOG$. Siten $\ell(O, M) \parallel \ell(C, R)$. Koska $\ell(O, M) \perp \ell(A, B)$, myös $\ell(C, R) \perp \ell(A, B)$, eli $\ell(C, R)$ on korkeusuora. Aivan samoin muut korkeussuorat kulkevat pisteen R kautta, ja niinpä $R = H$ on kuten vaadittu. \square



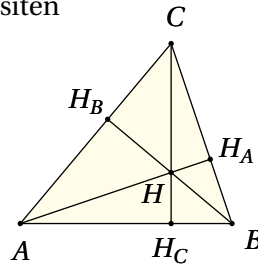
Esimerkki 3.2 Ortosentrin olemassaolo seuraa myös Cevan lauseesta: Kriteerin (KK) mukaan $\triangle ABH_B \sim \triangle ACH_C$, $\triangle BAH_A \sim \triangle BCH_C$, $\triangle CBH_B \sim \triangle CAH_A$, ja siten

$$\frac{AH_C}{H_BA} = \frac{AC}{BA}, \quad \frac{BH_A}{H_CB} = \frac{BA}{CB}, \quad \frac{CH_B}{H_AC} = \frac{CB}{AC},$$

joten

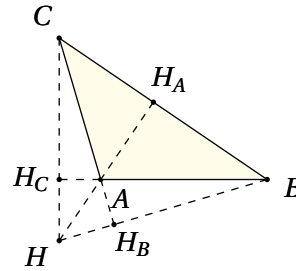
$$\frac{AH_C}{H_CB} \cdot \frac{BH_A}{H_AC} \cdot \frac{CH_B}{H_BA} = \frac{AC}{BA} \cdot \frac{BA}{CB} \cdot \frac{CB}{AC} = 1,$$

ja siis Cevan lause todistaa väitteen. \square



Jos kolmio $\triangle ABC$ ei ole teräväkulmainen, on sen ortosentri kolmion ulkopuolella.

Kolmion $\triangle ABC$ **ortokolmio** on $\triangle_O = \triangle H_A H_B H_C$, jonka kärkinä ovat korkeusjanojen kantapisteet.

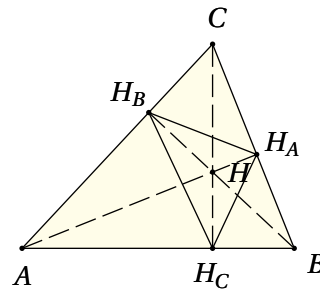


Esimerkki 3.3 Osoitetaan, että teräväkulmaisen kolmion \triangle korkeusjanat ovat ortokolmion \triangle_O kulmien puolittajat. Todetaan ensin, että nelikulmiot $\diamond AH_C H H_B$ ja $\diamond BH_A H H_C$ ovat konsykliset.

Niissä $\angle H_B + \angle H_C = 180^\circ$ ja $\angle H_C + \angle H_A = 180^\circ$. Samaa kehää vastaavina kehäkulmina

$$\angle HAH_B = \angle HH_C H_B \quad \text{ja} \quad \angle H_A BH = \angle H_A H_C H.$$

Toisaalta $\triangle AH H_B \sim \triangle B H H_A$ (KK), ja siten $\angle HAH_B = \angle H_A BH$, mistä väite seuraa. \square



Sanotaan, että ympyrä ω on monikulmion Γ **sisään piirretty ympyrä**, jos se sivuaa kaikkia kulmion Γ sivujanoja.

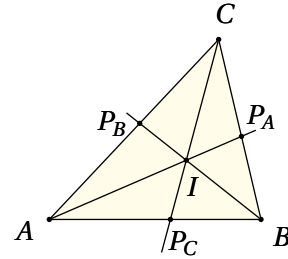
Lause 3.7 (Sisään piirretty ympyrä). Kolmion kulmien puolittajat leikkaavat pisteessä I , joka on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

Todistus. Kulmanpuolittajia koskevan lauseen 2.13 mukaan

$$\frac{BP_A}{P_AC} \cdot \frac{CP_B}{P_BA} \cdot \frac{AP_C}{P_CB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1,$$

jolloin konkurrenttisuus seuraa Cevan lauseesta.

Jokaisen pisteen $X \in \ell(A, P_A)$ etäisyys suorista $\ell(A, B)$ ja $\ell(A, C)$ on yhtä suuri. Täten pisteen I etäisyys sivuista on sama, eli I on sen ympyrän keskipiste, joka sivuaa kolmion $\triangle ABC$ sivuja. □

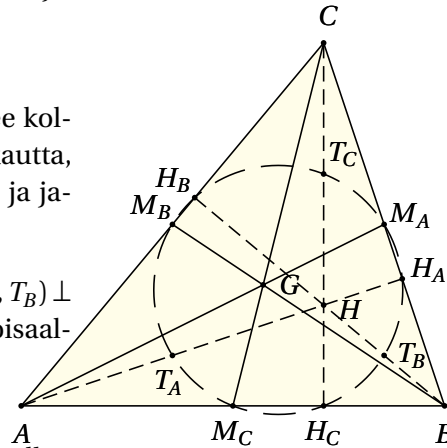


Esimerkki 3.4 (Feuerbach 1822). Ympyrä ω , joka kulkee kolmion $\triangle ABC$ mediaanien kantapisteiden M_A, M_B, M_C kautta, kulkee myös korkeusjanojen kantapisteiden H_A, H_B, H_C ja janojen AH, BH, CH keskipisteiden T_A, T_B, T_C kautta.

Todistus. Tässä $\triangle BHC \sim \triangle BT_B M_A$ (SKS~), joten $\ell(M_A, T_B) \perp \ell(A, B) \perp \ell(C, H_C)$. Aivan samoin on $\ell(M_B, T_A) \perp \ell(A, B)$. Toisaalta

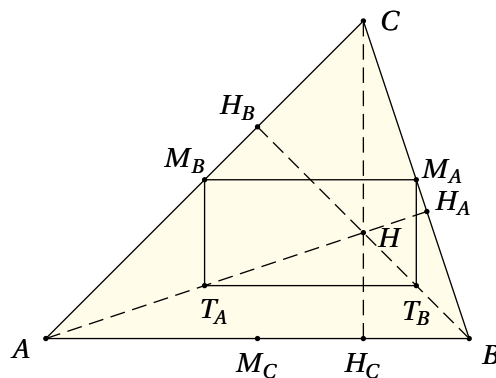
$$\triangle ABH \sim \triangle T_A T_B H \text{ ja } \triangle ABC \sim \triangle M_B M_A C,$$

joten $\ell(T_A, T_B) \parallel \ell(A, B)$ ja $\ell(M_B, M_A) \parallel \ell(A, B)$. Näin ollen $\diamond M_B M_A T_B T_A$ on suorakulmio. □



Samoin $\diamond M_A M_C T_A T_C$ on suorakulmio. Näillä kahdella suorakulmiolla on yhteinen lävistäjä $M_A T_A$, joten ne kuuluvat sen ympyrän ω kehälle, jonka halkaisija $M_A T_A$ on.

Erityisesti $M_A, M_B, M_C \in \omega$ ja $T_A, T_B, T_C \in \omega$. Lisäksi $\angle H_A = \angle H_B = \angle H_C = 90^\circ$, joten myös $H_A, H_B, H_C \in \omega$, koska $T_A M_A, T_B M_B$ ja $T_C M_C$ ovat ympyrän ω halkaisijoita. Väite on todistettu. □



3.3 Monikulmioiden aloista

Monikulmion ala määrätään sen suhteessa yksikköalaan, eli neliön alaan, jonka sivut ovat yksikköjanan pituisia. Kolmion Δ ala on

$$\text{ala}(\Delta) = \frac{1}{2}ha,$$

missä a on sivun pituus, ja h sen vastaisen korkeusjanan pituus. Oheinen lause sanoo, että tällainen määrittely käy laatuun.

Lause 3.8. *Olkoon $\Delta = \triangle ABC$ kolmio. Tällöin $AH_A \cdot BC = BH_B \cdot AC = CH_C \cdot AB$.*

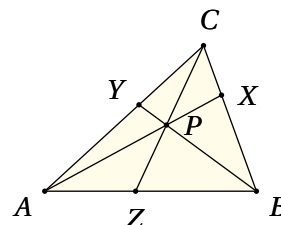
Todistus. Harjoitus. □

Esimerkki 3.5 Yhtenevillä kolmioilla on samansuuruinen ala. Tämän varmistamiseksi todetaan, että yhtenevillä kolmioilla $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ on yhtä pitkät vastinkorkeusjanat, sillä $\triangle AH_C C \cong \triangle A'H_C' C'$ (2K+S). □

Esimerkki 3.6 Aloja voidaan käyttää hyväksi todistettaessa geometrisia tuloksia:

Olkoot P kolmion $\triangle ABC$ jokin sisäpiste ja $X = \ell(A, P) \cap \ell(B, C)$,
 $Y = \ell(B, P) \cap \ell(A, C)$, $Z = \ell(C, P) \cap \ell(A, B)$. Tällöin

$$\frac{PX}{AX} + \frac{PY}{BY} + \frac{PZ}{CZ} = 1.$$



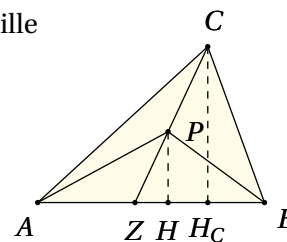
Tätä varten todetaan, että $\Delta = \triangle ABC$. Nyt

$$\frac{\text{ala}(\triangle ABP)}{\text{ala}(\Delta)} = \frac{AB \cdot PH}{AB \cdot CH_C} = \frac{PH}{CH_C} = \frac{PZ}{CZ},$$

sillä $\triangle ZPH \sim \triangle ZCH_C$. Vastaavat lausekkeet saadaan kolmioille $\triangle APC$ ja $\triangle BCP$, ja siten

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\text{ala}(\triangle ABP) + \text{ala}(\triangle ACP) + \text{ala}(\triangle BCP)}{\text{ala}(\Delta)} \\ &= \frac{PZ}{CZ} + \frac{PY}{BY} + \frac{PX}{AX}. \end{aligned}$$

□



(SSS)-kriteerin nojalla kolmion sivujen pituudet määräävät sen alan, koska yhtenevillä kolmioilla on sama ala. Seuraava tulos³, joka jää harjoitukseksi, kertoo miten.

Lause 3.9 (Heronin kaava). *Olkoot kolmion Δ sivujen pituudet a, b, c ja olkoon $p = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$ puolet sen piirin pituudesta. Tällöin*

$$\text{ala}(\Delta) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

³ Heron n.75. Tulos lienee peräisin Arkhimedeeltä (287 – 212 eaa)

Esimerkki: Yhteisositettavuus*

Monikulmion Γ **ositus** on äärellinen joukko monikulmioita, jotka peittävät monikulmion Γ ja joilla ei ole yhteisiä pisteitä mahdollisia sivupisteitä lukuunottamatta. Seuraava tulos⁴ sanoo, että jos monikulmioilla Γ_1 ja Γ_2 on sama ala, ovat ne **yhteisositettavissa**, eli Γ_1 voidaan leikata osiin ja koota uudelleen monikulmioksi Γ_2 .

Lause 3.10 (Wallace–Bolyai–Gerwien). *Jos monikulmioilla Γ_1 ja Γ_2 on sama ala, voidaan ne osittaa yhteneviin monikulmioihin:*

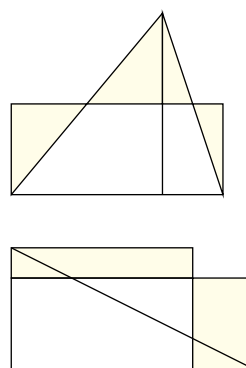
$$\Gamma_i = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_{ij} \quad \text{missä } \Gamma_{1j} \cong \Gamma_{2j} \text{ kaikilla } j.$$

Todistuksen ajatus. Osoitetaan, että jokainen monikulmio Γ on yhteisositettavissa sellaisen suorakulmion kanssa, jonka korkeus on 1. Väite seuraa tästä.

Monikulmio Γ voidaan osittaa kolmioihin $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ lävis-täjien avulla. Edelleen jokainen kolmio Δ_i voidaan osittaa neljään osaan, ja koota uudelleen suorakulmioksi Γ_i kuten kuvassa.

Oletetaan sitten, että meillä on kaksi sama-alaista suorakulmiota, joiden korkeudet ovat a ja b , missä $b < a \leq 2b$.

Asetetaan nämä suorakulmiot kuten kuvassa. Todetaan, että ne ovat yhteisositettavissa. Toistamalla tätä menettelyä päätellään, että jokainen suorakulmio Γ_i on yhteisositettavissa suorakulmion Γ'_i kanssa, jonka korkeus on 1.



Liimaamalla kaikki saadut monikulmiot 'nauhaksi' $\Gamma'_1 \Gamma'_2 \dots \Gamma'_n$ on osoitettu, että jokainen monikulmio on yhteisositettavissa tällaisen suorakulmion kanssa. \square

Seuraavan tuloksen todistaminen vaatii yllättävän paljon apuneuvoja. Huomaa, että neliön jakaminen $2n$ kappaleeseen samanlaiseen kolmioon ei tuota liiemmästi vaikeuksia.

Lause 3.11 (Monsky 1970). *Neliötä ei voida osittaa samanlaisiin kolmioihin, joita on pariton lukumäärä.*

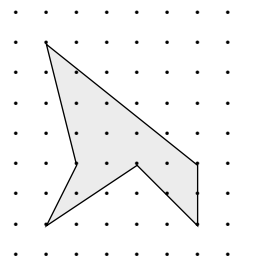
Esimerkki: Pickin lause ja hilapisteet*

Monikulmioiden aloille on myös eräs oikotie, **Pickin metodi**, jota voidaan käyttää kun monikulmion kärkipisteet ovat **hilapisteitä**. Konstruoidaan tasoon suorakulmainen koordinaatisto yksikköjanan avulla, jolloin tason piste voidaan esittää muodossa (r, s) , missä r on x -koordinaatti ja s on y -koordinaatti. Pisteet, joiden koordinaatit ovat kokonaislukuja ovat hilapisteitä.

Lause 3.12 (Pick 1899). *Olkoon Γ monikulmio, jonka kärkipisteet ovat hilapisteitä. Tällöin*

$$\text{ala}(\Gamma) = \frac{1}{2}p + q - 1,$$

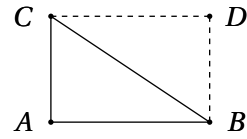
missä p (q , vastaavasti) on niiden hilapisteiden lukumäärä, jotka ovat kulmion Γ sivuilla (sisäosassa, vast.).



⁴ Wallace 1807, Gerwien 1833; Bolyain (1802 – 1860) esittämä ongelma.

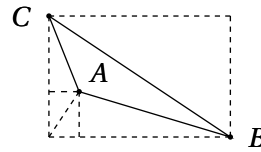
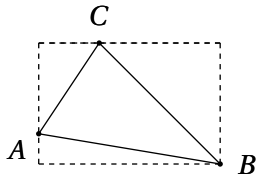
Todistuksen ajatus. Todetaan ensin, että jos kaava pitää paikkansa monikulmiolle Γ_1 ja Γ_2 , joilla on yksi yhteinen sivu, niin se pitää paikkansa näiden yhdelmälle Γ . Koska jokainen monikulmio voidaan jakaa kolmioihin lävistäjien avulla, palautuu todistus kolmioihin.

