

PUOLIRYHMÄT Dem. V 13.4. 2017

- 1** Olkoot ρ ja δ joukon X kommutoivia ekvivalenssirelaatioita: $\rho \circ \delta = \delta \circ \rho$. Osoita, että $\rho \circ \delta$ on pienin ekvivalenssirelaatio, joka sisältää molemmat relaatiot ρ ja δ . (Niinpä \mathcal{D} on pienin ekvivalenssirelaatio, jolle $\mathcal{L} \cup \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$.)
- 2** Osoita, että kommutatiivisessa puoliryhmässä S on $\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{J} = \mathcal{D}$.
- 3** Olkoon S supistuva puoliryhmä, jossa ei ole ykkösalkiota. Todista, että kaikilla $x, y \in S$ on $x, y \in S : xy \neq x$ ja $xy \neq y$, ja, että $\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{H} = \iota$.
- 4** Oletetaan, että $xy \in R_x \cap L_y$ joillain $x, y \in S$. Osoita, että $H_x H_y = H_{xy}$.
- 5** Tarkastellaan puoliryhmää T_X , missä X on äärellinen. Esimerkissä 4.1 osoitettiin, että $\alpha \mathcal{R} \beta \iff \alpha(X) = \beta(X)$. Todista
 - (a)** $\alpha \mathcal{L} \beta \iff \ker(\alpha) = \ker(\beta)$.
 - (b)** $\alpha \mathcal{D} \beta \iff |\alpha(X)| = |\beta(X)|$.
 - (c)** $\mathcal{J} = \mathcal{D}$.
 - (d)** $\alpha \mathcal{H} \beta \iff \alpha(X) = \beta(X)$ ja $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$.(Tässä $\ker(\alpha) = \{(x, y) \mid \alpha(x) = \alpha(y)\}$ kuten homomorfismeille).
- 6** Olkoon S puoliryhmä ja $e \in E_S$ sen idempotentti. Osoita, että $L_e R_e = D_e$, missä siis $L_e R_e = \{xy \mid x \in L_e, y \in R_e\}$.