

# Faddeevin-Skyrmen mallin vorteksiratkaisuista

Pro gradu -tutkielma  
Turun yliopisto  
Fysiikan laitos  
Teoreettinen fysiikka  
2002

Juha Jäykkä

Tarkastajat:

prof. Jarmo Hietarinta

prof. Jyrki Lahtonen

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Matemaattisia perusteita</b>	<b>5</b>
2.1	Algebrallista topologiaa . . . . .	5
2.2	Differentiaaligeometriaa . . . . .	7
2.2.1	Ulkoderivointi . . . . .	8
2.2.2	Differentiaalimuodon integrointi . . . . .	11
2.2.3	Astekuvaus ja Hopfin invariantti . . . . .	12
2.2.4	Hopfin invariantti alkukuvien linkityslukuna . . . . .	19
2.3	Klassista kenttäteoriaa . . . . .	21
2.3.1	Lagrangen tiheys ja Eulerin-Lagrangen yhtälöt . . . . .	21
2.3.2	Nötherin lause . . . . .	23
2.3.3	G. H. Derrick ja solitoniratkaisun metsästys . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Skyrmen ja Faddeevin mallit: analyttisiä tarkasteluja</b>	<b>27</b>
3.1	Skyrmen epälineaarinen $\sigma$ -malli . . . . .	27
3.1.1	Kineettinen osa . . . . .	28
3.1.2	Topologinen osa . . . . .	29
3.1.3	Skyrmionit . . . . .	34
3.2	Faddeevin-Skyrmen malli . . . . .	35
3.2.1	Kineettinen osa . . . . .	36
3.2.2	Topologinen osa . . . . .	36
3.2.3	Faddeevin-Skyrmen mallin Lagrangen tiheys . . . . .	37
3.2.4	Kaksi ratkeavaa mallia . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Faddeevin kentän liikeyhtälöiden numeerisesta ratkaisemisesta: aikaisempia tuloksia</b>	<b>43</b>
4.1	Numeerisista menetelmistä . . . . .	44
4.1.1	Derivaatan diskretointi . . . . .	44

4.1.2	Jyrkimmän suunnan menetelmä (gradienttimenetelmä) . . .	44
4.1.3	Liittogradienttimenetelmä . . . . .	45
4.1.4	Numeeristen menetelmien ongelmista . . . . .	46
4.2	Faddeevin-Skyrmen mallin lenkki- ja solmuratkaisuista . . . . .	47
4.2.1	Visualisoinnista . . . . .	48
4.2.2	Varaukset $Q = 1$ ja $2$ . . . . .	49
4.2.3	Varaus $Q = 3$ . . . . .	50
4.2.4	Varaukset $Q \in \{4, 5, 6, 7\}$ . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Solmuvorteksit</b>	<b>54</b>
5.1	Alkutiloista . . . . .	54
5.1.1	Renkaan ja vorteksin rakentaminen . . . . .	55
5.1.2	Rengasvorteksin rakentaminen . . . . .	56
5.2	Rengasvorteksit . . . . .	60
5.3	Taipuneet vorteksit . . . . .	63
5.4	Minimienergiatilat ja Vakulenkon-Kapitanskiin raja . . . . .	65
5.5	Etelänavan alkukuvan topologiasta . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Yhteenveto</b>	<b>71</b>
6.1	Tulosten vertailua . . . . .	71
6.2	Mihin seuraavaksi? . . . . .	72
<b>A</b>	<b>Merkinnöistä</b>	<b>73</b>

# Kuvat

2.1	Mahdolliset alkukuvien risteykset ja linkitysluku . . . . .	21
4.1	Varauksen $Q = 1$ alku- ja minimienergiatilat . . . . .	51
4.2	Varausten $Q = 2$ ja $Q = 3$ minimienergiatilat . . . . .	51
4.3	Varauksen $Q = 4$ alku- ja minimienergiatilat . . . . .	53
4.4	Varausten $Q = 5$ ja $Q = 6$ minimienergiatilat . . . . .	53
4.5	Varauksen $Q = 7$ eräs alkutila ja minimienergiatila . . . . .	53
5.1	Yksinkertaisen rengasvorteksin liitoksesta aiheutuvan varauksen las- keminen . . . . .	58
5.2	Kaikki varauksen $ Q  = 1$ renkaat . . . . .	58
5.3	Erilaisia $ Q  = 1$ osista saatavia rengasvortekseja . . . . .	59
5.4	Etelänavan alkukuva $xy$ -tasossa . . . . .	60
5.5	Varauksen $Q = 7$ alku- ja lopputilat . . . . .	62
5.6	Renkaiden ja vorteksin muodostamien systeemien energiakehitykset	66
5.7	Vorteksitilojen energiakehitykset . . . . .	66
5.8	Lopputilojen energiat verrattuna pienimmällä neliösummalla sovitet- tuun arvoon, keskiarvoon ja Wardin ennusteeseen . . . . .	67
5.9	Varauksen $Q = 7$ vorteksitilan etelänavan alkukuvat . . . . .	70
5.10	Alkukuvan kahden osan törmäys . . . . .	70

# Taulukot

5.1	Tutkitut renkaista ja vorteksista kootut alkutilat . . . . .	61
5.2	Tutkitut vorteksialkutilat . . . . .	64

# Luku 1

## Johdanto

Viime vuosikymmeninä epälineaariset ilmiöt ovat vakiinnuttaneet paikkansa fysiikan tutkimuksessa. Epälineaarisia ilmiöitä sisältävien mallien tutkimuksessa on kuitenkin yksi suuri hankaluus: lähes aina päädytään johonkin epälineaariseen osittaisdifferentiaaliyhtälöön ja näiden ratkaiseminen on usein ylivoimaisen hankalaa. Joillekin malleille voidaan löytää erikoisratkaisuja ja jopa kokonaisia ratkaisuhierarkioita, kuten Korteweg-de Vries -yhtälölle, mutta useampiulotteiset mallit jäävät yleensä vaille analyttistä ratkaisua. Jotkin moniulotteisetkin mallit ratkeavat sopivalla muuttujien separoinnilla tai yritteellä, jolloin epälineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö saadaan muunnettua yhdeksi tai useammaksi epälineaariseksi differentiaaliyhtälöksi, joiden ratkaiseminen on huomattavasti helpompaa. Näin voidaan tehdä esimerkiksi Skyrmen mallille. Aina tämäkään ei auta tai sopivaa separaatiota tai yritettä ei löydy ja silloin on turvauduttava numeerisiin menetelmiin. Täyden mallin, missä on kolme avaruusulottuvuutta ja aika, ratkaiseminen numeerisestikin on niin vaativa tehtävä, että tietokoneiden laskentakapasiteetit ovat vasta aivan viime vuosina kasvaneet riittäviksi. Tästä syystä numeerisiakin menetelmiä varten pyritään löytämään jokin muuttujat separoiva yrite ja vasta mikäli tässä ei onnistuta, turvaudutaan täyden mallin numeeriseen tutkimiseen.