Oletetaan ensin, että $\triangle ABC$ on suorakulmainen, ja olkoon $\diamond ABDC$ suorakulmio kuten kuvassa. Merkitään $a = AB$ ja $b = AC$. Jos hypotenuusalla BC on $k + 2$ hilapistettä (mukaanlukien B ja C), niin $p = a + b + k + 1$.



Toisaalta kolmion sisällä olevien hilapisteiden lukumäärä on $q = ((a-1)(b-1)-k)/2$, ja siten laskemalla saadaan, että $p/2 + q - 1 = ab/2$ kuten vaadittua.

Tapaukset, joissa $\triangle ABC$ ei ole suorakulmainen palautuvat seuraaviin kahteen tapaukseen, joissa kumpaankin voidaan soveltaa suorakulmaisuuutta.



□

Huomaa, että Pickin lauseen mukaan **primitiivisen kolmion**, joilla vain kärkipisteet ovat hilapisteitä, ala on aina $1/2$ (!).

Osa II LIIKE TASOSSA

4 Isometriat

Tason transformaatioiden teoria, ja modernin geometrian kehitys ylipäättään, on aivan erityisesti Felix Kleinin työn "Erlanger Programm" (1872) ansiota. Keskeinen käsite Kleinin maailmassa on symmetria, ja sen mukana ryhmäteoria. Transformaatioiden perustulokset ovat peräisin paljolti kahdelta tutkijalta: Arthur Cayley (1821-1895) ja James Sylvester (1814-1897).

4.1 Transformaatiot

Kuvaus $\alpha: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ on tason **transformaatio** (tai **muunnos**), jos se on bijektio. Transformaatio siis järjestää tason pisteet uudelleen niin, että jokainen piste kuvautuu joksikin pisteeksi ja jokainen piste on tarkalleen yhden pisteen kuva.

Kuvio on mikä tahansa tason pistejoukko, eli $K \subseteq \mathbb{E}$. Kun α on tason transformaatio, on usein selkeämpää kirjoittaa pisteen P ja kuvion K kuvalla

$$\begin{aligned}\alpha(P) &= P^\alpha, \\ \alpha(K) &= K^\alpha = \{P^\alpha : P \in K\}.\end{aligned}$$

Janan PQ kuva transformaatiossa α on $\alpha(PQ) = \{R^\alpha : R \in PQ\}$. Toisaalta, $P^\alpha Q^\alpha$ on kuvapisteitä P^α ja Q^α yhdistävä jana, eli $P^\alpha Q^\alpha = \{R : R \in P^\alpha Q^\alpha\}$. Huomattakoon, että yleisesti $P^\alpha Q^\alpha$ ei ole sama asia kuin $\alpha(PQ)$.

Esimerkki 4.1 Olkoon O tason kiinnitetty piste. Ehdosta

$$OP^\alpha = OP^2, \quad P^\alpha \in \vec{\ell}(O, P)$$

määritelty kuvaus α on hyvin määritelty tason transformaatio, joka siirtää pisteen P suunnattua suoraa $\ell(O, P)$ pitkin etäisyydelle OP^2 pisteestä O . Tällainen transformaatio α 'vääristää' geometriset kuviot. Esimerkiksi suoran ℓ kuva $\ell^\alpha (= \alpha(\ell))$ ei ole välttämättä suora. \square

Transformaation α käänteiskuvaus α^{-1} on myös bijektio ja siten transformaatio. Lisäksi,

$$\alpha\alpha^{-1} = \iota = \alpha^{-1}\alpha,$$

missä ι on **identiteettikuvaus**, $\iota(P) = P$ kaikille pisteille P . Transformaatioiden yhdisteet $\beta\alpha$ ovat myös transformaatioita, ja koska kuvausten yhdistäminen on assosiattiivista,

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

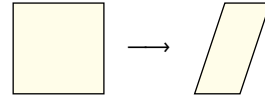
muodostavat transformaatiot ryhmän \mathcal{T} . Erityisesti, jos \mathcal{G} on perhe transformaatioita $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}$, joka on suljettu kuvausten yhdistämiseen ja käänteiskuvauksiin nähden, on \mathcal{G} ryhmän \mathcal{T} aliryhmä.

Ryhmäominaisuudet ovat usein hyödyllisiä käsiteltäessä transformaatioita. Jos \mathcal{G} on ryhmä transformaatioita, niin sen alkioille on voimassa esimerkiksi seuraavat säännöt:

$$\begin{aligned}\alpha_1\beta &= \alpha_2\beta \implies \alpha_1 = \alpha_2, \\ \beta\alpha_1 &= \beta\alpha_2 \implies \alpha_1 = \alpha_2, \\ \alpha &= \beta\gamma \implies \beta = \alpha\gamma^{-1}, \\ \alpha &= \gamma\beta \implies \beta = \gamma^{-1}\alpha, \\ (\beta\alpha)^{-1} &= \alpha^{-1}\beta^{-1}.\end{aligned}$$

Jos kaksi transformaatiota α ja β toteuttavat ehdon $\beta\alpha = \alpha\beta$, sanotaan, että ne **kommutoivat**. Yleensä transformaatiot eivät kommutoi keskenään.

Transformaatiota, joka kuvaa jokaisen suoran suoraksi, $\ell \mapsto \ell^\alpha$, kutsutaan **affiiniksi kuvaukseksi** (tai **affiiniksi transformaatioksi**). Tällöin siis $\alpha(\ell(P, Q)) = \ell(\alpha(P), \alpha(Q))$.



Lause 4.1. *Affiinin kuvauksen käänteiskuvaus on affiini, ja affiinien kuvausten yhdisteet ovat affiineja. Siten affiinit kuvaukset muodostavat ryhmän.*

Todistus. Olkoot α affiini kuvaus, sekä P ja Q kaksi eri pistettä. Tarkastellaan suoran $\ell(P, Q)$ kuvaa. Koska α on bijektio, on pisteet A ja B , joille $A^\alpha = P$ ja $B^\alpha = Q$. Suoran $\ell = \ell(A, B)$ kuva ℓ^α oletuksen mukaan suora, ja siis $\ell^\alpha = \ell(P, Q)$. Näin ollen α^{-1} kuvaa suoran $\ell(P, Q)$ suoraksi ℓ . Yhdistämistä koskeva väite on myös selvä. \square

Lause 4.2. *Olkoot α affiini kuvaus ja $a \parallel b$ yhdensuuntaiset suorat. Tällöin myös niiden kuvasuorat ovat yhdensuuntaiset: $a^\alpha \parallel b^\alpha$. Erityisesti, jos $\diamond ABCD$ on suunnikas, samoin on $\diamond A^\alpha B^\alpha C^\alpha D^\alpha$.*

Todistus. Oletetaan, että $a^\alpha \cap b^\alpha \neq \emptyset$, sanokaamme $P \in a^\alpha \cap b^\alpha$. Tällöin $\alpha^{-1}(P) \in a \cap b$, koska α on bijektio. Mutta nyt $a = b$, koska $a \parallel b$. Siis, jos $a \parallel b$, myös $a^\alpha \parallel b^\alpha$. \square

4.2 Isometrioiden määritelmä

Transformaatio $\alpha \in \mathcal{T}$ on **isometria**, jos se säilyttää pisteiden väliset etäisyydet, eli jos kaikille P ja Q , on voimassa

$$P^\alpha Q^\alpha = PQ.$$

Lause 4.3. *Jokainen isometria kuvaa janan yhtä pitkäksi janaksi. Siten isometria α on affiini kuvaus, jolle on voimassa $\alpha(PQ) = P^\alpha Q^\alpha$.*

Todistus. Lauseen 1.3(5) mukaan, $R \in PQ$ jos ja vain jos $PQ = PR + RQ$, ja siten isometrialle α on voimassa: $P^\alpha Q^\alpha = P^\alpha R^\alpha + R^\alpha Q^\alpha$, mistä seuraa, että $R \in PQ$ jos ja vain jos $R^\alpha \in P^\alpha Q^\alpha$. \square

Lause 4.4. *Transformaatio α on isometria α jos ja vain jos se kuvaa jokaisen kolmion Δ yhteneväksi kolmioksi: $\Delta^\alpha \cong \Delta$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että α on isometria. Ensinnäkin kolmion $\Delta = \triangle ABC$ kuva on kolmio, sillä sivut kuvautuvat janoiksi, jotka leikkaavat toisensa kärkipisteiden kuvapisteissä bijektiivisyyden nojalla. Koska isometria säilyttää etäisyydet, niin kolmioiden $\Delta = \triangle ABC$ ja $\Delta^\alpha = \triangle A^\alpha B^\alpha C^\alpha$ vastinsivut ovat yhtä pitkät ja siten (SSS) todistaa tuloksen.

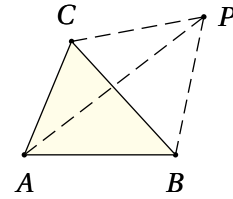
Väitteen todistamiseksi toiseen suuntaan olkoon α vaaditunlainen transformaatio. Olkoot AB jana ja C piste, jolle $\Delta = \triangle ABC$ on kolmio. Oletuksen mukaan $\Delta \cong \Delta^\alpha$, ja siten α kuvaa janan AB yhtä pitkäksi janaksi $A^\alpha B^\alpha$, ja niinpä α on isometria. \square

Isometria on kolmioiden yhtenevyyden yleistys. Sanotaan, että kaksi tasokuviota K_1 ja K_2 ovat **yhtenevät** (tai **kongruentit**), jos on olemassa isometria α , jolla $K_2 = K_1^\alpha$. Identiteettikuvaus ι on selvästi isometria, ja samoin on jokaisen isometrian α käänteiskuvaus α^{-1} . Lisäksi kahden isometrian α ja β yhdiste $\beta\alpha$ on jälleen isometria. Näin ollen:

Lause 4.5. Tason isometriat muodostavat ryhmän \mathcal{E} .

Seuraavan lauseen mukaan tason jokainen piste P tulee täysin määrättyä etäisyyksistään annetun kolmion kärkipisteisiin.

Lause 4.6 (Kolmen pisteen sääntö). Kolme epäkollineaarista pistettä määräävät isometrian: Olkoon Δ kolmio, ja $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$. Jos $\Delta^\alpha = \Delta^\beta$, niin $\alpha = \beta$.



Todistus. Olkoot $\Delta = \triangle ABC$, ja $A^\alpha = A^\beta$, $B^\alpha = B^\beta$ ja $C^\alpha = C^\beta$. Oletetaan, että $P^\alpha \neq P^\beta$. Koska $A^\alpha P^\alpha = A^\alpha P^\beta (= A^\beta P^\beta)$, on A^α janan $P^\alpha P^\beta$ keskinormaalilla. Aivan samoin ovat B^α ja C^α . Mutta $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha$ eivät ole kollineaarisia, mikä on ristiriita. \square

Kiintopisteet ja suunta

Isometrioiden kaksi keskeisintä käsitettä ovat kiintopisteet ja suunnansäilyvyys.

Transformaation α **kiintopisteet** ovat ne pisteet P , joilla $P^\alpha = P$. Sanotaan, että transformaatio α **kiinnittää kuvion** K , jos $K = K^\alpha$. Lisäksi, α **kiinnittää kuvion** K **pisteittäin**, jos $P^\alpha = P$ kaikilla $P \in K$, eli jos K koostuu vain transformaation α kiintopisteistä.

Esimerkki 4.2 (1) Esimerkin 4.1 kuvauksen α kiintopisteet ovat O ja yksikköympyrän $\omega(O, 1)$ kehäpisteet, eli α kiinnittää ympyrän $\omega(O, 1)$ pisteittäin. Kuvaukseen α kiinnittää myös kaikki suorat $\ell(O, P)$, missä $P \neq O$, mutta ei pisteittäin.

(2) Transformaatiot, jotka kiinnittävät kuvion K muodostavat ryhmän \mathcal{T} aliryhmän. Samoin muodostavat ne transformaatiot, jotka kiinnittävät kuvion K pisteittäin. \square

Olkoon $\Delta = \triangle ABC$ kolmio, jonka kärkipisteet luetaan esimerkiksi vastapäivään. Isometria α **säilyttää kolmion Δ suunnan**, jos kuvakolmion Δ^α kärkipisteet vastapäivään luettuna ovat $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha$. Muutoin α **kääntää kolmion Δ suunnan**, eli kun kuvakolmion pisteet luettuina vastapäivään ovat $A^\alpha, C^\alpha, B^\alpha$.

Isometria α on **suunnansäilyttävä**, jos se säilyttää *kaikkien* kolmioiden suunnan, ja se on **suunnankääntävä**, jos se kääntää *kaikkien* kolmioiden suunnan. Osoitetaan, että isometria on joko suunnansäilyttävä tai -kääntävä, eli suunnan suhteen isometriat käyttäytyvät samoin kaikkiin kolmioihin nähden: $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^-$, missä

- \mathcal{E}^+ = suunnansäilyttävät isometriat,
- \mathcal{E}^- = suunnankääntävät isometriat.

Jos isometria α säilyttää suunnan ja β kääntää suunnan, niin niiden yhdiste $\beta\alpha$ kääntää suunnan. Suunnan säilyvyys ja kääntävyys käyttäytyvät kuten +1 ja -1 kertomisen suhteen.

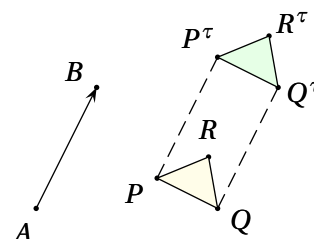
·	+1	-1
+1	+1	-1
-1	-1	+1

Isometrioiden tyypit

Translaatio (eli yhdensuuntaissiirto): Suunnattu jana \overline{AB} määrittää translaation $\tau = \tau_{AB}$, joka siirtää pisteen janan \overline{AB} suuntaisesti sen pituuden verran:

$$PP^\tau = AB \quad \text{ja} \quad \ell(P, P^\tau) \parallel \ell(A, B).$$

Translaation τ **pituus** on AB ja sen **suunta** $\overline{\tau}$ on janan \overline{AB} suunta.



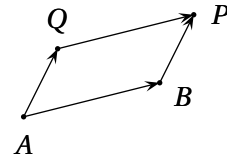
Todetaan, että $\diamond PQQ^\tau P^\tau$ on suunnikas, joten $PQ = P^\tau Q^\tau$, ja siis τ on isometria.

Identiteettikuvaus on erikoistapaus translaatiosta.

Lause 4.7. Jokainen translaatio on suunnansäilyttävä isometria, jolla ei ole kiintopisteitä. Lisäksi translaation $\tau = \tau_{AB}$ käänteiskuvaus on translaatio $\tau^{-1} = \tau_{BA}$.

