

PUOLIRYHMÄT Dem. II 23.3. 2017

- 1 Osoita, että puoliryhmän $(\mathbb{N}_+, +)$ jokainen alipuoliryhmä on äärellisesti generoitu.
- 2 Puoliryhmä S on **periodinen**, jos kaikilla $x \in S$ syklinen alipuoliryhmä $[x]_S$ on äärellinen. Osoita, että

$$S = \{\alpha \in T_{\mathbb{N}} \mid \text{kuvajoukko } \alpha(\mathbb{N}) \text{ on äärellinen}\}$$

on *ääretön* periodinen puoliryhmä.

- 3 Osoita, että puoliryhmän idempotentit eivät välttämättä muodosta alipuoliryhmää.
- 4 Olkoon T_n joukon $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 2$) täysi transformaatiopuoliryhmä, ja olkoon $A \subseteq T_n$ sen jokin generoijajoukko: $[A] = T_n$. Osoita väitteet (a)–(c).
- (a) Joukossa A olevat permutaatiot generoivat symmetrisen ryhmän S_X (eli kaikki joukon X permutaatiot).
- (b) Joukossa A on alkio α , jonka kuvajoukko toteuttaa ehdon $|\alpha(X)| = n - 1$.
- 5 Olkoon $I_X \leq T_X$ kaikkien *injektiivisten* kuvausten $X \rightarrow X$ muodostama puoliryhmä. Osoita, että puoliryhmällä S on uskollinen esitys $\varphi: S \hookrightarrow I_X$ jollain X jos ja vain jos S on vasemmalta supistuva ja E_S on tyhjä tai koostuu S :n ykkösalkiosta.
- 6 Olkoon $\delta \subseteq S \times S$ ekvivalenssirelaatio puoliryhmässä S . Osoita, että

$$\delta^b = \{(x, y) \mid \forall u, v \in S^1 : (uxv, yv) \in \delta\}$$

on suurin kongruenssi, jolle $\delta^b \subseteq \delta$.