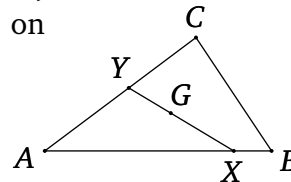


## GEOMETRIA IV (2017) Andrei Kiselev 30.11<sup>1</sup>

- 1 Osoita, että kolmio  $\triangle ABC$  on tasakylkinen, jos sen mediaanit  $AM_A$  ja  $BM_B$  ovat yhtä pitkät.

- 2 Olkoot pisteet  $X$  ja  $Y$  kolmion  $\triangle ABC$  sivuilla  $AB$  ja  $AC$ , vastaavasti. Osoita, että jos kolmion painopiste  $G$  on janalla  $XY$ , niin

$$\frac{BX}{XA} + \frac{CY}{YA} = 1.$$



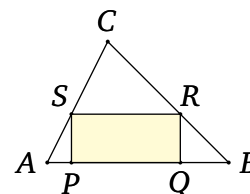
Ohje. 2×Menelaus.

- 3 (Viviani)<sup>2</sup> Olkoon  $\triangle ABC$  tasasivuinen kolmio. Osoita, että summa  $PX_a + PX_b + PX_c$  on riippumaton kolmion sisäpisteen  $P$  valinnasta. Tässä  $PX_a$  (vastaavasti,  $PX_b$ ,  $PX_c$ ) on normaali sivulle  $BC$  (vastaavasti,  $AC$ ,  $AB$ ).

- 4 Olkoot kolmion sivujen pituudet  $a, b, c$  ja niihin saapuvien mediaanien pituudet vastaavasti  $m_a, m_b, m_c$ . Osoita, että

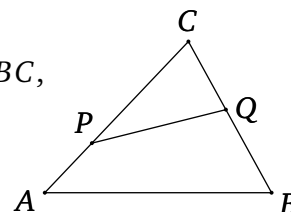
$$\frac{3}{4}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c < a + b + c.$$

- 5 Miten alaltaan suuri suorakulmio  $\diamond PQRS$  voidaan piirtää teräväkulmaisen kolmion  $\triangle ABC$  sisälle, kun  $P, Q \in AB$  ja  $R \in BC$ ,  $S \in AC$ ?



- 6 Olkoot pisteet  $P$  ja  $Q$  kolmion  $\triangle ABC$  sivuilla  $AC$  ja  $BC$ , vastaavasti. Osoita, että

$$\frac{\text{ala}(\triangle PQC)}{\text{ala}(\triangle ABC)} = \frac{PC}{AC} \cdot \frac{QC}{BC}$$



- 7 Etsi kolmion  $\triangle ABC$  sisäpiste  $X$ , joka jakaa kolmion alan kolmeen yhtäsuureen osaan, eli kolmioiden  $\triangle XAB$ ,  $\triangle XBC$  ja  $\triangle XAC$  alat ovat yhtäsuuret. Onko piste  $X$  yksikäsitteisesti aina olemassa?

<sup>1</sup> Andrei Kiselev, marraskuun 30 (1852) - marraskuun 8 (1940). Kirja geometriasta "Elementary Geometry"(1893, käänös venäjältä). Hän kirjoitti useita kirjoja, mm. "On topics in elementary geometry, which are usually solved by means of limits"(1916, käänös); "A Brief algebra for girls' schools and seminaries (1896, käänös).

<sup>2</sup> Vincenzo Viviani 1622-1703