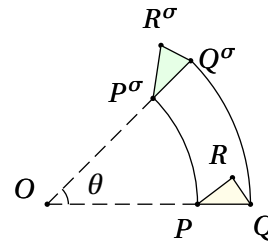
Lause 4.8. Translaatiot ovat suljettuja yhdistämiseen ja ne kommutoivat, $\tau_2\tau_1 = \tau_1\tau_2$. Erityisesti tason translaatiot muodostavat Abelin ryhmän.

Todistus. Olkoot $\tau_1 = \tau_{AB}$ ja $\tau_2 = \tau_{BP}$. Jos $B \in \ell(A, P)$, niin yhdiste on translaatio τ_{AP} , ja kommutaatio on selvää. (Jos $A = P$, on yhdiste identiteettikuvaus.) Muutoin $\diamond ABPQ$ on suunnikas, kun $\tau_2(A) = Q$, ja siten $\tau_1(Q) = P$. Niinpä $\tau_2\tau_1 = \tau_1\tau_2$, ja yhdiste on τ_{AP} . \square



Rotaatio (eli **kierto**): Piste O ja kulma θ määräävät rotaation $\sigma = \sigma_{(O,\theta)}$, joka kiertää pisteen O -keskisen ympyrän kehää kulman θ verran. Tässä θ on kuvauksen σ **rotaatiokulma**, ja O on sen **keskus**:

$$OP = OP^\sigma \quad \text{ja} \quad \angle POP^\sigma = \theta.$$



Yhtenevyyskriteerien avulla voidaan helposti osoittaa, että rotaatio on isometria. Myös identiteettikuvaus voidaan ajatella rotaationa, jonka kulma on 0° .

Lause 4.9. Jokainen rotaatio on suunnansäilyttävä isometria, jolla on yksi kiintopiste (kun rotaatiokulma $\neq 0^\circ$). Lisäksi rotaation $\sigma = \sigma_{(O,\theta)}$ käänteiskuvaus on rotaatio $\sigma^{-1} = \sigma_{(O,-\theta)}$.

Jos $\theta = 180^\circ$, on rotaatio **puolikierto** (peilaus pisteen O suhteen), ja tällöin merkitään

$$\delta_O = \sigma_{(O,180^\circ)}.$$

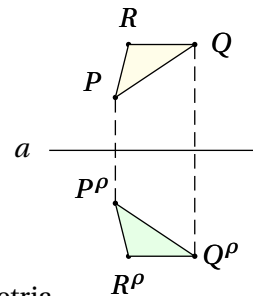
Esimerkki 4.3 Kaksi pelaajaa laittaa vuorotellen kymmensenttisen suorakulmaiselle pöydälle niin, että kolikot eivät mene edes osittain päällekkäin. Pelin voittaa se, joka kykenee laittamaan viimeisen kolikon. Tällöin pelin aloittajalla on voittostrategia. Nimittäin, ensimmäinen pelaaja laittaa ensin kolikon pöydän keskelle (keskipiste O), ja sitten hän laittaa aina kolikon asemaan $\delta_O(P)$, jos toinen pelaaja asetti kolikon pisteeseen P . \square

Peilaus (eli **reflektio**): Suora a määrää peilauksen $\rho = \rho_a$, joka kuvaa pisteen suoran a toiselle puolelle sen normaalille ja yhtä etäälle siitä: kun $X = a \cap \ell(P, P^\rho)$,

$$\ell(P, P^\rho) \perp a \quad \text{ja} \quad PX = XP^\rho.$$

Suora a on peilauksen **akseli**.

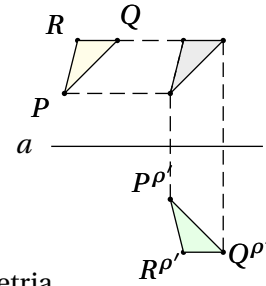
Yhtenevyyskriteerien avulla voidaan osoittaa, että peilaus on isometria.



Lause 4.10. Jokainen peilaus on suunnankääntävä isometria, jonka kiintopisteet ovat sen akselin pisteet. Lisäksi peilauksen käänteiskuvaus on se itse: $\rho^{-1} = \rho$.

Siirtopeilaus: Olkoon τ translaatio ja $\rho = \rho_a$ peilaus suoran a suhteen, missä $a \parallel \vec{\tau}$. Tällöin yhdiste $\rho' = \rho\tau$ on siirtopeilaus, jonka **suunta** on $\vec{\tau}$ ja **pituus** translaation τ pituus. Todetaan, että siirtopeilaukselle

$$\rho' = \rho_a\tau = \tau\rho_a.$$



Koska siirtopeilaus on kahden isometrian yhdiste, on se aina isometria.

Lause 4.11. Jokainen siirtopeilaus on suunnankääntävä isometria, jolla ei ole kiintopisteitä. Lisäksi siirtopeilauksen $\rho' = \rho_a\tau$ käänteiskuvaus on siirtopeilaus $(\rho')^{-1} = \rho_a\tau^{-1}$.

Peilaus voidaan ajatella siirtopeilauksena, jossa translaatio on identiteettikuvaus.

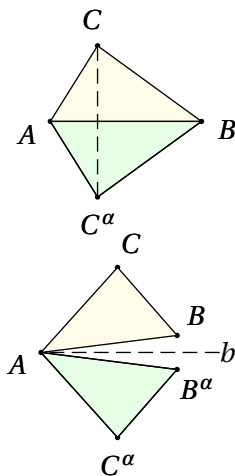
Luonnehdinta

Lause 4.12. (1) Jokainen isometria α voidaan esittää korkeintaan kolmen peilauksen yhdisteenä.
 (2) Jokainen isometria on joko suunnansäilyttävä tai suunnankääntävä.
 (3) Lisäksi, jos isometrialla α on kiintopiste, on se korkeintaan kahden peilauksen yhdiste.

Todistus. Olkoon $\Delta = \triangle ABC$ kiinnitetty kolmio, ja $\triangle A^\alpha B^\alpha C^\alpha \cong \Delta$ sen kuva. Jaetaan tarkastelu neljään kohtaan.

(a) Jos $A = A^\alpha, B = B^\alpha, C = C^\alpha$, niin $\alpha = \iota$, sillä kolme pistettä määräävät isometrian (lause 4.6).

(b) Jos $A = A^\alpha, B = B^\alpha, C \neq C^\alpha$, niin lauseen 4.6 mukaan α on peilaus: $\alpha = \rho_a$, missä $a = \ell(A, B)$.



(c) Jos $A = A^\alpha, B \neq B^\alpha, C \neq C^\alpha$, niin olkoon b janan BB^α keskinormaali. Koskapa nyt $AB = AB^\alpha$, on $A \in b$. Isometria $\beta = \rho_b\alpha$ toteuttaa ehdot $A = A^\beta$ ja $B = B^\beta$, joten kohtien (a) ja (b) mukaan β on peilaus tai ι . Koska $\alpha = \rho_b^{-1}\beta = \rho_b\beta$, on α korkeintaan kahden peilauksen yhdiste.

(d) Jos $A \neq A^\alpha, B \neq B^\alpha, C \neq C^\alpha$, niin olkoon c janan AA^α keskinormaali ja $\gamma = \rho_c\alpha$. Tällöin $A = A^\gamma$, ja siten kohtien (a), (b) ja (c) mukaan γ on korkeintaan kahden peilauksen yhdiste. Koska $\alpha = \rho_c\gamma$, on α korkeintaan kolmen peilauksen yhdiste.

Todetaan vielä lopuksi, että α säilyttää suunnan, jos se on identiteettikuvaus tai kahden peilauksen yhdiste. Muutoin se on yhden tai kolmen peilauksen yhdisteenä suunnankääntävä. \square

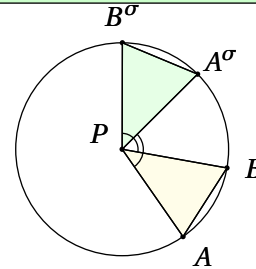
Myös kiintopisteiden $P^\alpha = P$ lukumäärä vaikuttaa isometrian luonteeseen. Translaatiolla $\tau \neq \iota$ ja siirtopeilauksella ei ole kiintopisteitä, rotaatiolla $\sigma \neq \iota$ on tarkalleen yksi kiintopiste (sen keskus) ja peilauksella niitä on äärettömän monta (kaikki sen akselin pisteet).

Lause 4.13. *Olkoon α isometria, jolla on ainakin yksi kiintopiste. Tällöin*

- (1) *α on rotaatio, jos se säilyttää suunnan.*
- (2) *α on peilaus, jos se kääntää suunnan.*

Todistus. Olkoon $P^\alpha = P$.

Oletetaan ensin että α säilyttää suunnan, ja katsotaan miten se kuvaa kolmion $\triangle PAB$, missä $PA = PB$. Tällöin pisteet A, A^α, B, B^α ovat ympyrän $\omega(P, PA)$ kehällä. Nyt α kuvaa kolmion kärkipisteet samoin kuin rotaatio $\sigma_{(P, \theta)}$, missä $\theta = \angle APA^\alpha$. Kolmen pisteen säännön mukaan α on rotaatio.



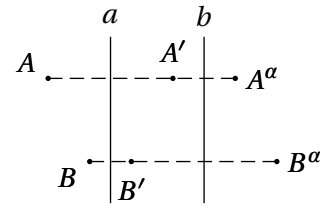
Jos taas α kääntää suunnan, on se lauseen 4.12(3) mukaan peilaus, koska kahden peilauksen yhdiste aina säilyttää suunnan. □

Lause 4.14. *Olkoon α isometria, joka ei kiinnitä yhtään pistettä. Tällöin*

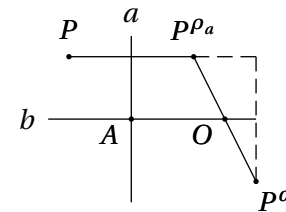
- (1) *α on translaatio, jos se säilyttää suunnan.*
- (2) *α on siirtopeilaus, jos se kääntää suunnan.*

Todistus. Oletetaan ensin, että α säilyttää suunnan.

Lauseen 4.12 mukaan α on kahden peilauksen yhdiste, $\alpha = \rho_b \rho_a$. Nyt $a \parallel b$, sillä jos $P = a \cap b$, olisi se kiintopiste, $P = P^\alpha$, vastoin oletusta. Tällöin (kuten kuvassa) lauseesta 4.6 seuraa, että $\alpha = \tau$, missä $\tau \perp a$ ja sen pituus on kaksi kertaa suorien a ja b välinen etäisyys.



Oletetaan sitten, että α kääntää suunnan. Olkoon X jokin piste, ja O janan XX^α keskipiste. Tarkastellaan suunnankääntävää isometriaa $\beta = \delta_O \alpha$, missä δ_O on puolikierto. Koska nyt $X^\beta = X$, on $\beta = \rho_a$ peilaus lauseen 4.13 mukaan (jonkin suoran a suhteen), ja siten $\alpha = \delta_O \rho_a$. Todetaan, että $\alpha = \rho_b \tau$ on siirtopeilaus, missä $b \perp a$, $O \in b$ ja $\tau = 2 \cdot AO$ (kun $A = a \cap b$). □



Erityisesti seuraava luokittelu on osoitettu:

Lause 4.15. *Isometria on*

- (1) *translaatio, jos se säilyttää suunnan ja sillä ei ole kiintopisteitä,*
- (2) *rotaatio, jos se säilyttää suunnan ja sillä on kiintopiste,*
- (3) *peilaus, jos se kääntää suunnan ja sillä on kiintopiste,*
- (4) *siirtopeilaus, jos se kääntää suunnan ja sillä ei ole kiintopistettä.*

ss \ kp	on	ei
+	rotaatio	translaatio
-	peilaus	siirtopeilaus

Lause 4.16. Olkoot $\Delta = \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' = \Delta'$ yhtenevät kolmiot. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen isometria α , jolle $\Delta' = \Delta^\alpha$.

Todistus. Jos $\Delta = \Delta'$, on identiteettikuvaus kysytty isometria. Olkoon $\sigma = \sigma_{(A,\theta)}$ rotaatio, jolla $\ell(A^\sigma, B^\sigma) \parallel \ell(A', B')$ ja olkoon τ translaatio, jolle $A' = A^\tau$. Tällöin $\tau\sigma(AB) = A'B'$. Jos myös $\tau\sigma(C) = C'$, on $\alpha = \tau\sigma$, muutoin $\alpha = \rho_a\tau\sigma$, missä $a = \ell(A', B')$. Yksikäsitteisyys seuraa kolmen pisteen säännöstä. \square

Esimerkki 4.4 Seuraava **Thomsenin kaava** yhdistää kolme peilausta yhteen kaavaan

$$\rho_a\rho_b\rho_c\rho_a\rho_b\rho_c\rho_b\rho_c\rho_a\rho_b\rho_c\rho_a\rho_b\rho_c\rho_a\rho_b\rho_c\rho_b\rho_c\rho_a\rho_b\rho_c\rho_b\rho_c\rho_a\rho_b\rho_c\rho_b\rho_c\rho_a\rho_b\rho_c\rho_b = \iota.$$

Tämä seuraa siitä, että translaatiot kommutoivat:

$$(\rho_a\rho_b\rho_c)^2(\rho_b\rho_c\rho_a)^2 = (\rho_b\rho_c\rho_a)^2(\rho_a\rho_b\rho_c)^2,$$

mistä väite saadaan laskemalla. \square

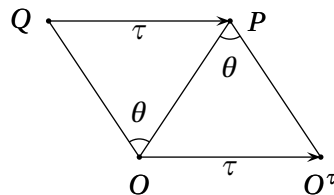
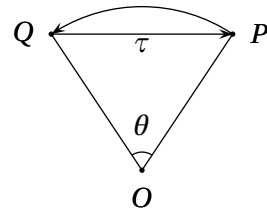
Lause 4.17. (1) Olkoot $\sigma = \sigma_{(O,\theta)}$ rotaatio ja $\tau = \tau_{AB}$ translaatio. Tällöin $\tau\sigma$ on rotaatio, jonka rotaatiokulma on θ .

(2) Jos kahdella rotaatiolla $\sigma_1 = \sigma_{(O,\theta_1)}$ ja $\sigma_2 = \sigma_{(O,\theta_2)}$ on yhteinen keskus O , on $\sigma_2\sigma_1$ rotaatio $\sigma_{(O,\theta_1+\theta_2)}$.

(3) Kahden rotaation $\sigma_1 = \sigma_{(O_1,\theta_1)}$ ja $\sigma_2 = \sigma_{(O_2,\theta_2)}$ yhdiste on rotaatio, jonka rotaatiokulma on $\theta_1 + \theta_2$, jos summa ei ole 360° . Muutoin yhdiste on translaatio.

Todistus. (1) Aukaistaan θ -kulma niin, että $QP \parallel AB$ ja $QP = AB$

kuvan mukaisesti: kulman $\angle O$ puolittaja on suoran $\ell(A, B)$ normaali. Tällöin $Q = P^\sigma$ ja siten $P = P^\alpha$ on isometrian α kiintopiste. Niinpä α on suunnansäilyttävänä rotaatio, ja sen kulma on θ kuten nähdään suunnikkaasta $\diamond OO^\tau PQ$, missä $O^\tau = O^\alpha$. Näin väite (1) on todistettu.



(2) Helppo harjoitus.

