PUOLIRYHMÄT Dem. IV 6.4. 2017

$\boxed{1}$ Osoita, että vapaa monoidi M toteuttaa **jaollisuusehdon**: kaikille $x, y, s, r \in M$,

$$\begin{aligned} xy = rs \implies & \text{(i) } \exists u \in M : \; x = ru \text{ ja } s = uy \\ & \text{tai (ii) } \exists v \in M : \; r = xv \text{ ja } y = vs\,. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Olkoon M jaollisuusehdon toteuttava monoidi, jolle on **pituusfunktio**, eli homomorfismi $\ell \colon M \xrightarrow{\text{hom}} (\mathbb{N}, +)$, jolle $\ell(x) = 0$ jos ja vain jos $x = 1_M$. Osoita, että M on vapaa.

$\boxed{3}$ (Nielsen) Tarkastellaan matriisipuoliryhmää $\mathbb{Z}^{2\times 2}$. Olkoon $\mathbb{F}$ alipuoliryhmä, joka koostuu matriiseista

$$M = \begin{pmatrix} 2^m & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ missä } 0 \le n < 2^m.$$

Osoita, että $\mathbb{F}$ on vapaa monoidi.

$\boxed{4}$ Tarkastellaan esitystä

$$\begin{aligned} S = \langle x, y, z \mid & \, x^2 = z, \; y^2 = z, \; z^2 = z, \\ & xz = z, \; yz = z, \; zx = z, \; zy = y, \\ & xyx = x, yxy = y \rangle \,. \end{aligned}$$

Osoita, että S on äärellinen puoliryhmä.

$\boxed{5}$ Olkoon $S_1 = \langle A \mid R_1 \rangle$ ja $S_2 = \langle A \mid R_2 \rangle$ puoliryhmien S_1 ja S_2 esityksiä, missä $R_1 \subseteq R_2$. Osoita, että S_2 on puoliryhmän S_1 homomorfinen kuva.

$\boxed{6}$ Tarkastellaan esitystä

$$S = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid a_i^2 = a_i, \; a_i a_j = a_j a_i \text{ kaikille } i, j \rangle \,.$$

Montako alkiota puoliryhmässä on?