

- 1 Herra Osoba mittaa etäisyyttä OQ saarella olevaan maamerkkiin. Osoba paikantaa pisteen R , mistä hän näkee molemmat pisteet O ja Q niin, että $\angle ROQ = 90^\circ$. Miten hän mittaa etäisyyden OQ kastelematta jalkojaan?

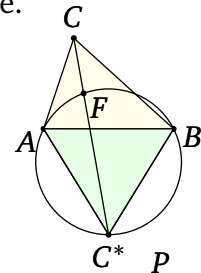
- 2 Olkoot kolmion $\triangle ABC$ sivujen pituudet a, b, c (missä $a = BC$, jne), ja olkoon AP kulmanpuolittaja, missä $P \in BC$. Osoita, että

$$BP = \frac{ac}{b+c}.$$

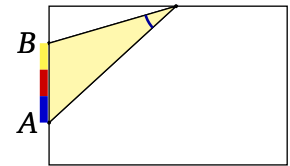
- 3 (Fermat-Torricellin piste a'la Franz Heinen 1834) Olkoon $\Delta_C = \triangle ABC^*$ teräväkulmaisen kolmion $\triangle ABC$ sivulle piirretty tasasivuinen kolmio, ja piste $F (\neq C^*)$ suoran $\ell(C, C^*)$ ja kolmion Δ_C ympäri piirretyn ympyrän leikkauspiste.

(a) Osoita, että piste F 'näkee' kolmion sivut samassa kulmassa: $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120^\circ$.

(b) Olkoot vastaavasti $\Delta_A = \triangle BCA^*$ ja $\Delta_B = \triangle ACB^*$ tasasivuiset kolmiot. Päättele, että kolmioiden Δ_A, Δ_B ja Δ_C ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat yhteisessä pisteessä.

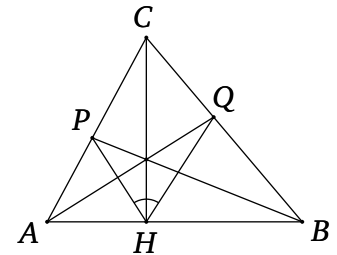


- 4 (Regiomontanuksen ongelma, Johann Müller 1436–1476) Seinällä on *Kandinskyn* taulu *Yellow-Red-Blue AB*. Mihin paikkaan katossa oleva valopiste P tulee asettaa, jotta valokulma $\angle BPA$ olisi mahdollisimman suuri?



- 5 Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio, ja pisteet P ja Q sivuilla AC ja BC niin, että AQ ja BP leikkaavat korkeusjanalla CH (missä $H = H_C$). Osoita, että CH on kulman $\angle QHP$ puolittaja.

Ohje. Piirrä suora $\ell(R, S) \parallel AB$ pisteen C kautta, missä $R \in \ell(H, P)$ ja $S \in \ell(H, Q)$.



- 6 Olkoot F, D ja E kolmion $\triangle ABC$ sivusuorilla niin, että AD, BE ja CF ovat konkurrentit. Oletetaan, että $\ell(B, C) \nparallel \ell(F, E)$ ja merkitään $D' = \ell(B, C) \cap \ell(F, E)$. Osoita, että D ja D' jakavat janan BC sisäisesti ja ulkoisesti samassa suhteessa, eli

$$\frac{BD}{DC} = -\frac{BD'}{D'C}.$$

¹ John Wallis, marraskuun 23 (1616) - lokakuun 28 (1703). Kolmas 'Savilian Chair of Geometry' -professori Oxfordissa 1649. Kehitti piille lausekkeen $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots$. Otti käyttöön merkinnän ∞ .