(3) Olkoon τ translaatio, jolla $\tau(\sigma_2(O_1)) = O_1$, missä siis $\sigma = \tau\sigma_2$ on väitteen (1) mukaan rotaatio, jonka rotaatiokulma on θ_2 . Rotaatioilla σ_1 ja σ on sama keskus O_1 (joka on kiintopiste), ja siis $\hat{\sigma} = \sigma\sigma_1$ on rotaatio, jonka rotaatiokulma on $\theta_1 + \theta_2$. Vielä $\tau^{-1}\hat{\sigma}$ on väitteen (1) mukaan rotaatio, jonka kulma on $\theta_1 + \theta_2$. Väite seuraa, sillä

$$\sigma_2\sigma_1 = \tau^{-1}\tau\sigma_2\sigma_1 = \tau^{-1}\sigma\sigma_1 = \tau^{-1}\hat{\sigma}.$$

\square

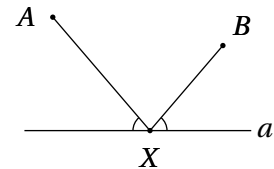
4.3 Sovellutuksia

Heron–Fermat ongelma

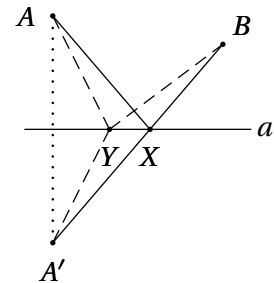
Olkoon $P_1P_2\dots P_n$ reitti eli murtoviiva, jonka pituus on

$$P_1P_2\dots P_n = \sum_{i=1}^{n-1} P_iP_{i+1}.$$

Lause 4.18 (Heron). *Olkoot pisteet A ja B samalla puolen suoraa a , ja olkoon AXB lyhin reitti pisteestä A pisteeseen B , missä $X \in a$. Tällöin suorat $\ell(A, X)$ ja $\ell(B, X)$ muodostavat yhtä suuret kulmat suoran a suhteen.*



Todistus. Olkoon $A' = \rho_a(A)$ ja merkitään $X = a \cap \ell(A', B)$. Kun $P = a \cap \ell(A, A')$, niin $\triangle APX \cong \triangle A'PX$. Ristikulmista päätellään, että suorat $\ell(A, X)$ ja $\ell(B, X)$ muodostavat yhtä suuret kulmat suoran a suhteen.



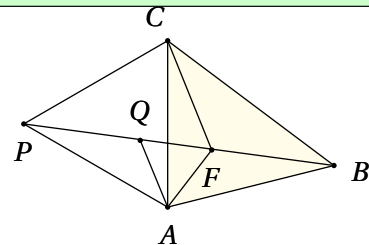
Todetaan vielä, että AXB on haluttu reitti. Olkoon $Y \in a$ jokin piste. Nyt $AY = A'Y$, ja siten $AYB = A'YB = A'Y + YB \geq A'B = A'XB = AXB$ kolmioepäyhtälöä käyttäen. □

Seuraavan lauseen piste F on **Fermat'n piste**, jota kutsutaan myös **Steinerin pisteeksi**.¹

Lause 4.19 (Fermat–Torricelli). *Olkoot kolmion $\triangle ABC$ kulmat korkeintaan 120° . Tällöin sisäpiste F , jolle $AF + BF + CF$ on mahdollisimman pieni, on piste josta kukin sivu näkyy kulmassa 120° .*

Todistus. Olkoon $\sigma = \sigma_{(A, 60^\circ)}$, ja $P = C^\sigma$, jolloinka

$\triangle ACP$ on tasasivuinen. Olkoon F kolmion jokin sisäpiste, ja $Q = F^\sigma$. Todetaan ensin, että jos piste F näkee sivut kulmassa 120° , niin F ja Q kuuluvat suoralle $\ell(B, P)$.

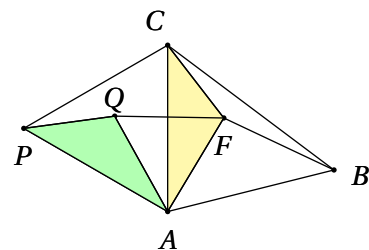


Yleisesti on $\triangle APQ \cong \triangle ACF$. Eritoten siis $QP = FC$. Tasasivuisuuksista saadaan

$$AF + BF + CF = FQ + BF + QP = BFQP,$$

missä oikea puoli on pienin, kun B, F, Q, P ovat kollineariset (kolmioepäyhtälö), jolloin $\angle AFB = 180^\circ - \angle QFA = 120^\circ$, $\angle CFA = \angle PQA = 180^\circ - \angle AQP = 120^\circ$ ja $\angle BFC = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$.

Näin ollen vaadittu F on piste, josta kukin sivu näkyy kulmassa 120° . □



¹ Fermat (1601 – 1665); konstruktio: Torricelli 1640. Täydellinen todistus: Heinen 1834

Geometriset käsitteet

Seuraava lause on hyödyllinen apuväline operoitaessa isometrioilla.

Lause 4.20. *Olkoot $\alpha \in \mathcal{E}$ ja a suora. Tällöin $\rho_{\alpha(a)}\alpha = \alpha\rho_a$, eli $\rho_{\alpha(a)} = \alpha\rho_a\alpha^{-1}$.*

Todistus. Ensinnäkin jokainen isometria on affiini, joten $a^\alpha (= \alpha(a))$ on suora. Olkoon $P \in a^\alpha$, eli $P = \alpha(Q)$ jollain $Q \in a$. Erityisesti $Q = \rho_a(Q)$, ja siten

$$\alpha\rho_a\alpha^{-1}(P) = \alpha\rho_a(Q) = \alpha(Q) = P.$$

Siis $\alpha\rho_a\alpha^{-1}$ kiinnittää suoran a^α pisteittäin, ja se kääntää suunnan, koska ρ kääntää suunnan ja α^{-1} ja α yhdessä toimivat suunnansäilyttävänä: $(\pm 1) \cdot (-1) \cdot (\pm 1) = -1$. Näin ollen $\alpha\rho_a\alpha^{-1}$ on peilaus suoran a^α suhteen. \square

Esimerkki 4.5 Monet geometriset peruskäsitteitä voidaan esittää helposti isometrioiden avulla. Osoitetaan, että jos a ja b ovat eri suoria, niin

$$a \perp b \iff \rho_a\rho_b = \rho_b\rho_a.$$

Tämä todetaan seuraavasti:

$$a \perp b \iff \rho_b(a) = a \iff \rho_{\rho_b(a)} = \rho_a \iff \rho_b\rho_a\rho_b = \rho_a \iff \rho_a\rho_b = \rho_b\rho_a,$$

missä viimeistä edeltävä yhtäpitävyys on lauseen 4.20 sovelletus tapaukseen $\alpha = \rho_b$, ja viimeinen yhtäpitävyys seuraa siitä että peilauksille on aina $\rho^{-1} = \rho$. \square

Lause 4.21. *Eri suorat a, b, c ovat konkurrentit tai yhdensuuntaiset jos ja vain jos tulo $\alpha = \rho_c\rho_b\rho_a$ on peilaus.*

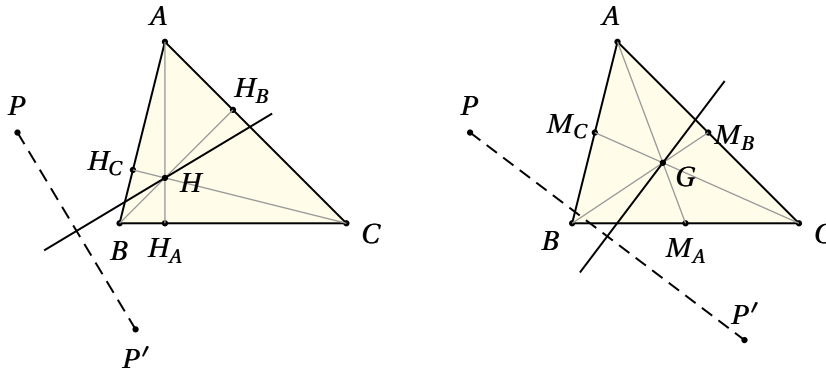
Todistus. Isometria $\alpha = \rho_c\rho_b\rho_a$ kääntää suunnan, joten se on joko peilaus tai siirtopeilaus. Mikäli suorat a, b ja c leikkaavat pisteessä P , on P kuvauksen α kiintopiste, ja siten α on peilaus. Samoin jos suorat a, b ja c ovat yhdensuuntaiset, on α peilaus, sillä se kiinnittää kaikki suorat (ei kylläkään pisteittäin), jotka ovat kohtisuorassa suoran a kanssa, mutta siirtopeilaus kiinnittää vain yhden suoran, akselinsa, kuten helposti voidaan todeta.

Toisinpäin, oletetaan, että $\alpha = \rho_\ell$ on peilaus. Todetaan ensin, että jos $\ell = c$, niin $\rho_c\rho_b\rho_a = \rho_c$, ja tässä tapauksessa $a = b$, ja väite on selviö. Oletetaan sitten, että $\ell \neq c$. Jos $P = a \cap b$, niin $\rho_b\rho_a(P) = P$, ja siten $\rho_\ell(P) = \rho_c(P)$, mistä seuraa $P = \ell \cap c$, sillä muutoin $\ell = c$ janan $PP\rho_c$ keskinormaaleina. Siten a, b ja c ovat konkurrentit. Aivan samoin, ehdosta $b \cap c \neq \emptyset$ seuraa, että a, b ja c ovat konkurrentit. Muussa tapauksessa täytyy olla $a \parallel b \parallel c$. \square

Esimerkki 4.6 Osoitetaan uudelleen, että kolmion $\triangle ABC$ sivujen keskinormaalit a, b, c ovat konkurrentit. Tässä $M_A \in a, M_B \in b$ ja $M_C \in C$. Yhdiste $\alpha = \rho_c\rho_b\rho_a$ on suunnankääntävä ja sillä on kiintopiste B . Siten α on peilaus, ja lauseen 4.21 mukaan a, b, c ovat konkurrentit. \square

Esimerkki 4.7 Osoitetaan uudelleen, että kolmion $\triangle ABC$ kulmanpuolittajat p_A, p_B, p_C ovat konkurrentit. Merkitään lyhyesti $p = p_B$ ja $q = p_C$, ja olkoon d sivun $\ell(B, C)$ normaali, jolle $I = p \cap q$ kuuluu. Tällöin p, d, q ovat konkurrentit, ja lauseen 4.21 mukaan $\alpha = \rho_q\rho_d\rho_p$ on peilaus, jonka akselille I kuuluu. Toisaalta $\alpha(\ell(A, B)) = \ell(A, C)$, joten peilauksen α akseli on $\ell(A, I)$, ja silloin $\ell(A, I)$ on kulmanpuolittaja. \square

Esimerkki 4.8 Myös yhdisteet $\rho_{h_c}\rho_{h_b}\rho_{h_a}$ ja $\rho_{m_c}\rho_{m_b}\rho_{m_a}$ kolmion korkeussuorien ja mediaanien suhteen ovat peilauksia. Niiden peilausakselit kulkevat suorien yhteisen pisteen H ja G kautta. \square



Fagnanon ongelma

Seuraavissa todistuksissa $a = \ell(B, C)$, $b = \ell(A, C)$ ja $c = \ell(A, B)$ ovat kolmion $\Delta = \Delta ABC$ sivusuorat. Lauseen 4.21 mukaan isometria $\rho_c \rho_b \rho_a$ on siirtopeilaus.

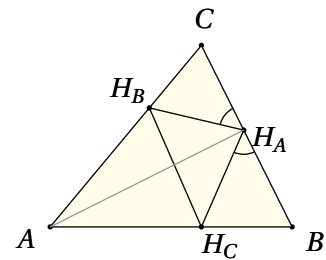
Lause 4.22 (Fagnano 1775). *Olkoon Δ teräväkulmainen kolmio. Tällöin sen sivusuorien suhteen otettujen peilausten tulo $\alpha = \rho_c \rho_b \rho_a$ on siirtopeilaus, jonka akselina on ortokolmion Δ_O sivu ja jonka pituus on kolmion Δ_O piirin pituus.*

Todistus. Olkoot $s_1 = \ell(H_A, H_C)$, $s_2 = \ell(H_A, H_B)$ ja $s_3 = \ell(H_B, H_C)$ ortokolmion Δ_O sivusuorat. Etsitään siirtopeilauksen $\rho_c \rho_b \rho_a$ akseli.

Esimerkin 3.3 mukaan kolmion Δ korkeusjanat ovat ortokolmion Δ_O kulmien puolittajat, mistä seuraa että $\angle H_C H_A B = \angle C H_A H_B$, $\angle H_A H_B C = \angle A H_B H_C$ ja $\angle H_B H_C A = \angle B H_C H_A$, jolloin

$$\alpha(s_1) = \rho_c \rho_b \rho_a(s_1) = \rho_c \rho_b(s_2) = \rho_c(s_3) = s_1$$

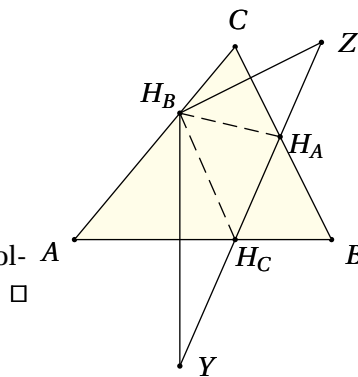
ja siten sivusuora s_1 on siirtopeilauksen akseli.



Pituutta koskeva väite päätellään kuten kuvassa: Olkoon $Z = \rho_a(H_B)$. Toisin sanoen, $H_B = \rho_a(Z)$, jolloin

$$\alpha(Z) = \rho_c \rho_b(H_B) = \rho_c(H_B) = Y,$$

missä pisteet Z ja Y ovat akselilla s_1 . Janan ZY pituus on ortokolmion piirin pituus. □



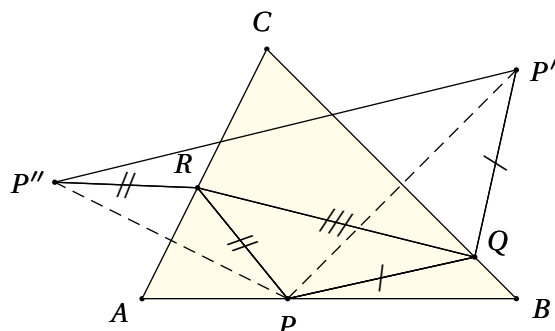
Kolmio ΔDEF on kolmion ΔABC **sisäkolmio**, jos sen kärjet ovat kolmion ΔABC eri sivuilla.