Numeeristen menetelmien lisäksi merkittävä apuväline on löydetty algebrallisesta topologiasta. Algebrallisen topologian peruspilarina ovat homotopiar ryhmät, joiden alkioita sanotaan homotopialuokiksi. Homotopialuokkien voidaan ajatella muodostuvan niistä kahden avaruuden välisistä kuvauksista, jotka voidaan muuttaa toisikseen jatkuvalla kuvauksella. Fysiikassa tätä yleensä sovelletaan siten, että tämä jatkuva kuvaus ajatellaan liikeyhtälöiden ratkaisun muutokseksi ajan mukana. Lisäksi oletetaan fysikaalisten ilmiöiden olevan jatkuvia ajan suhteen, joten ratkaisu ei voi ajan mukana siirtyä luokasta toiseen. Mikäli liikeyhtälöillä on eri homotopialuok-

kiin kuuluvia ratkaisuja, on jokaisessa luokassa oma, mahdollisesti degeneroitunut, minimienergiatilansa, joka ei siis voi ajan kuluessa muuttua toisen luokan tilaksi. Mikäli tämän ratkaisun energia riippuu sen homotopialuokasta, saadaan fysikaalisesti erilaisia, topologisista syistä stabiileja ratkaisuja, joita kutsutaan defekteiksi ja topologisiksi solitoneiksi. Nimitys defekti on käytössä erityisesti kiinteän olomuodon fysiikassa, sillä silloin tällaiset ratkaisut usein esiintyvät kidevirheinä ja muina vastaavina ”huonoina” ominaisuuksina. Termi topologinen solitoni taas on käytössä laajasti hiukkasfysiikassa ja kosmologiassa. Termin *solitoni* käyttö on tosin tässä yhteydessä on valitettavan löysää, sillä vain harvoin on kyseessä varsinainen solitoni, sillä topologinen stabiilius ei takaa solitonilta vaadittavaa dynaamista stabiiliutta esimerkiksi törmäyksissä.

Topologia solitoneja esiintyy lähes jokaisella fysiikan alalla; niitä ovat nestekiteiden kidevirheet [1], Bose-Einstein -kondensaateissa esiintyvät pyörteet ja skyrmionit [2, 3, sekä näiden viitteet],  $^3\text{He}$ -supranesteessä esiintyvät pyörteet ja pyörrepinnat [4, 5] sekä ferromagneettien solitonit ja pyörrenelit [6]. Kosmologiassa universumin rakenteiden muodostumista tutkittaessa esiintyvät kosmiset säikeet ja alueseinämät (domain wall) [7] sekä vorteksit [8] ovat myös topologia solitoneja. Lisäksi topologia solitoneja esiintyy myös lähes kaikissa hiukkasfysiikan standardimallin laajennuksissa - sekä supersymmetrisissä teorioissa että yhtenäisteorioissa. Itse standardimalliinkin voidaan tuottaa topologia solitoniratkaisuja asettamalla Weinbergin-Salamien kulma sopivaan arvoon [9, 10].

E erityisen mielenkiintoiseksi algebrallisen topologian merkityksen fysiikassa tekee se, että saman homotopiaryhmän samaan homotopialuokkaan kuuluvilla kuvauksilla on yhteisiä ominaisuuksia riippumatta siitä, mitä fysikaalista systeemiä ne kuvaavat. Niinpä kosmisia säikeitä onkin mallinnettu laboratoriossa  $^3\text{He}$ -supranesteen pyörteillä [5, 11–14], nemaattisten nestekiteiden sisältämällä viiva- ja pistevirheillä [15–17] ja jopa suprajohteilla [18]. Kvanttikromodynamiikassa esiintyviä gluonipalloja taas on mallinnettu Bose-Einstein -kondensaatin solitoneilla [19] ja suprajohteilla [20]. Mitään näistä ei kuitenkaan vielä ole kyetty kokeellisesti muodostamaan, ilmeisesti niiden vaatiman hankalan topologian takia. Tähän on kuitenkin jo esitetty mahdollisia ratkaisuja [19] eikä varmasti kestä kauaa ennen kuin niitä saadaan muodostettua.

Ensimmäiset yhteydet algebrallisen topologian ja kenttäteorioiden välillä lienevät P. A. M. Diracin magneettinen monopoli [21, 22] sekä T. H. R. Skyrmen baryonimalli [23–26]. Mittakenttäteorioiden läpimurron jälkeen algebrallinen topologia vakiinnutti asemansa hiukkasfysiikassa mm. ’t Hooftin ja Polyakovin magneettisen

monopolin [27, 28] sekä Julian ja Zeen dyonin [29] myötä. Vaikkei Skyrmen ajatus mallintaa baryoneja hänen mallissaan esiintyvien topologisten solitonien avulla saavuttanutkaan suosiota, tutkittiin 1960- ja 1970-lukujen vaihteessa mahdollisuutta kuvata alkeishiukkasia puhtaasti topologian keinoin. Näissä malleissa eri hiukkasia kuvasivat erilaiset virtasolmut, jotka olivat topologisten ominaisuuksiensa stabiloimisia (katso esimerkiksi [30] ja sen viitteet). Yksikään silloinen kvantitatiivinen alkeishiukkasmalli ei kuitenkaan sallinut solmumaisia topologisia solitoneja, joten näiden topologisten mallien toimivuutta ei voitu testata. Tälle pohjalle Ludwig Faddeev rakensi nykyään Faddeevin-Skyrmen mallina tunnetun teoriansa [31, 32]. Faddeevin malli on rakennettu siten, että se nimenomaan mahdollistaa solmumaisten topologisten solitonien olemassaolon. Ajatus solmuista ei sinällään ollut uusi, sillä ehdotettiin jo lordi Kelvin aikanaan, että atomiytimet olisivat eräänlaisia solmuja [33]. Faddeevin-Skyrmen mallille ei kuitenkaan kyetty löytämään yhtäkään analyyttistä epät triviaalia ratkaisua ja siksi sen tutkimus jäi pitkäksi aikaa muutaman paperin varaan [34, 35]. Kuten aiemmin jo on todettu, topologisia solitoneja alettiin myöhemmin soveltaa moniin eri ilmiöihin kosmisista säikeistä nestekiteisiin. Kun tähän vielä lisättiin tehdyt havainnot pyörremäisistä rakenteista  $^3\text{He}$ -supranesteessä [5, 11, 12] ja diskliinaatioista nemaattisissa nestekiteissä [15], heräsi kiinnostus Faddeevin mallia kohtaan uudelleen 1990-luvun puolivälissä. Yksi ensimmäisiä yrityksiä liittää Faddeevin-Skyrmen malli johonkin fysikaaliseen ilmiöön oli sen solmumaisten topologisten solitonien käyttäminen kuvaamaan kvarkit hadroneiksi sitovia värivirtalenkkejä ja gluonipalloja [36, 37]. Näistä ensimmäinen on erityisen mielenkiintoinen, sillä kvarkkien sitoutumista hadroneiksi on yritetty jo pitkään ymmärtää, mutta toistaiseksi tyydyttävää selitystä ei ole.

Tämän työn kannalta suurin mielenkiinto Faddeevin-Skyrmen mallia kohtaan ei kuitenkaan johdu gluonipalloista tai värivirtalenkeistä vaan siitä, että se on yksinkertaisin mahdollinen kenttäteoria, minkä ratkaisuna esiintyy solmumaisia topologisia solitoneja. On olemassa monia malleja, jotka ovat topologiansa kannalta samanlaisia kuin Faddeevin-Skyrmen malli tai sisältävät sen osanaan. Näitä ovat esimerkiksi Landaun-Lifshitzin ferromagneettimalli [6], kaksikomponenttinen bose-kaasu [20], sähköä johtava plasma [38], kaksoisaukkosuprajohteet [39] ja ferromagneettiset spin-triplettisuprajohteet [40] sekä sekä efektiivinen matalaenerginen Yang-Mills -teoria [36, 37].

