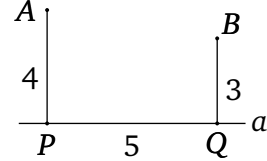


GEOMETRIA VI (2017) Terry Wall 14.12¹

Tentti 18.12 kello 14:00 (IX tai X).

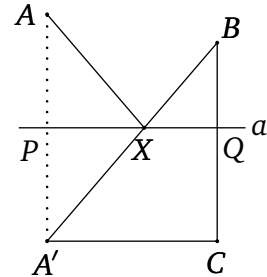
Muista ilmoittautua viimeistään viikkoa ennen!

- 1** Olkoot AP, BQ normaalit suoralle a kuten kuvassa, missä $AP = 4$, $BQ = 3$ ja $PQ = 5$. Laske lyhimmän reitin AXB pituus kun $X \in a$.



Ratkaisu. Pythagoraan avulla:

$$A'B^2 = A'C^2 + CB^2 = PQ^2 + (AP + BQ)^2 = 25 + 49 = 74, \text{ eli } AXB = \sqrt{74}, \text{ sillä } AXB = A'X + XB = A'B.$$



- 2** Olkoot δ_P puolikierto pisteen P suhteen ja a jokin suora. Osoita, että $\delta_P \rho_a = \rho_a \delta_P$ jos ja vain jos $P \in a$.

Ratkaisu. Ensimmäinen todistus. Jos $P \notin a$, niin valitaan $X \in a$. Tällöin pisteet $\delta_P \rho_a(X) = \delta_P(X)$ ja $\rho_a \delta_P(X)$ ovat eri puolella suoraa a .

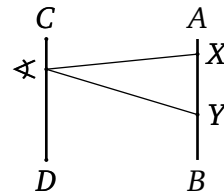
Toisaalta, oletetaan, että $P \in a$. Nyt P on kummankin isometrian $\delta_P \rho_a$ ja $\rho_a \delta_P$ kiin-
topiste. Siten suunnankääntävinä isometrioina ne ovat peilauksia. Todetaan, että ne kiinnittävät suora a , joten ne ovat sama peilaus.

Toinen todistus. Käytetään lausetta 4.20:

$$\delta_P \rho_a = \rho_a \delta_P \iff \rho_a = \delta_P \rho_a \delta_P \iff \rho_a = \rho_{\delta_P(a)} \iff a = \delta_P(a).$$

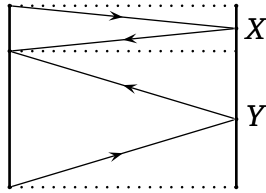
Viimeinen toteutuu jos ja vain jos $P \in a$.

- 3** Ajatellaan, että CD on ihminen, joka katsoo kokovartalo-
kuvaansa seinällä olevasta peilistä kuten kuvassa ($\sphericalangle$ on sil-
mä). Miten pitkä on peilin pinnalla oleva kuva XY ?

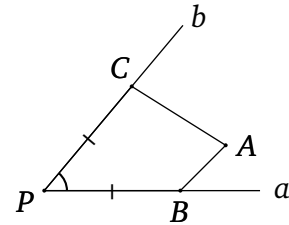


¹ Charles Terence Clegg Wall, joulukuun 14 (1936). Lähinnä geometrista topologiaa.

Ratkaisu. Puolet kuvattavan pituudesta.

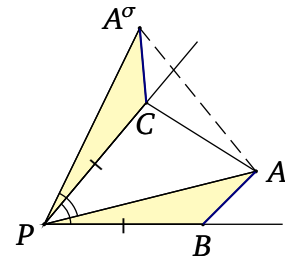


- 4] Olkoon $\angle P$ terävä kulma, jonka kyljet ovat a ja b , ja olkoon A kiinnitetty piste kulman $\angle P$ sisällä. Etsi piste $B \in a$ niin, että reitti BAC on lyhin mahdollinen, missä $C \in b$ toteuttaa vaateen $PB = PC$.



Ratkaisu.

Merkitään $\theta = \angle P$, ja olkoot B, C jotkin pisteet sen kyljillä niin, että $PB = PC$. Tarkastellaan rotaatiota $\sigma = \sigma_{(P, \theta)}$. Tällöin $BA = CA^\sigma$, sillä $C = B^\sigma$. Näin ollen $BAC = BA + AC = CA^\sigma + AC$ ja se on lyhin kun $C \in AA^\sigma$, ja (sitä) vaadittu piste B toteuttaa ehdon $PB = PC$.



- 5] Olkoon $\diamond ABCD$ suunnikas. Osoita, että $\delta_D \delta_C \delta_B \delta_A = \iota$.

Ratkaisu. Yhdiste $\alpha = \delta_D \delta_C \delta_B \delta_A$ on suunnansäilyttävä. Toisaalta $A^\alpha = A$ ja $D^\alpha = D$ yhdenmuotoisuuden perusteella. Siten suunnansäilyttävällä isometrialla α on kaksi kiintopistettä, ja silloin se on identiteettikuvaus, sillä translaatioilla ei ole kiintopisteitä ja rotaatioilla on vain yksi kiintopiste.

- 6] Olkoot suorat x, y ja z kolmion $\triangle ABC$ sivujen BC, AC ja AB keskinormaalit. Millainen isometria tarkalleen ottaen on $\alpha = \rho_z \rho_y \rho_x$?

Ratkaisu. Se on peilaus jonka akseli on $\ell(B, O)$, missä O on keskinormaalien leikkauspiste, sillä nämä pisteet kiinnittyvät.

- 7] Olkoon F jokin tasokuvio (eli tason pistejoukko), Sanotaan, että suora a on kuvion F **symmetria-akseli**, jos $\rho_a(P) \in F$ kaikille pisteille $P \in F$.

Osoita, että rajoitetun kuvion F symmetria-akselit ovat konkurrentit, jos niitä on vähintään kaksi. (Kuvio on **rajoitettu**, jos on olemassa positiivinen vakio c , jolle $PQ < c$ aina kun $P, Q \in F$.)

Ratkaisu. Jos symmetria-akselit a ja b ovat yhdensuuntaiset, on $\tau = \rho_b \rho_a$ translaatio, sillä se säilyttää suunnan ja sillä ei ole kiintopistettä: $P = P^{\rho_b \rho_a}$ jos ja vain jos $P^{\rho_a} = P^{\rho_b}$ jos ja vain jos $P \in a \cap b$. Mutta rajoitettu kuvio ei ole suljettu translaation suhteen, sillä $P^{\tau^k} P = kt$, missä t on translaation τ pituus. Tässä $kt > c$ tarpeeksi suurella k .

Oletetaan, että symmetria-akselit a, b, c eivät ole yhdensuuntaiset eivätkä konkurreetit. Tällöin $\alpha = \rho_c \rho_b \rho_a$ kiinnittää kuvion F (ehkä ei pisteittäin). Se on lauseen 4.21 mukaan siirtopeilaus, mutta siirtopeilauksen toinen potenssi α^2 on translaatio. Tämä on jälleen ristiriita, ja väite seuraa yleiselle tapaukselle, jossa on miten monta symmetria-akselia tahansa.