Lause 4.23. *Olkoon $\Delta = \Delta ABC$ teräväkulmainen kolmio. Ortokolmiolla Δ_O on pienin piiri kolmion Δ sisäkolmioista.*

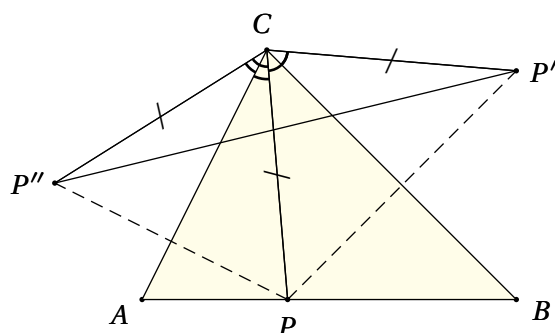
Todistus. Olkoot $a = \ell(B, C)$ ja $b = \ell(A, C)$. Ajatellaan ensin, että piste $P \in AB$ on kiinnitetty sivulta AB . Olkoon ΔPQR kolmion Δ sisäkolmio, missä $Q \in AC$ ja $R \in BC$. Merkitään

$$P' = P^{\rho_a} \quad \text{ja} \quad P'' = P^{\rho_b}.$$

Tällöin $PQ = QP'$ ja $RP = RP''$, joten sisäkolmion piirin pituus on reitin $P'QRP''$ pituus. Näin ollen tämä pituus on pienin kun $Q = \ell(P', P'') \cap BC$ ja $R = \ell(P', P'') \cap AC$, jolloin reitin pituus on janan $P'P''$ pituus.



Etsitään sitten pisteen P paras paikka sivulla AB . Koska peilaukset ρ_a ja ρ_b kiinnittävät pisteen C , niin $CP' = CP = CP''$, ja siten CA puolittaa kulman $\angle P''CP$ ja CB puolittaa kulman $\angle PCP'$. Siis $\angle P''CP' = 2 \cdot \angle C$ on pisteestä P riippumaton vakio.



Nyt janan $P'P''$ pituus on pienimmillään kun $CP' = CP''$ on pienin, eli kun CP on pienin. Tämä tapahtuu kun CP on normaali, eli kun $P = H_C$. Samoin täytyy olla, että sisäkolmion muutkin kärjet ovat korkeusjanojen kantapisteet. \square

5 Yleisemmät kuvaukset

5.1 Similaarisuus

Sanotaan, että transformaatio α on **similaarikuvaus** (eli **yhdenmuotoisuuskuvaus**), jos on olemassa **laajennusvakio** c niin, että $P^\alpha Q^\alpha = c \cdot PQ$ kaikilla P, Q .

Lause 5.1. *Similaarikuvaus α on affiini ja kuvaa janan janaksi: $\alpha(PQ) = P^\alpha Q^\alpha$.*

Todistus. Väite seuraa jälleen kolmioepäyhtälön avulla. \square

Lause 5.2. *Transformaatio α on similaarikuvaus jos ja vain jos se kuvaa jokaisen kolmion Δ yhdenmuotoiseksi kolmioksi: $\Delta^\alpha \sim \Delta$. Lisäksi jokaisen similaarikuvauksen käänteiskuvaus on similaarikuvaus.*

Todistus. Jos α on similaarikuvaus, niin aina $\Delta \sim \Delta^\alpha$ verrannollisuuskriteerin (SSS \sim) nojalla.

Toisaalta, oletetaan että α on kuvaus, joka kuvaa jokaisen kolmion yhdenmuotoiseksi kolmioksi. Olkoot AB ja PQ kaksi janaa, missä voidaan olettaa, että $P, Q \notin \ell(A, B)$ ja $A, B \notin \ell(P, Q)$. Ehdosta $\triangle ABP \sim \triangle A^\alpha B^\alpha P^\alpha$ ja $\triangle BPQ \sim \triangle B^\alpha P^\alpha Q^\alpha$ saadaan

$$\frac{A^\alpha B^\alpha}{AB} = \frac{B^\alpha P^\alpha}{BP} \quad \text{ja} \quad \frac{B^\alpha P^\alpha}{BP} = \frac{P^\alpha Q^\alpha}{PQ} \quad \text{ja siten} \quad \frac{A^\alpha B^\alpha}{AB} = \frac{P^\alpha Q^\alpha}{PQ},$$

ja siten α on similaarikuvaus, jonka laajennusvakio on kyseinen suhde.

Olkoon α similaarikuvaus, jonka laajennusvakio on c . Tällöin sen käänteiskuvaus α^{-1} on bijektio, ja se on similaarikuvaus, jonka laajennusvakio on $1/c$. \square

Kaksi tason kuviota F_1 ja F_2 ovat **similaareja** (eli **yhdenmuotoisia**), jos on olemassa similaarikuvaus α , jolla $\alpha(F_1) = F_2$. Similaarisuus siis yleistää monikulmioita koskevan yhdenmuotoisuuden kaikille tasokuvioille.

Lause 5.3 (Kolmen pisteen sääntö). *Kolme epäkollineaarista pistettä määräävät similaarikuvauksen.*

Todistus. Todistus on samanlainen kuin isometrioille, ja se jää harjoitukseksi. \square

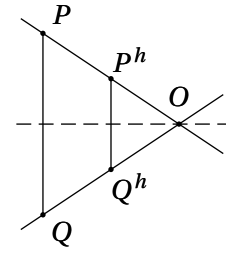
Homotetiat

Jotta myös yhdenmuotoisuus saataisiin esitettyä konkreettisten transformaatioiden avulla, tarvitaan uudenlainen kuvaus, joka pystyy muuttamaan janojen pituuksia. Tällainen kuvaus on homotetia, joka on puolikierron yleistys.

Piste O ja reaalivakio $\mu \neq 0$ määräävät **homotetian** O_μ , joka kuvaa pisteen A pisteeksi $B \in \ell(O, A)$ niin, että $OB = \mu \cdot OA$. Tässä, jos $\mu > 0$, niin homotetia kuvaa pisteen A samalle puolelle pistettä O ja jos $\mu < 0$, kuvaa se pisteen A vastakkaiselle puolelle keskus pistettä O .

Esimerkki 5.1 Jos $\mu = 1$, niin $O_\mu = \iota$. Jos taas $\mu = -1$, niin $O_\mu = \delta_O$. \square

Lause 5.4. Homotetia $h = O_\mu$ on suunnansäilyttävä similaarikuvaus, jolla on tarkalleen yksi kiintopiste O , kun $\mu \neq 1$. Lisäksi, h kuvaa aina suoran ℓ yhdensuuntaiseksi suoraksi: $\ell \parallel \ell^h$.



Todistus. Suunnansäilyvyys ja kiintopisteen yksikäsitteisyys ovat selviä. Jälkimmäistä väitettä varten olkoon $\ell = \ell(P, Q)$ suora. Jos $O \in \ell$, niin selvästi $h(\ell) = \ell$. Jos O, P ja Q ovat epäkollineaariset, niin $\triangle OPQ \sim \triangle OP^hQ^h$, koska homotetia säilyttää sivujen pituuksien suhteet. Väite seuraa, kun huomataan, että $P^h \in \ell(O, P)$ ja $Q^h \in \ell(O, Q)$. \square

Homotetiat ovat suunnansäilyttäviä, joten pelkästään niiden avulla ei saada kaikkia yhdenmuotoisuuden säilyttäviä kuvauksia.

Lause 5.5. Jokainen similaarikuvaus α on homotetian h ja isometrian β yhdiste: $\alpha = \beta h$.

Todistus. Olkoon α similaarikuvaus, jonka laajennusvakio on μ , ja olkoon $\Delta = \triangle ABC$ kolmio. Tällöin kun $h = A_\mu$, on $\Delta^\alpha \cong \Delta^h$ (SSS). Lauseen 4.16 mukaan on isometria β , jolle $\Delta^\alpha = \beta(\Delta^h)$, ja siten $\alpha = \beta h$ kolmen pisteen säännön mukaan. \square

Lause 5.6. Jos similaarikuvauksella α ei ole kiintopisteitä, on se isometria.

Todistus. Oletetaan, että similaarikuvaus α ei ole isometria.

Oletetaan ensin, että α kuvaa suorat yhdensuuntaisiksi suoriksi, ja tarkastellaan jotain janaa AB ja sen kuvaa $A^\alpha B^\alpha$, joka on oletuksen mukaan eri pituinen kuin AB . Tällöin suorat $\ell(A, A^\alpha)$ ja $\ell(B, B^\alpha)$ leikkaavat toisensa, sanokaamme pisteessä P . Oletuksen mukaan $\ell(P^\alpha, A^\alpha) \parallel \ell(P, A)$, joten $\ell(P^\alpha, A^\alpha) = \ell(P, A)$, koska niillä on yhteinen piste A^α . Samoin $\ell(P^\alpha, B^\alpha) = \ell(P, B)$, ja siten $P = P^\alpha$.

Olkoon sitten $\ell \not\parallel \ell^\alpha$ jollekin suoralle ℓ , sanokaamme $P = \ell \cap \ell^\alpha$. Oletetaan, että $P^\alpha \neq P$. Olkoon a suora, jolle $a \parallel \ell$ ja $P^\alpha \in a$. Siis $\ell^\alpha \cap a = P^\alpha$. Nyt $a^\alpha \parallel \ell^\alpha$ lauseen 4.2 mukaisesti. Merkitään $Q = a \cap a^\alpha$. Tässä PQ ja $P^\alpha Q^\alpha$ eivät ole yhdensuuntaiset, sillä muutoin α olisi isometria. Olkoon $X = PQ \cap P^\alpha Q^\alpha$, jolloin

$$\frac{P^\alpha X^\alpha}{X^\alpha Q^\alpha} = \frac{PX}{XQ} = \frac{P^\alpha X}{XQ^\alpha},$$

sillä $\triangle PP^\alpha X \sim \triangle QQ^\alpha X$. Päätellään tästä, että $X = X^\alpha$. \square

Oheinen Eulerin lause seuraa edellisestä, koska on aina similaarikuvaus, joka kuvaa annetun janan toiseksi annetuksi janaksi

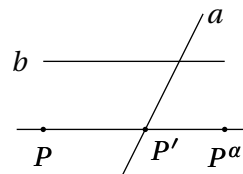
Lause 5.7 (Euler). Olkoot AB ja PQ kaksi janaa, jotka eivät ole samalla suoralla. On olemassa piste X niin, että kolmiot $\triangle ABX$ ja $\triangle PQX$ ovat yhdenmuotoiset.

5.2 Affiinit kuvaukset

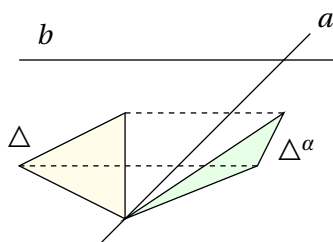
Isometriat ja homotetiat ovat affiineja, ja niin muodoin myös similaarikuvaukset, mutta yleisesti affiinius ei säilytä yhdenmuotoisuutta.

Esimerkki 5.2 Olkoot a ja b kaksi suoraa, $a \nparallel b$ ja $\mu \neq 0$ vakio.

Kun P on piste, piirretään $\ell(P, P') \parallel b$, missä $P' \in a$ kuten kuvassa. Olkoon $P^\alpha \in \ell(P', P)$ niin että $P^\alpha P' = \mu \cdot P P'$. (Erityisesti, jos $P \in a$, niin $P^\alpha = P$). Tällöin α on affiini kuvaus, **vinodilaatio** (eli **perspektiivinen affinikuvaus**) suoralle a suoran b suuntaisesti.



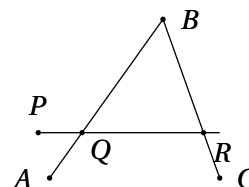
□



Lause 5.8. Affiini kuvaus α kuvaa epäkollineaariset pisteet epäkollineaarisiksi.

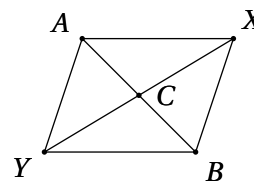
Todistus. Tehdään vastaoletus, että pisteet $\triangle ABC$ on kolmio, mutta $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha \in \ell$. Olkoon P piste niin, että $P^\alpha \notin \ell$.

Olkoon $a = \ell(P, Q, R) \neq \ell(P, A)$ kuten kuvassa. Tällöin $Q^\alpha \in \ell(A^\alpha, B^\alpha) = \ell$ ja $R^\alpha \in \ell(B^\alpha, C^\alpha) = \ell$, ja siten $Q^\alpha, R^\alpha \in \ell$. Näin muodoin $a^\alpha = \ell(Q^\alpha, R^\alpha) = \ell$, ja erityisesti $P^\alpha \in \ell$, mikä on vastoin pisteen P valintaa. □



Lause 5.9. Olkoon α affiini kuvaus ja C janan AB keskipiste. Tällöin C^α on janan $A^\alpha B^\alpha$ keskipiste.

Todistus. Muodostetaan suunnikas $\diamond AYBX$, jolloin lävistäjien leikkauspiste (puolituspiste) on C . Lauseen 4.2 mukaan myös $\Sigma' = \diamond A^\alpha Y^\alpha B^\alpha X^\alpha$ on suunnikas. Koska $C = \ell(A, B) \cap \ell(X, Y)$, niin $C^\alpha = \ell(A^\alpha, B^\alpha) \cap \ell(X^\alpha, Y^\alpha)$, ja siten C^α suunnikkaan Σ' lävistäjien leikkauspisteinä puolittaa janan $A^\alpha B^\alpha$. □



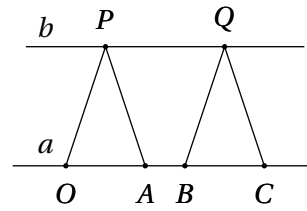
Lause 5.10. Jos tason affiini kuvaus α kiinnittää suoran a kaksi pistettä, niin se kiinnittää suoran a pisteittäin.

Todistus. Olkoon α affiini kuvaus, joka kiinnittää (suunnatun) suoran a , eli $a^\alpha = a$, ja kaksi sen pistettä $O, I \in a$, eli $O^\alpha = O$ ja $I^\alpha = I$. Nyt suora a voidaan ajatella reaaliakselina, jonka origona on O ja jonka yksikköjana OI on, eli jokainen piste $X \in a$ ajatellaan reaalinumero OX . Olkoot A ja B suoralla a .

Kahden pisteen A ja B **summa** $C = A + B$ määrätään geometrisesti kuten kuvassa, missä $a \parallel b$, $\ell(O, P) \parallel \ell(B, Q)$, ja $\ell(A, P) \parallel \ell(C, Q)$. Selvästi, $OA + OB = OC$.

Koska α kuvaa yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisiksi suoriksi, on kaikille $A, B \in a$ voimassa

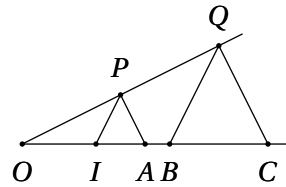
$$A^\alpha + B^\alpha = (A + B)^\alpha. \quad (5.1)$$



Pisteiden A ja B **tulo** $C = A \cdot B$ määrätään oheisesta kuviosta, missä $\ell(P, I) \parallel \ell(Q, B)$ ja $\ell(P, A) \parallel \ell(Q, C)$. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan, että $OC = OA \cdot OB$.

Kuten edellä päätellään, että kaikille $A, B \in a$ on voimassa

$$A^\alpha \cdot B^\alpha = (A \cdot B)^\alpha. \quad (5.2)$$



Yhtälöistä (5.1) ja (5.2) seuraa, että α on reaalikunnan \mathbb{R} automorfismi. Mutta kunnalla \mathbb{R} on vain yksi automorfismi, identiteettikuvaus ι (algebran harjoitus) ja siten $P^\alpha = P$ kaikille $P \in a$. □

Huomaa, että edellä *ei* todistettu että $\alpha = \iota$, vaan vain että α kiinnittää suoran a pisteittäin.