Faddeevin-Skyrmen mallia tutkimalla voidaan saada tietoa monien eri systeemien ominaisuuksista, koska se esiintyy niin monessa eri yhteydessä. Tässä työssä on keskitytty tutkimaan mallin vorteksimaisten topologisten solitonien energiaa ja

muotoa sekä itseisvuorovaikutusta. Itse asiassa osoittautuu, että suinkaan kaikki mallin topologiset solitonit eivät ole solmumaisia, vaan oikeiden solmujen lisäksi esiintyy ainakin epäsolmuja ja yhteen kytkettyjä epäsolmuja [41]. Epäsolmu nimitys seuraa siitä, että mistä tahansa kohdasta katkaistun epäsolmun voi saaduista päistä “vetää” suoraksi kun taas aitoa solmua ei. Nimitys on siis hyvin intuitiivinen. Epäsolmun prototyyppi on ympyrä, kun taas kolmisolmu on yksinkertaisin mahdollinen aito solmu. Faddeevin-Skyrmen mallin jo tunnetuista ominaisuuksista mainittakoon tässä kolmisolmun muotoiseen ratkaisuun päätyminen epäsolmun muotoisen alkutilan energiaa minimoimalla. Vaikka kyseessä onkin yhden analyttisen yrittien relaxoituminen minimienergiatilaansa, voidaan tästä päätellä, millaisia prosesseja monen solitonin systeemissä voi tapahtua. Näiden vuorovaikutuksia ei kuitenkaan vielä ole tutkittu täydellä dynamiikalla, joten kahden tai useamman solitonin vuorovaikutusprosessit ovat vielä tuntemattomia. Avoin kysymys on myös, ovatko saadut ratkaisut globaaleja energian minimejä vai eivät, sillä jotkin ratkaisut eivät näyttäisi noudattavan vaadittua energiaspektriä [35, 41].

# Luku 2

## Matemaattisia perusteita

Fysiikan tutkimuksessa käytetään apuna matematiikan monia eri aloja. Tämän työn osalta merkittävimmät alat ovat topologia ja differentiaaaligeometria, jotka esitellään tässä luvussa tarpeellisilta osiltaan. Tässä sivuutetaan ne lauseiden todistukset, jotka sellaisenaan löytyvät kirjallisuusviitteinä annetuista lähteistä, ja annetaan vain tarpeelliset kirjallisuusviitteet.

Tässä luvussa kerrataan myös lyhyesti klassisen kenttäteorian keskeiset tulokset.

### 2.1 Algebrallista topologiaa

Fysiikan teorit käyttävät nykyään paljon hyväkseen algebrallista topologiaa ja geometriaa. Tässä kappaleessa keskitytään niihin algebrallisen topologian tuloksiin, joita tarvitaan Faddeevin-Skyrmen kentän tilojen luokittelussa niiden Hopfin invariantin avulla.

Määritelmässä ja merkinnöissä on löyhästi mukailtu kirjaa [42]; ne löytyvät myös liitteestä A. Sen lisäksi tässä kappaleessa on voimassa seuraavat sopimukset.

Parit  $(X, \mathcal{T})$  ja  $(Y, \mathcal{T}')$  ovat topologisia avaruuksia, usein kuitenkin merkitään vain  $X$  ja  $Y$ , mikäli ei haluta painottaa tiettyjä topologioita. Topologisten avaruuksien  $X_1$  ja  $X_2$  karteesinen tulo, topologianaan tulotopologia, merkitään  $X_1 \times X_2$  sekä  $\forall n \in \mathbb{N}: X^n = \bigotimes_{i=1}^n X$ .

**Määritelmä 2.1 (Homotopia).** Olkoot  $f, g: X \rightarrow Y$  jatkuvia kuvauksia. Jos on olemassa jatkuva kuvaus  $h: X \times I \rightarrow Y$  siten, että  $\forall x \in X: h_0(x) = f(x)$  ja  $h_1(x) = g(x)$ , niin sanotaan, että  $f$  ja  $g$  ovat *homotooppiset*. Tämä merkitään  $f \simeq g$ .

Lyhyellä laskulla nähdään, että homotopia on ekvivalenssirelaatio. Se siis jakaa jatkuvat kuvaukset  $X \rightarrow Y$  ekvivalenssiluokkiin. Merkitään kuvausta  $f$  vastaavaa

ekvivalenssiluokkaa symbolilla  $[f]$ . Edelleen on helppo nähdä, että ekvivalenssiluokat ovat edustajistaan riippumattomia, eli  $[f] = [g]$ , jos  $g \simeq f$ . Erityisen tärkeä erikoistapaus algebrallisen topologian kannalta on (absoluuttisen) *homotopiaryhmän* käsite. Sen määrittämiseksi teemme ensin kuitenkin sen käsittelyä helpottavia määritelmiä.

**Määritelmä 2.2 ( $n$ -lenkki).** Olkoon  $f: I^n \rightarrow X$  jatkuva. Jos  $\exists x \in X$  siten, että

$$\forall \mathbf{t} \in \partial(I^n): f(\mathbf{t}) = x,$$

sanotaan, että  $f$  on  $n$ -lenkki  $X$ :ssä.

**Huomautus 1.** Kuvausta  $f: I \rightarrow X$  sanotaan yksinkertaisesti *poluksi*, jolloin suljettu polku on 1-lenkki.

**Huomautus 2.** Olkoon  $\gamma$  polku. Helposti nähdään, että  $\gamma(1-t)$ , kun  $t \in I$ , kulkee polkua  $\gamma$ , mutta päinvastaiseen suuntaan. Määritelläänkin polun  $\gamma$  *käänteispolku* kaavalla  $\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ . Samoin määritellään  $n$ -lenkille  $\gamma$  *käänteislenkki* kaavalla  $\overleftarrow{\gamma}(\mathbf{t}) = \gamma(1-t_1, t_2, \dots, t_n)$ , kun  $\mathbf{t} \in I^n$ .

**Määritelmä 2.3 (Kompositio).** Olkoot  $f$  ja  $g$   $n$ -lenkkejä  $X$ :ssä, joille  $f(1, \dots) = g(0, \dots)$  sekä  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in I^n$ . Merkitään

$$(f * g)(\mathbf{t}) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{kun } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, t_3, \dots, t_n) & \text{kun } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Kuvaus  $f * g$  on aina jatkuva ja sitä kutsutaan  $f$ :n ja  $g$ :n *kompositioksi*.

**Määritelmä 2.4 (Homotopiaryhmä).** Olkoon  $x_0 \in X$ ,  $\mathbf{t} \in \partial(I^n)$  ja  $0 < n \in \mathbb{N}$ . Joukko

$$\pi_n(X, x_0) = \{[f] \mid f \text{ on } n\text{-lenkki } X\text{:ssä, jolle } f(\mathbf{t}) = x_0\}$$

on nimeltään topologisen avaruuden  $X$   $n$ :s. (*absoluuttinen*) *homotopiaryhmä*, kun kaikille  $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$  määritellään ryhmäoperaatio

$$[f] \cdot [g] = [f * g].$$

Ryhmäoperaatio on hyvin määritelty, koska jäännösluokka ei riipu edustajan valinnasta ja ehdosta  $f(\mathbf{t}) = x_0$  seuraa, että kompositio on aina määritelty. Ryhmän ykkösalkiona on vakiokuvauksen ekvivalenssiluokka  $\mathbb{I}_{\pi_n(X, x_0)} = [x_0]$  ja vasta-alkiona käänteislenkki:  $[f]^{-1} = [\overleftarrow{f}]$ .

