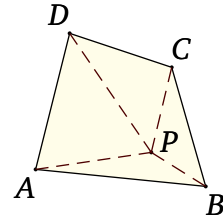


GEOMETRIA I (2017) Hermann Weylin päivänä 9.11¹

1 Onko olemassa kymmenen pisteen joukko ja sellaiset tason viisi eri suoraa, joilla kullakin on tarkalleen neljä annetuista pisteistä?

2 Olkoot P_1, P_2, \dots, P_n tason pisteitä. Osoita, että suuntaamattomien janojen pituuksille on voimassa $P_1P_n \leq P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{n-1}P_n$.

3 Olkoon $\diamond ABCD$ konvekssi nelikulmio. Määrä pistettä P , jolle $PA + PB + PC + PD$ on pienin mahdollinen.



4 Olkoon \triangle kolmio, jonka sivujen pituudet ovat a, b, c . Osoita, että

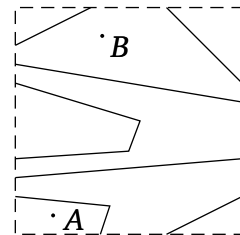
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

5 Ratkaistaan tapaus, jota käytetään Stewartin lauseen 2.17 todistuksessa. Olkoot pisteet A, B, C ja P kollineaariset. Osoita, että

$$PA^2 \cdot BC + PB^2 \cdot CA + PC^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = 0.$$

6 Olkoot P_1, P_2, \dots, P_n ja Q_1, Q_2, \dots, Q_n tason annetut eri pisteet, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että Q -pisteet voidaan asettaa sellaiseen järjestykseen $Q_{k_1}, Q_{k_2}, \dots, Q_{k_n}$ että janat $P_iQ_{k_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, eivät leikkaa toisiaan.

7 Tarkastellaan hyvin monimutkaista monikulmiota Γ (jossa on 2000 sivua). Monikulmiosta näkyy vain oheinen ikkunoitu pieni osa siitä. Päästäänkö pisteestä A pisteeseen B tason sellaista murtoviivaa pitkin, joka ei leikkaa monikulmion sivuja?



¹ Hermann Weyl, marraskuun 9 (1885) - joulukuun 8 (1955). Weyl kirjoitti edelleen hyvin luetun kirjan "Symmetry", Princeton University Press 1952.