Lause 5.11. *Affiini kuvaus β kuvaa janan janaksi, eli $\beta(PQ) = P^\beta Q^\beta$. Lisäksi kun $R \in PQ$, niin*

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{P^\beta R^\beta}{R^\beta Q^\beta}.$$

Edelleen, kolme epäkollineaarista pistettä määräävät affiinin kuvauksen.

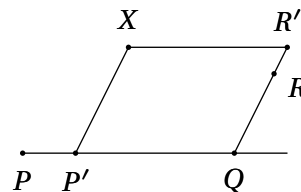
Todistus. Olkoot P, Q kaksi eri pistettä, ja olkoon γ jokin similaarikuvaus, jolle $P^\gamma = P^\beta$ ja $Q^\gamma = Q^\beta$. Tällöin affiini kuvaus $\alpha = \gamma^{-1}\beta$ kiinnittää pisteet P ja Q . Edeltävän lauseen mukaan α kiinnittää suoran $a = \ell(P, Q)$ pisteittäin. Koska γ on similaarikuvaus, niin $\gamma(a) = \ell(P^\beta, Q^\beta)$, ja kun $R \in PQ$, niin

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{P^\gamma R^\gamma}{R^\gamma Q^\gamma}.$$

Nyt $R^\beta = \gamma\alpha(R) = R^\gamma$ ja siten β kuvaa janan PQ janaksi $P^\beta Q^\beta$ suhteet säilyttäen.

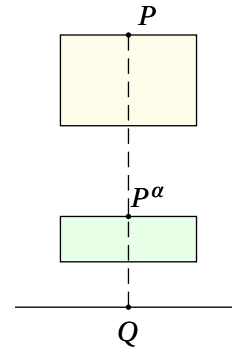
Toisen väitteen osoittamiseksi riittää (taas) osoittaa, että jos affiini β kiinnittää kolmion $\triangle PQR$ kärjet, niin $\beta = \iota$. Olkoon X tason jokin piste.

Lauseen 5.10 mukaan β kiinnittää suorat $\ell(P, Q)$ ja $\ell(Q, R)$ pisteittäin. Piirretään oheinen suunnikas $\diamond = \diamond XR'QP'$, missä $R' \in \ell(Q, R)$. Nyt β kiinnittää pisteet R', Q, P' . Koska affiini β kuvaa yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisiksi, niin kuva $\beta(\diamond)$ on myös suunnikas, ja siten sen neljäs kärki on välttämättä X , joka sekin siis kiinnittyy. □



Esimerkki 5.3 Olkoot $\lambda > 0$ vakio ja ℓ annettu suora. Transformaatio α , joka kuvaa pisteen P suoran ℓ normaalille $\ell(P, Q)$ ($Q \in \ell$) siten, että $P^\alpha Q = \lambda \cdot PQ$, on **litistys (venytys)** suoran ℓ ja vakion λ suhteen.

Litistys on affiini, ja voidaan osoittaa että jokainen affiini kuvaus γ voidaan esittää similaarikuvauksen β ja litistyksen α yhdisteenä:
 $\gamma = \alpha\beta$ □



Edeltävien tulosten mukaan affiinit kuvaukset tuntuvat muistuttavan similaarikuvauksia. Tästä huolimatta yhtäläisyydet ovat melko näennäisiä kuten seuraava lause kertoo.

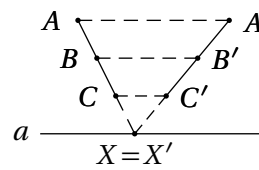
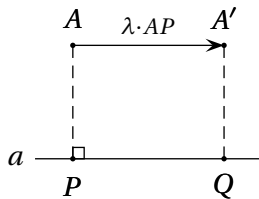
Lause 5.12 (Affiinien kuvausten peruslause). *Annettuna kolmiot Δ ja Δ' , on olemassa affiini kuvaus α , joka kuvaa toisen toiseksi:*

$$\Delta' = \Delta^\alpha.$$

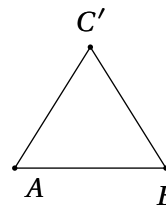
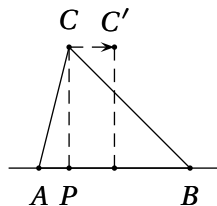
Todistuksen ajatus. (1) Olkoon a annettu suora ja $\lambda \neq 0$ vakio. Määritellään kuvaus α , jolle $\alpha(A) = A'$, ehdosta

$$AA' \parallel a \quad \text{ja} \quad AA' = \lambda \cdot AP.$$

Yhdenmuotoisuudesta seuraa, että α on affiini, ja se kiinnittää suoran a pisteittäin.



Kuvataan annettu kolmio ΔABC tasakylkiseksi kolmioksi valitsemalla $a = \ell(A, B)$ ja $\lambda = \frac{CC'}{CP}$.



(2) Toiseksi suoritetaan sopiva litistys (tai venytys) kohtisuorasti suoraa $\ell(A, B)$ vasten, jolloin saadaan tasasivuinen kolmio. □

Esimerkki 5.4 Osoitetaan uudelleen, että kolmion ΔABC mediaanit ovat konkurrentit.

Edeltävän lauseen mukaan on olemassa affiini kuvaus α , joka kuvaa kolmion ΔABC tasasivuisiksi kolmioksi. Todetaan helposti, että tasasivuisen kolmion mediaanit ovat konkurrentit. Käänteiskuvaus α^{-1} on affiini, ja se kuvaa bijektiivisesti janojen keskipisteet kuvajanojen keskipisteiksi, ja siten se kuvaa mediaanit mediaaneiksi, ja niiden yhteisen pisteen kuvapisteeksi. □

Edeltävä todistus *ei päde korkeussuorille*, sille affiini kuvaus ei välttämättä säilytä kulmien suuruutta.

Esimerkki 5.5 Gardner ja Mauldin osoittivat 1988, että jos α on transformaatio, joka kuvaa jokoisen ympyrän ympyräksi, niin α on affiini ja vieläpä similaarikuvaus. Tästä seuraa, että ei ole

olemassa tason bijektiivistä kuvausta, joka kuvaisi jokaisen kolmion (tai monikulmion) ympyräksi. \square

5.3 Inversio

Inversio on erityislaatuinen kuvaus, joka vaihtaa ympyrän ulkopuolisen alueen ja sisäpuolisen alueen keskenään. Samoin inversio tuottaa tasoon dualiteetin, missä piste ja suora ovat samanarvoisia käsitteitä.

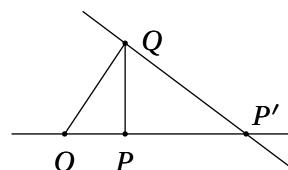
Olkoon $\omega = \omega(O, r)$ annettu ympyrä. Määritellään **inversio** $I = I_\omega$ niin että se kuvaa pisteen $P \neq O$ pisteeksi $I(P) = P'$, jolle

$$P' \in \ell(O, P) \text{ ja } OP \cdot OP' = r^2.$$

Tarkasti ottaen inversio $I = I_\omega$ (annetun ympyrän ω suhteen) ei ole tason transformaatio, sillä se ei ole määritelty erikoispisteelle O , mutta I on bijektio $\mathbb{E} \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{E} \setminus \{O\}$. Kuten myöhemmin tehdään, voidaan pisteen O kuva ajatella olevan äärettömyydessä. Lisäksi, I kiinnittää jokaisen pisteen ympyrän ω kehältä.

Esimerkki 5.6 Etsi $I_\omega(P)$.

Ratkaisu. Jos P on ympyrän ω sisällä, piirretään janalle OP normaali pisteeseen P , jolloin sen ja ympyrän ω leikkauspisteeseen Q piirretty tangentti leikkaa suoran $\ell(O, P)$ inversiopisteessä P' .



Todistus. $\triangle OPQ \sim \triangle OQP'$ ja siten $OP/OQ = OQ/OP'$, mistä väite seuraa. \square

Jos P on ympyrän ulkopuolella, niin tehdään operaatiot käännetyssä järjestyksessä.

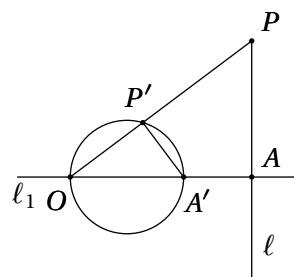
Sanotaan, että ℓ_O on O -suora, jos se saadaan suorasta $O \in \ell$ poistamalla siitä piste O . Vastaavasti O -ympyrä saadaan ympyrästä $O \in \omega$ poistamalla siitä piste O .

Lause 5.13. Olkoon inversioympyrä $\omega = \omega(O, r)$ annettuna, ja merkitään $I = I_\omega$.

(1) Olkoon ℓ suora, $O \notin \ell$. Suoran ℓ inversio on O -ympyrä.

(2) Olkoon ω' O -ympyrä. Tällöin $I(\omega')$ on suora, joka on kohtisuorassa ympyrän ω' halkaisijaa vasten.

Todistus. Olkoot $\ell_1 \perp \ell$ siten, että $O \in \ell_1$ ja olkoon $A = \ell_1 \cap \ell$. Kun $P \in \ell$, niin $\triangle OPA \sim \triangle OA'P'$, missä $A' = I(A)$ ja $P' = I(P)$. Täten P' on sen ympyrän kehällä, jonka halkaisijana OA' on. Toisaalta, jos P on tuon ympyrän kehällä, niin vastaavasti päätellen todetaan, että sen inversio P' on vaaditulla suoralla. \square



Lause 5.14. Inversiossa seuraavat kuvautuvat itselleen: inversioympyrä ω ; ne suorat, jotka kulkevat inversion keskuksen O kautta; ja ympyrät, jotka leikkaavat ympyrän ω kohtisuorasti.

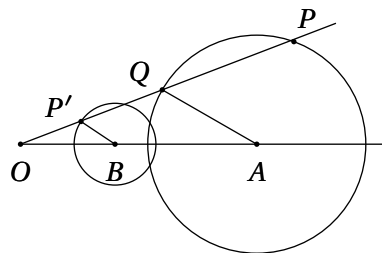
Todistus. Harjoitus. \square

Ensimmäisestä lauseesta saadaan (tässä kaksi O -ympyrää sivuavat toisiaan, jos täydennetyt ympyrät sivuavat pisteessä O):

Lause 5.15. Jos ℓ_1 ja ℓ_2 ovat yhdensuuntaisia suoria, jotka eivät kulje pisteen O kautta, niin ne kuvautuvat inversiossa O -ympyröiksi, jotka sivuavat toisiaan.

Lause 5.16. Olkoon ω_1 ympyrä, $O \notin \omega_1$. Tällöin $I_\omega(\omega_1)$ on ympyrä, $O \notin I_\omega(\omega_1)$.

Todistus. Olkoot A ympyrän ω_1 keskipiste, $P \in \omega_1$ ja $Q \in \ell(O, P) \cap \omega_1$ toinen leikkauspiste. Piirretään pisteen P inversion P' kautta suoran $\ell(A, Q)$ kanssa yhdensuuntainen suora, ja olkoon B näin saadun suoran ja suoran $\ell(O, A)$ leikkaus. Nyt $OP \cdot OP' = r^2$ ja $OP'/OQ = BP'/AQ$. Laskemalla todetaan, että $BP' = AQ \cdot r^2 / OP \cdot OQ$, missä AQ on ympyrän ω_1 säde ja $OP \cdot OQ$ on ympyrän potenssina pisteen P valinnasta riippumaton vakio. Täten BP' on pisteen P valinnasta riippumaton vakio ja siis ympyrän säde. \square



Lause 5.17 (Ptolemaios). Olkoot A, B, C ja D tason E pisteitä. Tällöin

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD \geq AC \cdot BD.$$

Lisäksi yhtäsuuruus on voimassa tarkalleen silloin kun $ABCD$ on konsyklinen.

Todistus. Olkoon ω r -säteinen ympyrä piste A keskuksena, ja merkitään $X' = I_\omega(X)$ pisteille X . Tällöin

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB'}{AC'},$$

ja siten $\triangle ABC \sim \triangle AC'B'$, eli $BC/AC = B'C'/AB'$, mistä saadaan, että

$$B'C' = BC \cdot \frac{r^2}{AB \cdot AC}.$$

Kolmioepäyhtälön mukaan $B'C' + C'D' \geq B'D'$, josta siirtymällä edelleen pisteisiin A, B, C ja D saadaan

$$BC \cdot \frac{r^2}{AB \cdot AC} + CD \cdot \frac{r^2}{AC \cdot AD} \geq BD \cdot \frac{r^2}{AB \cdot AD}.$$

Yhtäsuuruus on voimassa vain jos $C' \in B'D'$, eli kun C on ympyrän $\omega_1 = \omega(A, B, D)$ kaarella BD , joka on vastapäätä pistettä A . Kertomalla edellinen yhtälö puolittain luvulla $AB \cdot AC \cdot AD / r^2$ saadaan Ptolemaioksen tulos. \square

Huolimatta siitä, että inversio vääristää kuvioita, se säilyttää kulman suuruuden.

Seuraava tulos jää harjoitukseksi.

Lause 5.18. Niiden pisteiden P ura, joiden etäisyydet kahdesta annetusta pisteestä A ja B ovat annetussa suhteessa r :

$$BP = r \cdot AP$$

on Apolloniuksen ympyrä, joka invertoi pisteen A pisteeksi B .

Inversiotaso

Inversiossa ympyrän ω suhteen keskipiste O on erikoisasemassa. Tästä voidaan päästä eroon laajentamalla tasoa \mathbb{E} **ideaalipisteellä** ∞ . Merkitään $\mathbb{E}_\infty = \mathbb{E} \cup \infty$, ja määritellään pisteet O ja ∞ toistensa inversiopisteiksi ympyrän ω suhteen.

Inversiotulosten ja Apolloniuksen lauseen mukaisesti voidaan suoraa pitää ympyränä, jonka säde on äärettömän suuri. Kun tämä samaistus on tehty, kutsutaan tasoa \mathbb{E}_∞ **inversiotasoksi**. Tässä tasossa siis 'suorat' ovat ympyröitä.

Inversio (saman ympyrän ω suhteen) on tason \mathbb{E}_∞ transformaatio ja

Lause 5.19. *Inversio kuvaa ympyrän ympyräksi.*

Huomaa, että kaksi yhdensuuntaista suoraa kuvautuvat inversiossa ympyröiksi, jotka sivuavat toisiaan. Näin ollen yhdensuuntaisuus inversiotasossa on ajateltava ympyröiden sivuamisena.

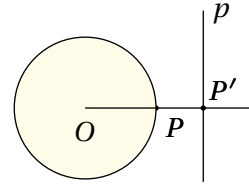
Esimerkki 5.7 Olkoon ω_1 ympyrä tasossa \mathbb{E} ja P, Q sen sisällä olevia pisteitä. On olemassa tarkalleen kaksi ympyrää, jotka kulkevat pisteiden P, Q kautta ja jotka sivuavat ympyrää ω_1 .