On myös suoraviivaista tarkastaa, että näin saatu pari  $(\pi_n(X, x_0), \cdot)$  todellakin muodostaa ryhmän. Tämän osoittamiseksi pitäisi vielä osoittaa operaation assosiatiivisuus sekä ykkös- ja käänteisalkoiden yksikäsitteisyys ja molemminpuolisuus. Tämä on tehty esimerkiksi kirjassa [42] sivuilla 340.<sup>1</sup>

Mikäli sekaannuksen vaaraa ei ole, merkitään  $\mathbb{I}_\pi \equiv \mathbb{I}_{\pi_n(X, x_0)}$ . On myös mahdollista määritellä  $\pi_0(X, x_0)$ , mutta koska sitä ei tässä tarvita, se sivuutetaan.

**Huomautus 3.** Polkuyhtenäisten avaruuksien kohdalla voidaan kantapiste jättää merkitsemättä ja käyttää lyhennysmerkintää  $\pi_n(X) = \pi_n(X, x_0)$ .

**Lause 2.5.**  $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \cong \pi_2(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \pi_3(S^2)$ .

*Todistus.* Lauseen todistaminen vaatii useiden algebrallisen topologian tulosten ja käsitteiden tuntemista eikä tässä ole syytä syventyä niihin. Tarvittavat kohdat löytyvät kirjan [42] luvuista 1 ja 4. □

## 2.2 Differentiaaligeometriaa

Ennen kenttäteoriaan sekä Skyrmen ja Faddeevin-Skyrmen malleihin uppoutumista on syytä tutustua myös astekuvaukseen ja niin kutsuttuun Hopfin invarianttiin. Astekuvauksella voidaan luokitella Skyrmen mallin kentät ja Hopfin invariantilla Faddeevin-Skyrmen mallin kentät. Tullaan osoittamaan, että astekuvaukset liittävät jokaiseen kuvaukseen  $f: X^n \rightarrow Y^n$  kokonaisluvun  $\deg f$ , ja Hopfin invariantti liittävät jokaiseen kuvaukseen  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$  kokonaisluvun  $H(f)$ . Molemmat ovat homotopiainvariantteja, joten nämä luvut ovat samat jokaiselle homotopialuokan  $[f]$  alkiolle. Näiden ominaisuuksien perusteella ne voidaankin mieltää kuvauksiksi  $\deg: \pi_n(Y^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  ja  $H: \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Hopfin invariantille voitaisiin esittää monitakin ekvivalenttia määritelmää, mutta käytetään tässä suoraviivaista differentiaaligeometristä määritelmää, koska siihen riittää sama pohjatieto kuin astekuvauksen määritelmään. Viitteessä [43, sivut 228-234] on esitelty muutkin tavat määritellä Hopfin invariantti.

Tullaan näkemään, että yllä esitetyt kuvaukset  $\deg$  ja  $H$  ovat itse asiassa jopa isomorffioita, joten ne luokittelevat vastaavien kenttien eri tilat homotopialuokkiin. Muiden fysiikan mallien tapaan kenttien oletetaan olevan  $C^\infty$ -luokan kuvauksia, mutta koska differentioituvat kuvaukset riittävät määrittämään homotopialuokat

---

<sup>1</sup>Huomaa, että [42]:ssa käytetään merkintää  $+$  ryhmäoperaatiolle. Additiivinen merkintä on luonnollinen kun  $n \geq 2$ , mutta yleisessä tapauksessa ryhmä ei välttämättä ole abelinen.

[43, sivu 214], käsitellään vain niitä niin kauan kuin mahdollista. Lisäksi myöhemmin tullaan näkemään, että molemmissa malleissa jokaisen homotopialuokan kenttien energiat ovat alhaalta rajoitettuja ja nollafunktion homotopialuokkaa lukuunottamatta tämä raja on nollaa suurempi. Koska kentän muutos ajan funktiona oletetaan fysiikassa jatkuvaksi, tarkoittaa tämä sitä, ettei tila voi siirtyä homotopialuokasta toiseen, joten jokaisessa homotopialuokassa on olemassa jokin - mahdollisesti degeneroitunut - tila, jolla on sen luokan alin energia. Mikäli muissa kuin nollafunktion homotopialuokissa on olemassa Eulerin-Lagrangen yhtälöiden ratkaisuja, on siis myös niistä jokin energieettisesti stabiili. Näiden ratkaisujen löytämiseksi tarvitaan kuitenkin jokin saman homotopialuokan tila, josta numeerisin menetelmin voidaan löytää samaan luokkaan kuuluva ratkaisu. Koska varsinaisena tutkimuksen kohteena on Faddeevin-Skyrmen malli, tutkitaan nyt, miten voidaan luoda tila, jolla on mielivaltainen Hopfin invariantti. Käy ilmi, että on olemassa erityinen kuvaus, Hopfin kuvaus, jolla voidaan "kopioida" kenttä, jolle  $\deg(f) = n$ , kentäksi, jolle  $H(f) = n$ . Näin ollen riittää, kun osataan konstruoida Skyrmen mallin kenttä, jolla on haluttu  $\deg$  ja josta tarpeen mukaan saadaan myös Faddeevin-Skyrmen mallin vastaava kenttä. Tämä on mukavaa, sillä kuvauksen asteen laskeminen on suoraviivaista ja on helppo konstruoida asteen  $n$  kuvaus, kun taas Hopfin invariantin laskeminen on mahdollisesti hyvinkin hankalaa eikä mielivaltaisen invariantin kuvausta ole helppo löytää suoraan.

Tässä kappaleessa käytetään Einsteinin summaussääntöä hyvin vapaasti eikä indeksien arvojoukkoja mainita erikseen, koska ne selviävät aina avaruudesta tai muodosta. Lisäksi isoilla kirjaimilla merkityt indeksit ovat järjestettyjä:  $I_j < I_{j+1}$ .

Sen sijaan edellisestä luvusta poiketen merkinnällä  $X^n$  ei tarkoiteta karteesista tuloa. Luku  $n$  on edelleen kyseisen avaruuden dimensio, mutta kyseessä ei välttämättä ole minkään avaruuksien karteesinen tulo. Edelleen pienille kirjaimille pätee  $x \in X^n$ , ellei toisin mainita. Muilta osin merkinnöissä pyritään seuraamaan kirjaa [44].

### 2.2.1 Ulkoderivointi

**Määritelmä 2.6 (Topologinen  $n$ -monisto).** Mikäli topologinen avaruus  $X$  on Hausdorff ja sen jokaisella pisteellä on ympäristö, joka on homeomorfinen avaruuden  $\mathbb{R}^n$  kanssa, sanotaan, että  $X$  on *topologinen  $n$ -monisto*.

Mikäli moniston dimensiosta ei ole epäselvyyttä, voidaan se jättää merkitsemättä ja puhua vain topologisesta monistosta.

**Määritelmä 2.7 (Kartta).** Olkoon  $X$  topologinen  $n$ -monisto,  $U \subset X$  ja  $V \subset \mathbb{R}^n$  avoimia sekä  $\phi: U \rightarrow V$  homeomorfia. Silloin paria  $(U, \phi)$  sanotaan moniston  $X$  *kartaksi*.

**Määritelmä 2.8 (Kartasto).** Olkoot  $(U_i, \phi_i)$  moniston  $X$  karttoja, joille  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i = X$ . Mikäli kuvaukset

$$\phi_{i_1} \circ \phi_{i_2}^{-1}: \phi_{i_1}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \rightarrow \phi_{i_2}(U_{i_1} \cap U_{i_2})$$

ovat avointen  $\mathbb{R}^n$ :n osajoukkojen kuvauksia  $\mathbb{R}^n$ :lle, sanotaan, että joukko  $\{(U_i, \phi_i)\}$  on moniston  $X$  *kartasto*. Mikäli kuvaukset  $\phi_{i_1} \circ \phi_{i_2}^{-1}$  ovat luokkaa  $C^p$ , sanotaan kartaston olevan myös luokkaa  $C^p$ .

**Määritelmä 2.9 (Differentioituva monisto).** Olkoon  $X$  monisto ja  $A$  sen kartasto. Mikäli kartasto on luokkaa  $C^p$ , sanotaan, että pari  $\mathcal{M} \equiv (X, A)$  on  $p$  kertaa differentioituva monisto. Yleensä käyttöön tulevat tapaukset  $p = 1$  ja  $p = \infty$ , jolloin paria  $\mathcal{M}$  kutsutaan vastaavasti *differentioituvaksi monistoksi* ja *sileäksi monistoksi*.

**Määritelmä 2.10 (Reunallinen monisto).** Olkoon  $\{(U_i, \phi_i)\}$   $n$ -moniston  $\mathcal{M}$  kartasto. Merkitään symbolilla  $\mathbb{R}^{n+}$  avaruuden  $\mathbb{R}^n$  osajoukkoa, jolle  $x_n \geq 0$ . Joissakin kartoissa  $\phi_i(U_i) \in \mathbb{R}^n$  ja joissakin  $\phi_i(U_i) \in \mathbb{R}^{n+}$ . Moniston  $\mathcal{M}$  reuna  $\partial\mathcal{M}$  on niiden pisteiden joukko, jotka  $\phi_i$  kuvaavat avaruuteen  $\mathbb{R}^{n-1} \in \mathbb{R}^{n+}$ .

**Määritelmä 2.11.** Olkoon  $X$   $n$ -monisto,  $\phi_i$  sen karttakuvaukset ja  $u_j \in X$ . Olkoon  $x^i := \phi^i(\mathbf{u})$  ja toteuttakoot  $dx_1, \dots, dx_n$  sekä operaattori  $\wedge$  ehdon

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i. \quad (2.1)$$

Näiden generoimaa algebraa merkitään symbolilla  $\Lambda$ . Lisäksi kukin joukko

$$\left\{ \bigwedge_{j=0}^k dx_{I_j} \mid \bigwedge_{j=0}^0 dx_{I_j} = 1 \right\}, \quad (2.2)$$

kun  $k \in [0, n]$ , muodostaa reaalikertoimisen vektoriavaruuden kannan. Merkitään näiden joukkojen generoimia avaruuksia vastaavasti symboleilla  $\Lambda^k$ .

**Määritelmä 2.12 (Differensiaalimuoto).** Olkoon  $X$  sileä, differentiaalinen  $n$ -monisto ja  $i_j \in [1, n]$ . Olkoon lisäksi  $p \in [1, n]$  ja  $\alpha_{i_1 \dots i_p}$  kovariantti, täysin antisymmetrinen luokan  $C^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$   $p$ -tensori. Merkitään

$$\Lambda^p(X) := \left\{ \alpha \mid \left\{ \alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} \bigwedge_{j=1}^p dx^{i_j} \right\} \right\} \text{ ja} \quad (2.3)$$

$$\Lambda(X) := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(X). \quad (2.4)$$

Tapaus  $p = 0$  tuottaa jälleen triviaalin algebran  $\Lambda^0(X) := \{0\}$ . Algebroiden  $\Lambda^p(X)$  alkioita kutsutaan nimellä  $C^p$  differentiaalinen  $p$ -muoto ja algebran  $\Lambda(X)$  vastaavasti nimellä  $C^p$  differentiaalimuoto.

Algebraa  $\Lambda$  muodostettaessa käytetty operaattori  $\wedge$  voidaan yleistää differentiaalimuodoille seuraavalla tavalla.

**Määritelmä 2.13 (Kiilatulo).** Olkoot  $\alpha \in \Lambda^p(X)$  ja  $\beta \in \Lambda^q(X)$ . Määritellään kuvaus

$$\wedge: (\Lambda^p(X), \Lambda^q(X)) \rightarrow \Lambda^{p+q}(X), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta \quad (2.5)$$

asettamalla

$$\alpha \wedge \beta := \frac{1}{p!q!} \alpha_{i_1 \dots i_p} \beta_{i_{p+1} \dots i_{p+q}} \bigwedge_{j=1}^{p+q} dx_j^{i_j}. \quad (2.6)$$

Kuvausta  $\wedge$  kutsutaan *kiilatuloksi*.

Voidaan osoittaa, että kiilatulo on assosiatiivinen ja bi-lineaarinen. Se ei kuitenkaan ole kommutatiivinen, sillä jos  $\alpha \in \Lambda^p(X)$  ja  $\beta \in \Lambda^q(X)$ , niin  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$ . Viimeksimainitun ominaisuuden takia sitä kutsutaan usein myös *Grassman-tuloksi*.

**Määritelmä 2.14 (Ulkoderivaatta).** Olkoon  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \Lambda^p(X)$  luokan  $C^k$  muotoja ja  $d: \Lambda(X) \rightarrow \Lambda(X)$  kuvaus, jolla on seuraavat ominaisuudet

a)  $d$  on lineaarinen:  $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$  ja  $d(\lambda\alpha) = \lambda d\alpha$ .

b)  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ .

c)  $d^2 \equiv 0$ .

d) Jos  $f(x)$  on 0-muoto,  $df = \frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a$  eli tavallinen differentiaalimuoto.

Voidaan osoittaa, että nämä ominaisuudet määräävät kuvauksen  $d$  yksikäsitteisesti, joten on järkevää antaa sille nimeksi *ulkoderivaatta (operaattori)*.

**Huomautus 4.** Olkoon  $\alpha \in \Lambda^p(X)$  luokkaa  $C^k$ . Koska  $\Lambda^0(X) = \mathbb{R}$ , voidaan 0-muodolle  $f$  kirjoittaa  $f \wedge \alpha = f\alpha$ . Näin saadaan myös kirjoitettua

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} \bigwedge_{j=1}^p dx^{i_j} = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} \wedge x^{i_1} \bigwedge_{j=2}^p dx^{i_j},$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{1}{p!} (d\alpha_{i_1 \dots i_p}) \wedge dx^{i_1} \bigwedge_{j=2}^p dx^{i_j} = \frac{1}{p!} \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^a} dx^a \wedge dx^{i_1} \bigwedge_{j=2}^p dx^{i_j} \\ &= \frac{1}{p!} \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^{i_1}} \bigwedge_{j=1}^{p+1} dx^{i_j}. \end{aligned}$$

Näin huomataan, että  $d\alpha \in \Lambda^{p+1}(X)$  on luokan  $C^{k-1}$  muoto.

## 2.2.2 Differentiaalimuodon integrointi

Määritellään seuraavaksi nimellä pull back tunnettu kuvaus matemaattisesta kirjallisuudesta poiketen koordinaattiesityksen avulla.