Todistus. Olkoon ω (äärellissäteinen) ympyrä P keskipisteenä. Tällöin inversiossa tämän ympyrän suhteen: $I(P) = \infty$, $I(Q) = Q'$ ja $I(\omega_1) = \omega'_1$. Piste Q' on ympyrän ω'_1 ulkopuolella (koska ∞ on ulkopuolella). Piirretään tangentit pisteestä Q' ympyrälle ω'_1 . Nämä kulkevat pisteen ∞ kautta, ja niiden kuvat inversiossa (ympyrän ω suhteen) ovat vaaditut ympyrät. \square

Olkoon ω ympyrä O keskipisteenä ja k säteenä. Piste $P \neq O$ **polari** ympyrän ω suhteen on suora p , jolla $p \perp \ell(O, P)$ ja $I(P) \in p$.

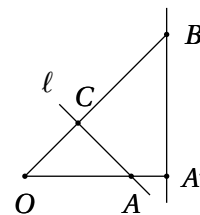
Olkoon p suora, $O \notin p$. Tällöin P on suoran p **napa**, jos p on pisteen P polari.

Jäljempänä pisteiden polareja merkitään vastaavilla pienillä kirjaimilla.



Lause 5.20. *Piste A on suoralla b jos ja vain jos a kulkee pisteen B kautta.*

Todistus. Olkoon $\ell = \ell(A, C)$ suora, jolla $\ell \perp \ell(O, B)$. Nyt $\triangle OAC \cong \triangle OBA'$ (KK) ja siten $OB/OA = OA'/OC$, mistä $OB \cdot OC = OA \cdot OA' = k^2$. Näin ollen $C = B'$, eli pisteen B inversio, ja siten $\ell(A, B')$ on pisteen B polari. Toisinpäin todistus on vastaavanlainen. \square



Tämä lause on duaalisuustulos. Pisteet ja suorat vaihtavat paikkaansa: Jos F on pisteistä ja suorista koostuva tasokuvio, missä tietyt pisteet sijaitsevat tietyillä suorilla, niin sen duaalisessa kuviossa tietyt suorat kulkevat tiettyjen pisteiden kautta.

Liite 1: Isometriat ja ryhmät*

Matriisiesitykset

Tason isometriat voidaan *reaalitasossa* esittää matriisien avulla. Nämä esitykset ovat erityisen mielekkäitä ohjelmoinnin kannalta. Reaalitasossa kukin piste esitetään koordinaattiansa avulla $P = (x, y)$. Yleisesti, tason lineaarimuunnos määräytyy annetusta 2×2 -matriisista ja vakiovektorista:

$$T(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (p, q).$$

Esimerkki 5.8 (1) Identiteettimatriisi $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kuvaa jokaisen pisteen itselleen.

(2) Kaikki translaatiot $P \mapsto P'$ voidaan esittää muodossa $(x', y') = (x, y)I + (a, b)$.

(3) Rotaatio origon ympäri kulman θ verran voidaan esittää matriisina

$$(x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(4) Peilaus origon kautta kulkevan suoran ℓ suhteen, joka muodostaa kulman θ x -akselin suhteen, voidaan esittää matriisina

$$(x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Toisaalta, jos ρ on peilaus suoran ℓ suhteen, joka ei kulje origon kautta, voidaan se esittää aina muodossa $\tau^{-1}\rho_1\tau$, missä τ on translaatio, jolle ℓ^τ kulkee origon kautta ja ρ_1 on peilaus suoran ℓ^τ suhteen. \square

Seuraavan lauseen mukaan jokainen isometria säilyttää pistejoukon painopisteen. Tätä varten määritellään pistejoukon $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ painopiste ehdosta

$$G(\mathcal{P}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i,$$

(kyseessä on vektorien summaus). Merkitään myös $\alpha(\mathcal{P}) = \{\alpha(P_1), \alpha(P_2), \dots, \alpha(P_n)\}$.

Lause 5.21. *Olkoot α isometria, ja \mathcal{P} tason äärellinen pistejoukko. Tällöin $\alpha(G(\mathcal{P})) = G(\alpha(\mathcal{P}))$.*

Tästä lauseesta ja ryhmien perusominaisuuksista saadaan

Lause 5.22. *Jos \mathcal{G} on äärellinen ryhmä isometrioita, niin on olemassa piste jonka kaikki $\alpha \in \mathcal{G}$ kiinnittävät.*

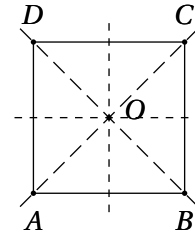
Itseasiassa, voidaan osoittaa, että jokainen äärellinen isometrioiden ryhmä on joko syklinen tai dihedraalinen.

Tason symmetriat

Olkoon K tason kuvio (eli pistejoukko). Tällöin sen **symmetriaryhmä** $\text{Sym}(K)$ koostuu kaikista isometrioista, jotka kiinnittävät K :n pisteittäin. On helppo todeta, että $\text{Sym}(K)$ on ryhmä.

Esimerkki 5.9 Neliön $\diamond ABCD$ symmetriaryhmä koostuu

- (1) rotaatioista $\sigma_{O,\theta}$, missä $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ja O on neliön keskipiste (mukaanlukien identiteettikuvaus), ja
 - (2) peilauksista diagonaalien $\ell(A, C)$ ja $\ell(B, D)$ suhteen,
 - (3) peilauksista sivujen keskinormaalien $\ell(X, Z)$ ja $\ell(y, R)$ suhteen.
- Selvästi jokainen symmetriaryhmän alkio permutoi kärkipisteet. Symmetriaryhmään kuuluu siis 8 isometriaa. \square



Jos kuvio K on rajoitettu (eli se voidaan piirtää jonkun ympyrän sisään), on sen symmetriaryhmä äärellinen, ja siten kuviolla on aina 'keskipiste', jonka jokainen isometria $\alpha \in \text{Sym}(K)$ kiinnittää. Toki $\text{Sym}(K)$ voi olla triviaali eli $\text{Sym}(K) = \{\iota\}$, jolloin kaikki pisteet ovat 'keskipisteitä'. Kuten tiedämme, jos kuviolla on vähintään kolme 'keskipistettä', on sen symmetriaryhmä triviaali.

Olkoon \mathcal{T}_t on tason kaikkien translaatioiden muodostama ryhmä. Jos \mathcal{G} on jokin isometrioiden ryhmä, samoin on siinä esiintyvien translaatioiden muodostama joukko, jota kutsutaan \mathcal{G} :n **translaatioryhmäksi**:

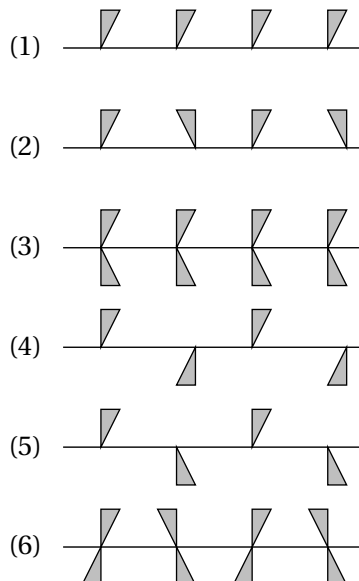
$$T_{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cap \mathcal{T}_t.$$

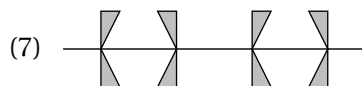
(1) Mikäli ryhmä $T_{\mathcal{G}}$ on syklinen eli $T_{\mathcal{G}} = \{\dots, \tau^{-1}, \iota, \tau, \tau^2, \dots\}$ on \mathcal{G} **friisiryhmä** (eli **ornamenttiryhmä**). Friisiryhmä on jonkin ornamentin symmetriaryhmä, eli sellaisen kuvion, jossa osakuvio toistuu tasavälein suoran suunnassa.

Lause 5.23. Jokainen friisiryhmä \mathcal{G} on yhtä seuraavista tyypeistä. Ryhmän \mathcal{G} generoi

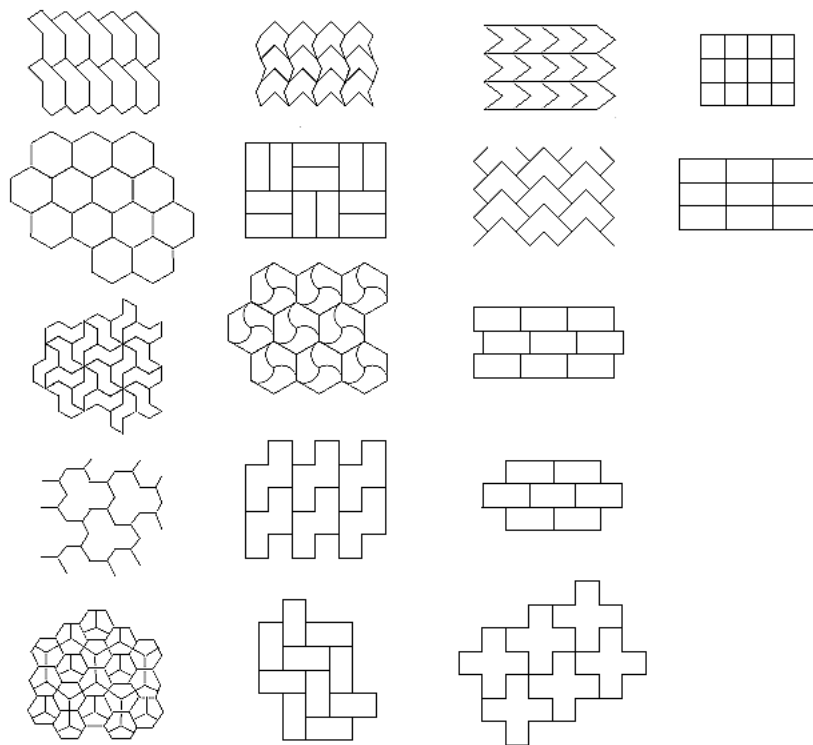
- (1) translaatio,
- (2) translaatio $\overline{\tau} \parallel a$ ja peilaus ρ_b , missä $b \perp a$,
- (3) translaatio $\overline{\tau} \parallel a$ ja peilaus ρ_a ,
- (4) translaatio $\overline{\tau} \parallel a$ ja puolikierto δ_P , missä $P \in a$,
- (5) siirtopeilaus,
- (6) siirtopeilaus $\overline{\rho'} \parallel a$ ja puolikierto δ_P , missä $P \in a$,
- (7) siirtopeilaus $\overline{\rho'} \parallel a$, peilaus ρ_b ja puolikierto δ_P , missä $b \perp \tau$ ja $P \in a$.

Friisiryhmien symmetriat voidaan esittää oheisten ornamenttikuvien avulla.





(2) **Kideryhmä** (eli **tapettiryhmä**) on isometrioiden ryhmä, jonka generoijajoukkoon kuuluu tarkalleen kaksi translaatiota, joiden suunnat eivät ole yhdensuuntaisia. Näiden ryhmien kiinnittämät kuviot toistavat itseään tasossa, jonka ne täyttävät periodisesti peruskuvion avulla. Peruskuvio on monikulmio (jonka sisälle voidaan piirtää symmetriaa rajoittava kuvio). Kideryhmiä on 17 eri tyyppistä riippuen niiden (muiden) generaattorien luonteesta. Tällaisessa ryhmässä voi olla vain sellaisia rotaatioita, joiden rotaatiokulmat ovat $360^\circ/n$, missä $n = 2, 3, 4$ tai 6 .



Kuvat Bar-Natanin kotisivulta:

www.math.toronto.edu/~drorbn/Gallery/Symmetry/Tilings

(3) Mikäli translaatioryhmä $T_{\mathcal{G}}$ sisältää vähintään kolme riippumatonta translaatiota, on ryhmä \mathcal{G} **jatkuva**: jokaiselle reaaliluvulle $r > 0$ ja tason pisteelle P on olemassa $a \in \mathcal{G}$, jolle $PP^a < r$, eli piste kuvautuu mielivaltaisen lähelle annettua pistettä ryhmän \mathcal{G} translaatioita käyttäen.

Liite 2: Fraktaaleista*

Fraktaali on äärimmäisen hienorakenteinen epäsäännöllinen kuvio, jossa on (likimääräisesti) itseään toistavia kuvioita. Usein fraktaali saadaan aikaiseksi toistamalla loputtomiin annettua laskukaavaa. Fraktaaleja voidaan saada aikaan hyvin monella iteratiivisella tavalla. Esimerkiksi **Mandelbrotin joukko ja Julia-joukot** syntyvät kompleksitasoon toistamalla kuvausta

$$z \mapsto z^2 + c.$$

Samoin Newtonin metodi polynomien juurien etsimiseksi voidaan muokata tuottamaan fraktaaleja. Toisaalta Lindenmayer suunnitteli 1960-luvun lopulla kuvaamaan biologisia kasvuprosesseja. Nämä L-systeemit tuottavat (usein 'kasvustollisia') fraktaaleja toistamalla tiettyjä formaalisia sääntöjä. Myös äärelliset automaattit ja soluautomaattit generoivat fraktaaleja.

Esimerkki 5.10 (Mandelbrotin joukko) Tarkastellaan kompleksilukujen jonoa

$$z_1, z_2, \dots,$$

joka määritellään rekursiivisesti alkuarvosta $c \in \mathbb{C}$ lähtien: $z_1 = c$ ja

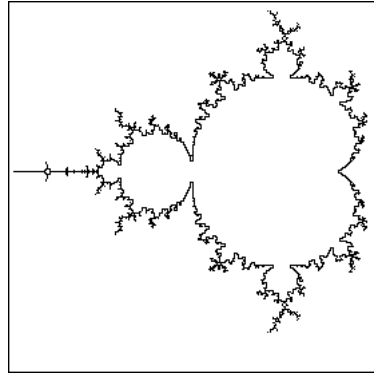
$$z_{n+1} = z_n^2 + c. \quad (5.3)$$

Mandelbrotin joukko M koostuu niistä kompleksitason pisteistä $c \in \mathbb{C}$, joilla jono (5.3) pysyy rajoitettuna $|z_n| \leq d$ jollain vakiolla d .

Esimerkki 5.11 • Kun $c = 1$, on jono nopeasti kasvava: $z_1 = 1$, $z_2 = z_1 z_1 + c = 2$, $z_3 = z_2 z_2 + c = 5$, $z_4 = z_3 z_3 + c = 26$, $z_5 = z_4 z_4 + c = 677$, $z_6 = z_5 z_5 + c = 458330$. Tässä tapauksessa z_n etäänny origosta, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \rightarrow \infty$, eli $1 \notin M$.

- Kun $c = i$, niin $z_1 = i$, $z_2 = i \cdot i + i = -1 + i$, $z_3 = (-1 + i)(-1 + i) + i = -i$, $z_4 = (-i)(-i) + i = -1 + i$, ja jono on (**lopulta**) **periodinen**: joka toinen jonon jäsen on $-i$ ja joka toinen $-1 + i$. Erityisesti jono $\{z_n\}$ pysyy rajoitettuna: $|z| \leq \sqrt{2}$.
- Myös kun $c = -2$ saadaan periodinen jono, sillä nyt $z_1 = -2$, $z_2 = 2$, $z_3 = 2, \dots$
- Kun $c = -0.5 + 0.5i$, niin $z_2 = -0.5$, $z_3 = 0.25 + i$, $z_4 = -0.6875 + 0.25i$, ja nyt on hieman vaikeampaa sanoa miten jono $\{z_n\}$ käyttäytyy. Kun iterointia jatketaan voidaan aavistaa, että jono z_n suppenee tässä tapauksessa kohti raja-arvoa, joka on likimääräisesti $-0.41 + 0.28i$.