**Määritelmä 2.15 (Pull back).** Olkoon  $f: X^n \rightarrow Y^q$  differentioituva ja  $\omega \in \Lambda^p(Y^q)$ . Silloin  $f^*\omega := \omega \circ f \in \Lambda^p(X^n)$  ja

$$f^*\omega := \frac{1}{p!} (f^*\omega)_{i_1 \dots i_p} \bigwedge_{k=1}^p dx^{i_k} \quad i_k \in [1, n] \quad (2.7)$$

$$(f^*\omega)_{i_1 \dots i_p}(x) := \omega_{a_1 \dots a_p}(f(x)) \prod_{k=1}^p \frac{\partial f^{a_k}}{\partial x^{i_k}} \quad a_k \in [1, q]. \quad (2.8)$$

**Lause 2.16.** Olkoon  $\alpha, \beta \in \Lambda(X)$ . Voidaan osoittaa, että seuraavat väitteet pitävät paikkansa.

- a)  $f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha)$
- b)  $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$ .

*Todistus.* Väitteet seuraavat välittömästi määritelmistä ja ketjusäännöstä.  $\square$

Ennen astekuvauksen käsittelyä pitää tutustua differentiaalimuodon integrointiin. Olkoon  $(U, \phi)$  moniston  $X$  jokin kartta ja  $\omega \in \Lambda^n(X)$ . Käsitellään tässä vain sellaisten muotojen  $\omega$  integrointia, jotka häviävät jonkin kompaktin  $U$ :n osajoukon  $V$  ulkopuolella, eli  $\omega(v) = 0 \forall v \notin V$ . Tällaista muotoa  $\omega$  sanotaan *kompaktitukiseksi*. Integraalin käsitteen laajentaminen yleisempään tapaukseen vaatisi yksikön osituksen (partition of unity) käsitteen määrittelemistä ja olisi monimutkaisempaa kuin on tarpeen, sillä tässä työssä integroidaan vain kompaktitukisia muotoja.

**Määritelmä 2.17.** Olkoon  $\omega \in \Lambda^n(X)$  kompaktitukinen ja  $(U, \phi)$  moniston  $X$  kartta. Tällöin  $\omega$  on integroitava, mikäli  $\omega_{1..n}$  on Lebesgue-mitallinen ja -integroituva; integraalin arvo on

$$\int_X \omega = \int_U \omega = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{1..n}(x) \prod_{i=1}^n dx^i. \quad (2.9)$$

Näin ei kuitenkaan saada integroitua muita kuin  $n$ -muotoja  $n$ -ulotteisen avaruuden osan yli. Usein, mukaanlukien tämä työ, kuitenkin tarvitaan muitakin integraaleja. Avuksi tulee vektorianalyysistäkin tuttu *Stokesin lause*.

**Lause 2.18 (Stokes).** Olkoon  $M$  topologinen avaruus ja  $A$  sen jokin kartasto. Olkoon lisäksi  $\mathcal{M} = (M, A)$  suunnattu, sileä ja reunallinen  $n$ -monisto,  $i: \partial M \rightarrow M$  inklusiokuvaus, ja  $\omega \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{M})$ . Kun vielä suunnistetaan reuna monistonsa suunnistuksen mukaan, on voimassa *Stokesin lause*:

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial \mathcal{M}} i^* \omega. \quad (2.10)$$

Mikäli  $\partial M = \emptyset$ , asetetaan  $\int_{\partial \mathcal{M}} i^* \omega = 0$ .

*Todistus.* Sivutetaan. Löytyy kirjasta [44]. □

**Määritelmä 2.19.** Olkoon  $f: X^n \rightarrow Y^m$  ja  $V \subset Y^m$  kompakti. Mikäli joukko  $f^{-1}(V) \subset X^n$  on kompakti, sanotaan, että  $f$  on *kompakti kuvaus* (proper map).

Nyt olemme valmiit määrittelemään astekuvauksen ja Hopfin invariantin.

### 2.2.3 Astekuvaus ja Hopfin invariantti

**Määritelmä 2.20 (Astekuvaus).** Olkoot  $X^n$  ja  $Y^n$  yhtenäisiä ja suunnistettuja monistoja,  $f: X^n \rightarrow Y^n$  kunnollinen differentioituva kuvaus sekä  $\omega \in \Lambda^n(Y^n)$  kompaktitukinen. Määritellään silloin kuvaus  $\deg(f)$  kaavalla

$$\int_{X^n} f^* \omega = \deg(f) \int_{Y^n} \omega. \quad (2.11)$$

Yhtälön vasen puoli on varmasti olemassa, sillä  $\omega$ :lle ja  $f$ :lle asetetut ehdot riittävät takaamaan sen olemassaolon. Oikea puoli taas on selvästi olemassa, koska  $\omega$  on kompaktitukinen.

**Lause 2.21.** Määritelmän 2.20 oletuksin

- a)  $\deg(f)$  on riippumaton muodon  $\omega$  valinnasta.
- b)  $f \simeq g \Rightarrow \deg(f) = \deg(g)$ .
- c) Jos  $f$  säilyttää suunnistuksen, niin  $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ .
- d)  $\deg: \pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  on isomorfia.

*Todistus.* Sivutetaan. Kaikki neljä löytyvät kuitenkin kirjasta [43]. □

**Määritelmä 2.22 (Hopfin invariantti).** Olkoon  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$  differentioituva ja  $\alpha \in \Lambda^n(S^n)$  siten, että  $\int_{S^{2n-1}} \alpha = 1$ .<sup>2</sup> Olkoon lisäksi  $\omega \in \Lambda^{n-1}(S^{2n-1})$  sellainen, että  $d\omega = f^*\alpha$ . Määritellään kuvaus  $H: C^1(S^{2n-1}, S^n) \rightarrow \mathbb{R}$  kaavalla

$$H(f) := \int_{S^{2n-1}} \omega \wedge d\omega.$$

Kuvauksen  $H$  arvoa  $H(f)$  kutsutaan  $f$ :n *Hopfin invariantiksi* tai *Hopfin indeksiksi*.

Hopfin invariantin määritelmässä esiintyvä muoto  $\omega$  on välttämättä olemassa, sillä koska  $\alpha$  on  $n$ -muoto  $n$ -ulotteisella monistolla, on  $d\alpha = 0$ . Näin ollen  $f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha) = 0$ , joten  $f^*\alpha$  on suljettu muoto monistolla  $S^{2n-1}$ . Kohomologiateoriaan ja pallon  $S^{2n-1}$   $n$ :nnen de Rham -kohomologian trivialisuuteen nojautuen voidaan osoittaa, että kaikki  $S^{2n-1}$ :n suljetut  $n$ -muodot ovat eksakteja, eli on olemassa  $n-1$  muoto  $\omega$  siten, että  $d\omega = f^*\alpha$ .

**Lause 2.23.** Olkoon  $H$  ja  $f$  kuten määritelmässä 2.22 sekä myös  $g \in C^1(S^{2n-1}, S^n)$ . Silloin

- a)  $H(f)$  ei riipu muodon  $\omega$  valinnasta.
- b)  $f \simeq g \Rightarrow H(f) = H(g)$ .
- c)  $\forall f, H(f) \in \mathbb{Z}$ .
- d)  $H: \pi_3(S^2) \rightarrow \mathbb{Z}$  on isomorfia.

*Todistus.* Sivuutetaan, katso [43] ja [42]. □

**Esimerkki 1.** Olkoon  $\Phi: S^n \rightarrow S^n$  differentioituva,  $a_k \in [1, n]$ ,  $i_k, j_k \in [1, n+1]$ ,  $A(n)$   $n$ -pallon pinta-ala ja  $u$  avaruuden  $S^n$  luonnolliset koordinaatit, joille siis  $\|u\| = 1$  ja  $\theta_i$  sen  $n$ -ulotteiset pallokoordinaatit, jotka määritellään yhtälöillä

$$\begin{cases} u^1 & = \cos(\theta_1) \\ u^{1 < i \leq n} & = \cos(\theta_i) \prod_{j=1}^{i-1} \sin(\theta_j) \\ u^{n+1} & = \prod_{j=1}^n \sin(\theta_j). \end{cases} \quad (2.12)$$

---

<sup>2</sup>Tällainen muoto varmasti on olemassa ja normauserrointa vaille se on muotoa  $\epsilon_{i_1 \dots i_n} x^{i_1} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$ . Esimerkiksi tapauksessa  $n = 2$ ,  $\alpha = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ijk} x^i dx^j \wedge dx^k$ . Kohomologiaa tunteville tämä on tuttu  $H_{DR}^2(S^2)$ :n generaattorina.

Silloin

$$\deg(\Phi) = \frac{1}{A(n)} \frac{1}{n!} \int_{S^n} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} \phi^{i_1} \bigwedge_{j=2}^{n+1} d\phi^{i_j} \quad (2.13)$$

$$= \frac{1}{A(n)} \frac{1}{n!} \int_{S^n} \epsilon_{i_1 \dots i_{n+1}} \phi^{i_1} \bigwedge_{k=2}^{n+1} \partial_{j_{k-1}} \phi^{i_k} du^{j_{k-1}} \quad (2.14)$$

$$= \frac{1}{A(n)} \frac{1}{n!} \int_{S^n} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} \phi^{i_1} \bigwedge_{k=2}^{n+1} \frac{\partial \phi^{i_k}}{\partial \theta^{a_{k-1}}} d\theta^{a_{k-1}}. \quad (2.15)$$

*Todistus.* Asteen määräämiseksi riittäisi minkä tahansa muodon  $\omega$  etsiminen, joka antaa yhtälön (2.11) oikean puolen integraalille nolasta poikkeavan arvon, mutta koska myöhemmin Hopfin invariantin yhteydessä kyseinen integraali pitää kuitenkin normata yksiköksi, normataan se jo nyt. Tätä varten lasketaan ensin  $n$ -pallon pinta-ala. Pinta-ala saadaan sellaisesta  $n$ -muodosta  $\omega \in \Lambda^n(S^n)$ , jolle  $\int_{D^{n+1}} d\omega = 1$ . Olkoon siis

$$\omega = \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 \dots i_{n+1}} u^{i_1} \bigwedge_{k=2}^{n+1} du^{i_k}, \quad (2.16)$$

jolloin saadaan

$$d\omega = \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 \dots i_{n+1}} \bigwedge_{k=1}^{n+1} du^{i_k}, \quad (2.17)$$

joka on tunnetusti  $D^{n+1}$ :n tilavuusmuoto. Pallokoordinaattien avulla saadaan lisäksi

$$\int_{S^n} \omega = \int_{S^n} u^{I_1} \bigwedge_{k=2}^{n+1} du^{I_k} \quad (2.18)$$

$$= (n+1) \int_{S^n} u^1 \bigwedge_{k=2}^{n+1} du^k \quad (\text{pallosymmetrian nojalla}) \quad (2.19)$$

$$= (n+1) \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta_1) d\theta_1 \prod_{i=3}^{n+1} \int_0^\pi \sin^i(\theta_{i-1}) d\theta_{i-1} \quad (2.20)$$

$$= (n+1) \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+3}{2})} \quad (2.21)$$

$$= A(n). \quad (2.22)$$

Jos siis valitaan asteen laskemiseksi  $\nu := \omega/A(n)$ , saadaan

$$\int_{S^n} \Phi^* \nu = \deg(\Phi) \int_{S^n} \nu = \deg(\Phi). \quad (2.23)$$

Nyt pitää siis vain laskea  $\Phi^*\nu$ , jotta saadaan halutut tulokset. Vetofunktion määritelmän nojalla saadaan

$$(\Phi^*\nu) = \nu(\Phi) = \frac{1}{A(n)} \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} \phi^{i_1} \bigwedge_{j=2}^{n+1} d\phi^{i_j} \quad (2.24)$$

$$= \frac{1}{A(n)} \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} \phi^{i_1} \bigwedge_{k=2}^{n+1} \frac{\partial \phi^{i_k}}{\partial u^{j_{k-1}}} du^{j_{k-1}} \quad (2.25)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{(n+1)! \sqrt{\pi}^{n+1}} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} \phi^{i_1} \bigwedge_{k=2}^{n+1} \frac{\partial \phi^{i_k}}{\partial u^{j_{k-1}}} du^{j_{k-1}}. \quad (2.26)$$

Tästä saatiinkin jo ensimmäiset kaksi väitettä. Viimeinen saadaan siirtymällä taas pallokoordinaatteihin seuraavasti

$$\Phi^*\omega = \frac{1}{A(n)} \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} \phi^{i_1} \bigwedge_{l=2}^{n+1} \frac{\partial \phi^{i_l}}{\partial u^{j_{l-1}}} \frac{\partial u^{j_{l-1}}}{\partial \theta^{k_{l-1}}} d\theta^{k_{l-1}} \quad (2.27)$$

$$= \frac{1}{A(n)} \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} \phi^{i_1} \bigwedge_{k=2}^{n+1} \frac{\partial \phi^{i_k}}{\partial \theta^{j_{k-1}}} d\theta^{j_{k-1}}, \quad (2.28)$$

josta saadaan viimeinen väite integroimalla puolittain  $S^3$ :n yli.  $\square$

Ei ole itsestään selvää, että on olemassa kuvaus  $f$  siten, että  $H(f) \neq 0$  tai  $\deg f \neq 0$ : mikäli Hopfin invariantin määritelmässä 2.22 valitaan pariton  $n$ ,  $H(f) = 0 \forall f$ . Itse asiassa voidaan jopa osoittaa [45], että kuvaus, jolle  $H(f) = 1$  on olemassa vain kun  $n \in \{2, 4, 8\}$ ! Tässä yhteydessä kiinnostava tapaus on  $n = 2$ , joten keskitytään jatkossa vain siihen. Astekuvauksen tapaus on helpompi, koska määritelmästä nähdään heti, että identiteettikuvaus  $f \equiv \text{id}_{X^n}$  antaa  $\deg(f) = 1$ . Muotoillaan tämä vielä lauseeksi ja osoitetaan sitten, että tapauksessa  $n = 2$  on olemassa kuvaus, jolle  $H(f) = 1$ .

**Lause 2.24.** Kuvauksen  $\text{id}: S^n \rightarrow S^n$  aste on yksi,  $\deg(\text{id}) = 1$ .

*Todistus.* Tämä oikeastaan laskettiin jo esimerkin 1 todistuksen yhteydessä, sillä siinä käytetyin merkinnöin

$$A(n) \deg(\text{id}) = \frac{1}{n!} \int_{S^n} \epsilon_{i_1 \dots i_{n+1}} u^{i_1} \bigwedge_{k=2}^{n+1} du^{i_k} \quad (2.29)$$

$$= A(n). \quad (2.30)$$

$\square$

**Määritelmä 2.25 (Hopfin kuvaus).** Olkoon  $u$  jälleen avaruuden  $S^3$  luonnolliset koordinaatit,  $Z = \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ u_3 + iu_4 \end{pmatrix}$  ja  $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$ , missä  $\sigma_i$  ovat Paulin matriisit. Määritellään kuvaus  $h: S^3 \rightarrow S^2$ , jolle

$$h(u) := Z^\dagger \sigma Z = \begin{pmatrix} 2(u_1 u_3 + u_2 u_4) \\ 2(u_1 u_4 - u_2 u_3) \\ u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 \end{pmatrix}.$$

Tämä on *Hopfin kuvaus*. On helppoa osoittaa, että todellakin  $\|h\| = 1$ .