□



Invariantit kuvat

Olkoot $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ kutistavia kuvauksia,

$$P^{\alpha_i} Q^{\alpha_i} \leq c_i \cdot PQ, \quad (i = 1, 2, \dots, m; c_i < 1).$$

Tason kuvio F on **invariantti** näiden kuvausten suhteen, jos

$$F = \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(F).$$

Näin ollen F on invariantti kuvausten α_i suhteen, jos joukot $\alpha_i(F)$ peittävät kuvion F tarkalleen kuitenkin sallien päällekkäisyyden.

Tason kuvio F on **itsesimilaari**, jos se on invariantti joidenkin kutistavien *similaarikuvausten* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ suhteen. Itsesimilaari kuvio on siten omien pienennöstensä, $\alpha_1(F), \dots, \alpha_m(F)$, yhdiste. Tällöin $F \sim \alpha_i(F) \sim \alpha^2(F) \sim \dots$, missä kukin pienennöksen pienennös $\alpha^j(F)$ on osa kuviota F . Näin ollen itsesimilaari F sisältää itsensä toiston äärettömän monta kertaa. Myöhemmin fraktaaleja käsitellään invariantteina kuvioina.

Esimerkki 5.12 [Von Kochin käyrä] Tämä käyrä K on neljän kutistavan similaarikuvauksen unioni. Käyrä K kuvautuu α_i :n avulla similaariksi käyräksi välille $A_i - A_{i+1}$.



Kochin käyrä saadaan iteroimalla seuraavaa muunnosta: kuvion jokainen jana jaetaan kolmeen yhtä pitkään osaan, ja keskimäinen korvataan tasasivuisen kolmion kahdella muulla kyljellä. Von Kochin käyrä K on raja-arvo tästä iteraatiosta K_0, K_1, K_2, \dots , missä murtoviivan K_i pituus on $(\frac{4}{3})^i$ kertaa alkuperäisen janan K_0 pituudesta. Niinpä *Kochin käyrän pituus on ääretön*, vaikka se kulkee rajoitetulla alueella. Fraktaalien teoriassa tällaisille käyrille löydetään dimensio. Kochin käyrän fraktaalinen dimensio on

$$\frac{\log(4)}{\log(3)}.$$

□

Tason topologiaa

Fraktaalien teoriaa varten tarvitaan muutama topologinen käsite: Kullekin $r > 0$

$$B_r(P) = \{Q : PQ < r\}$$

on P -keskinen *avoin r -ympäristö*. Kuvio F on **avoin**, jos sen jokaisella pisteellä on avoin ympäristö F :ssä, $B_r(P) \subseteq F$ jollain $r > 0$. Kuvio F on **suljettu**, jos sen jokainen reunapiste kuuluu F :ään. Todetaan, että kuvio F on suljettu jos ja vain jos sen komplementti $\mathbb{E} \setminus F$ on avoin.

Kaikki kuvat eivät käyttäydy tarpeeksi siististi, jotta niille voitaisiin määrittellä dimensio. Siksi kompaktit kuvat näyttävät keskeistä osaa fraktaalien maailmassa. Kuvio F on **kompakti**, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite: Jos $F \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, missä kukin A_i ($i \in I$) on avoin joukko, niin on olemassa äärellinen osaperhe $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ siten, että $F \subseteq \bigcup_{j=1}^m A_{i_j}$. Tasossa kompaktit kuvat voidaan luonnehtia helposti:

Lause 5.24. *Tason kuvio F on kompakti jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu.*

Kuvio F on **rajoitettu**, jos on olemassa $r > 0$ ja piste P , joilla $F \subseteq B_r(P)$. (Vertaa edellistä tulosta Heine-Borel lauseeseen).

Lause 5.25. (1) *Jos $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ on pienenevä jono kompakteja kuvioita, niin $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ on epätyhjä kompakti kuvio.*

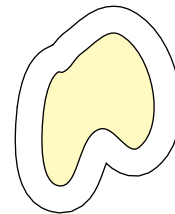
(2) *Jos α on kutistava kuvaus ja F on kompakti kuvio, niin myös $\alpha(F)$ on kompakti.*

Määritellään vielä kullekin kuviolle F sen avoin ja suljettu r -ympäristö:

$$B_r(F) = \{Q : PQ < r \text{ jollain } P \in F\} \text{ ja } \bar{B}_r(F) = \{Q : PQ \leq r \text{ jollain } P \in F\}.$$

Pisteiden välinen etäisyys PQ ei määrittele kompaktien kuvioiden välistä etäisyyttä suoraviivaisesti vaan tarvitaan hieinan erilainen määrittely: Kun F ja G ovat kompakteja, määritellään niiden **Hausdorff-etäisyys** seuraavasti

$$d_H(F, G) = \inf\{r : F \subset \bar{B}_r(G) \text{ ja } G \subset \bar{B}_r(F)\}.$$



Lause 5.26. d_H on hyvin määritelty etäisyys: kaikille kompakteille F, G, K

(1) $d_H(F, G) \geq 0$, ja $d_H(F, G) = 0$ vain jos $F = G$,

(2) $d_H(F, G) = d_H(G, F)$,

(3) $d_H(F, G) \leq d_H(F, K) + d_H(K, G)$.

Siten kompaktit kuvat muodostavat metrisen avaruuden Hausdorff-etäisyyden suhteen.

Invarianttien kuvioiden ominaisuuksia

Kutistavat kuvaukset määräävät aina yksikäsitteisen invariantin joukon (fraktaalien).

Lause 5.27. Olkoot α_i , $i = 1, 2, \dots, m$, kutistavia kuvauksia,

$$P^{\alpha_i} Q^{\alpha_i} \leq c_i \cdot PQ \quad (c_i < 1).$$

Tällöin on olemassa yksikäsitteinen kompakti kuvio F , joka on invariantti näiden kuvausten suhteen:

$$F = \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(F).$$

Todistus. Olkoon K jokin kompakti kuvio, jolle $\alpha_i(K) \subset K$. (Tällaisia kuvioita on olemassa, esimerkiksi $\bar{B}_r(\{P\})$ jollain P ja r .) Koska kukin α_i on kutistava, myös $\alpha_i(K)$ on kompakti, ja siten $\alpha_i^k(K)$ on kompakti kaikilla i ja k . Merkitään

$$\alpha(K) = \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K).$$

Oletuksen nojalla, $\alpha(K) \subset K$, ja edeltävän perusteella $\alpha^k(K)$ on kompakti kaikilla k .

Siten $\alpha^{k+1}(K) \subset \alpha^k(K)$ kaikilla k , ja näin ollen $K, \alpha(K), \alpha^2(K), \dots$ on pienenevä jono kompakteja kuvioita. Niiden leikkaus

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} \alpha^k(K)$$

on epätyhjä kompakti kuvio. Koska edellinen jono on pienenevä, niin selvästi $\alpha(F) = F$, eli F on invariantti kuvausten α_i suhteen.

Yksikäsitteisyyttä varten huomataan, että jos K ja G ovat kompakteja, niin

$$d_H(\alpha(K), \alpha(G)) \leq \max\{d_H(\alpha_i(K), \alpha_i(G)) : i = 1, 2, \dots, m\},$$

(miksi?), ja siten

$$d_H(\alpha(K), \alpha(G)) \leq \max\{c_i : i = 1, 2, \dots, m\} \cdot d_H(K, G),$$

mistä seuraa, että jos $\alpha(K) = K$ ja $\alpha(G) = G$, niin $d_H(K, G) = 0$, eli $K = G$. \square

Lause 5.28. Olkoot α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) kutistavia kuvauksia kuten edellä, K kompakti kuvio, jolla $\alpha_i(K) \subseteq K$. Merkitään

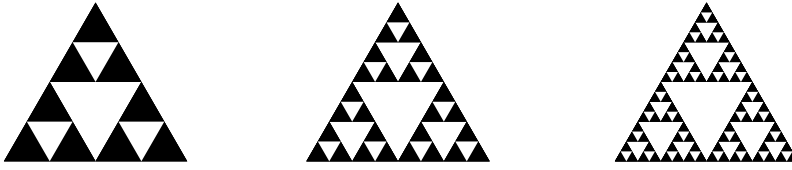
$$\alpha(K) = \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K).$$

Tällöin

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} \alpha^k(K).$$

Todistus kertoo vielä enemmän: Olkoon K mikä tahansa kompakti joukko. Tällöin $\alpha^k(K)$ lähenee invarianttia joukkoa F , kun k kasvaa, eli $d_H(\alpha^k(K), F) \rightarrow 0$ kun $k \rightarrow \infty$. Tämä voidaan helposti johtaa todistuksen viimeisestä epäytälöstä.

Esimerkki 5.13 Sierpinskiin kolmio saadaan poistamalla tasasivuisen kolmion 'keskuskolmio' ja toistamalla tätä loputtomiin kaikkiin jäljellä oleviin kolmioihin. Tämä tarkoittaa, että on käytetty kolmea similaarikuvausta α_i ($i = 1, 2, 3$), joista kukin kuvaa tasasivuisen kolmion yhdeksi 'kärkikolmioksi'. Edeltävän lauseen nojalla alkukuvioiksi olisi voitu valita vaikkapa yksi piste (koko kolmion asemesta) ja silti päädytään samaan lopputulokseen. \square



Seuraavaksi nyt että annetuilla kutistavilla kuvauksilla on sama kutistusvakio c . Tällä edellytyksellä johdetaan kollaasilause, joka sanoo, että miten hyvä (kompakti) arvio K on invariantista kuviosta F .

Lause 5.29 (Kollaasilause). Olkoot α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) kutistavia kuvauksia ja F niiden invariantti kuvio siten, että $P^{\alpha_i} Q^{\alpha_i} \leq c \cdot PQ$, missä $c < 1$. Tällöin

$$d_H(K, F) \leq d_H(K, \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K)) \cdot \frac{1}{1-c},$$

missä K on kompakti kuvio.

Todistus. Kolmioepäyhtälöä käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} d_H(K, F) &\leq d_H(K, \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K)) + d_H(\bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K), F) \\ &= d_H(K, \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K)) + d_H(\bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K), \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(F)) \\ &\leq d_H(K, \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K)) + c \cdot d_H(K, F) \end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa edeltävän todistuksen viimeisestä epäyhtälöstä. \square

Lause 5.30. Olkoot K epätyhjä kompakti kuvio ja ϵ positiivinen. Tällöin on olemassa invariantti kuvio F kutistavien similaarikuvausten suhteen, jolla $d_H(K, F) < \epsilon$

Todistus. Olkoot $B_i = B_r(P_i)$ pisteiden P_i ($i \in I$) ympäristöjoukko, jolla $r \leq \frac{1}{4}\epsilon$ ja joka peittää K :n, $K \subset \bigcup_{i \in I} B_i$. Koska K on kompakti, niin näistä ympäristöistä löydetään äärellinen osapeite, sanokaamme $K \subset \bigcup_{i=1}^m B_i$. Tällöin r :n valinnan nojalla,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B_i \subset B_{\frac{1}{4}\epsilon}(K).$$

Olkoon α_i kutistava similaarikuvaus, joka kuvaa K :n B_i :hin ja jonka kutistusvakio on korkeintaan $\frac{1}{2}$. Näin ollen $\alpha_i(K) \subset B_i \subset B_{\frac{1}{2}\epsilon}(\alpha_i(K))$, ja siten

$$\bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K) \cup B_{\frac{1}{4}\epsilon}(K) \quad \text{ja} \quad K \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\frac{1}{2}\epsilon}(\alpha_i(K)),$$

mistä saadaan, että

$$d_H(K, \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K)) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Tästä edeltävän lauseen nojalla johdetaan vaadittu tulos: $d_H(K, F) < \epsilon$, missä F on kutistavien similaarikuvausten α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) invarianttikuvio. \square

Kollaasilause tarjoaa käytännöllisen tavan esittää kuvioita: Piirretään ensin F likimääräisesti ja peitetään se sitten mahdollisimman tarkasti similaareilla kopioilla. Nämä similaarit kuviot määräävät invariantin kuvion K , joka on hyvä arvio alkuperäisestä kuvioista F kollaasilauseen mukaan.

Jokainen tasokuvio voidaan esittää mielivaltaisen tarkasti kutistavien similaarikuvausten invarianttina joukkona, ja siten saada tämä kuvio aikaan iteroimalla similaarikuvauksia jostain kompaktista kuvioista lähtien. Tällä on käytännöllisiä sovellutuksia, sillä esittämällä kuvio (valokuva, tietokonegrafiikka ja niin edelleen) pisteittäin (kuten tietokoneen tiedostot normaalisti tekevät), vaaditaan suuria tiedostoja, mutta esittämällä sama kuvio luettelemalla vain iteraatioon tarvittavat kuvaukset, päästään usein huomattavasti vähemmällä tietomäärällä. Tämän pakkauksen varjopuolena on se, että käytettävät kutistavat kuvaukset välttämättä luovat jonkin verran symmetrisyyttä tuloksena olevaan kuvioon, vaikkei moista symmetrisyyttä esiintyisikään alkuperäisessä kuviossa.

Kirjallisuutta valikoidusti

Coxeter, S. M., Introduction to Geometry, Wiley, 1969.

Coxeter, S. M., Greitzer, S. L., Geometry Revisited, Math. Assoc. America, 1967.

Dodge, C. W., Euclidean Geometry and Transformations, Dower, 1972.

Perfect, H., Topics in Geometry, Pergamon, 1963.

Smart, J. R., Modern Geometries, Brooks/Cole, 1988.

Martin, G. E. Transformation Geometry. Springer-Verlag, 1982.

Millman, Parker, Axiomatic geometry: A Metric Approach, Springer Verlag, 1986.

Nevanlinna, R., Geometrian perusteet, WSOY, 1973.

Guggenheimer, H. W., Plane Geometry and its Groups, Holden-Day, 1967.

Modenov, P. S., Parkhomenko, A. S., Geometric Transformations, Vol. I, Academic Press, 1965.
(Transformaatioiden yleisesitys).

Lyndon, R. C., Groups and Geometry, Cambridge, 1985.

Silvester, J. R. Geometry. Ancient & Modern. Oxford Univ. Press, 2001.

Weyl, H., Symmetry, Princeton, 1952.

Barnsley, M.F., Fractals Everywhere, Academic Press, 1988.

Falconer, K.J., Fractal Geometry, Wiley, 1990.

Mandelbrot, B.B., The Fractal Geometry of Nature, Freeman, 1982.

Prusinkiewicz, P., Lindenmayer, A., The Algorithmic Beauty of Plants, Springer, 1990. (Biologisesti motivoitua fraktaalien teoriaa).

Eukleideen Alkeista voi nauttia englanniksi myös internetissä:

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>