**Lause 2.26.** Olkoon  $h$  Hopfin kuvaus ja  $H$  Hopfin invariantin antava kuvaus. Silloin

$$H(h) = 1.$$

*Todistus.* Löytyy yksityiskohtineen kirjasta [43]. Jatkossa tarvitaan todistuksesta kuitenkin siinä käytetty 1-muoto  $\omega = \frac{1}{2\pi}(u_1 du_2 - u_2 du_1 + u_3 du_4 - u_4 du_3) \in \Lambda^1(S^3)$ , missä  $u_i$  ovat jälleen avaruuden  $S^3$  luonnolliset koordinaatit. Nyt  $d\omega$  on juuri tarvittava  $S^3$ :n normattu tilavuusmuoto:  $\int_{S^3} d\omega = 1$ .  $\square$

Tiedetään siis, että on olemassa ainakin yhteen epätriviaaliin homotopialuokkaan kuuluva kuvaus  $S^3 \rightarrow S^3$  ja samoin kuvauksille  $S^3 \rightarrow S^2$ . On siis mielekästä lähteä etsimään kuvauksia jotka kuuluvat mielivaltaiseen homotopialuokkaan. Kuten jo alussa todettiin, voidaan Hopfin kuvausta käyttää apuna “kopioimaan” tietyn asteen kenttä tietyn Hopfin invariantin kentäksi. Seuraava lause kertoo, miten.

**Lause 2.27.** Olkoot  $h$  Hopfin kuvaus,  $\Phi: S^3 \rightarrow S^3$  ja  $f \equiv h \circ \Phi$  sekä  $H$  ja  $\deg$  kuten määritelmässä 2.20 ja 2.22. Silloin

$$H(f) = \deg \Phi. \quad (2.31)$$

*Todistus.* Olkoon  $\omega$  lauseen 2.26 todistuksessa esiintyvä 1-muoto Edelleen saman lauseen nojalla  $\int_{S^3} \omega \wedge d\omega \equiv H(h) = 1$ . Valitaan sitten Hopfin invariantin määritelmässä 2.22 tapaus  $n = 2$  ja olkoon  $\alpha$  ja  $\omega'$  siinä esiintyvät esiintyvä 2- ja 1-muodot, missä  $\alpha$  on valittu samaksi kuin lauseen 2.26 todistuksessa. Lauseen 2.21 nojalla saadaan

$$d\omega' = f^* \alpha = (h \circ \Phi)^* \alpha = \alpha \circ h \circ \Phi = \Phi^*(\alpha \circ h) = \Phi^*(h^* \alpha) \quad (2.32)$$

$$= \Phi^*(d\omega) = d(\Phi^* \omega), \quad (2.33)$$

joten nähdään, että

$$\omega' = \Phi^* \omega = \frac{1}{2\pi}(\phi_1 d\phi_2 - \phi_2 d\phi_1 + \phi_3 d\phi_4 - \phi_4 d\phi_3) \quad (2.34)$$

kelpaa halutuksi 1-muodoksi. Käyttämällä lauseita 2.21 ja 2.26, saadaan

$$H(f) = \int_{S^3} \Phi^* \omega \wedge d(\Phi^* \omega) = \int_{S^3} \Phi^* (\omega \wedge d\omega) \quad (2.35)$$

$$= \deg(\Phi) \int_{S^3} \omega \wedge d\omega = \deg(\Phi). \quad (2.36)$$

□

Tämän jälkeen pitää enää löytää sellainen kuvaus  $\Phi$ , joka yksinkertaistaa integraalin (2.31) sellaiseen muotoon, jossa Hopfin invariantti saadaan tekijäksi integraalin ulkopuolelle ja jäljelle jäävä integraali on laskettavissa. Tällaisia kuvauksia voidaan keksiä monia, joista kohta esitetään kaksi. Kenttäteorian kannalta tämä on mukavaa, sillä se antaa meille kokonaisen numeroituvasti äärettömän spektrin topologisesti epäkvivalentteja kuvauksia. Lisäksi myöhemmin käy ilmi, että näiden kenttien energioiden alarajat ovat monotonisia luvun  $\deg$  tai  $H$  funktioita, joten ratkaisut ovat energieettisestikin epäkvivalentteja. Tämän jälkeen onkin helpompi alkaa etsiä fysikaalista vastinetta teorialle ja Skyrme ehdottikin mallinsa eri homotopialuokkiin kuuluvien ratkaisujen kuvaavan eri baryoniluvun baryoneja.

**Esimerkki 2.** Olkoon  $H$  ja  $f$  kuten lauseessa 2.27,  $h$  Hopfin kuvaus ja  $n \in \mathbb{Z}$  sekä  $u$  avaruuden  $S^3$  luonnolliset koordinaatit. Käytetään taas avaruudelle  $S^3$  pallokoordinaatteja  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$

$$u^1 = \cos(\theta_1) \qquad u^2 = \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \quad (2.37)$$

$$u^3 = \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) \qquad u^4 = \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \quad (2.38)$$

ja määritellään kuvaus  $\Phi: S^3 \rightarrow S^3$  seuraavasti

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(n\theta_3) \\ \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(n\theta_3) \\ \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_1) \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

mistä saadaan helposti laskettua  $H(f)$ :

$$\begin{aligned}
H(f) &= \deg(\Phi) \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{S}^3} (\phi^1 d\phi^2 d\phi^3 d\phi^4 - \phi^2 d\phi^1 d\phi^3 d\phi^4 \\
&\quad + \phi^3 d\phi^1 d\phi^2 d\phi^4 - \phi^4 d\phi^1 d\phi^2 d\phi^3) \\
&= \frac{n}{2\pi^2} \int_{\mathbb{S}^3} (u^1 du^2 du^3 du^4 - u^2 du^1 du^3 du^4 \\
&\quad + u^3 du^1 du^2 du^4 - u^4 du^1 du^2 du^3) \\
&= n \frac{2}{\pi^2} \int_{\mathbb{S}^3} u^1 du^2 du^3 du^4 \\
&= n \deg(\text{id}) \\
&= n.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

**Esimerkki 3.** Olkoon  $H$  ja  $f$  kuten lauseessa 2.27,  $h$  Hopfin kuvaus,  $g: [0, \infty) \rightarrow [-1, 1]$  mielivaltainen kuvaus sekä  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Olkoon  $x$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  luonnolliset koordinaatit. Otetaan seuraavassa käyttöön avaruuden  $\mathbb{R}^3$  toruskoordinaatit  $(\eta, \xi, \varphi)$

$$\begin{aligned}
x^1 &= \frac{\sinh(\eta) \cos(\varphi)}{q} & x^2 &= \frac{\sinh(\eta) \sin(\varphi)}{q} \\
x^3 &= \frac{\sin(\xi)}{q} & q &= \cosh(\eta) - \cos(\xi)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

ja määritellään kuvaus  $\Phi: \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{S}^3$  seuraavasti

$$\Phi(x) \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} g(\eta) \cos(m\xi) \\ g(\eta) \sin(m\xi) \\ \sqrt{1 - g(\eta)^2} \cos(n\varphi) \\ \sqrt{1 - g(\eta)^2} \sin(-n\varphi) \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

Nyt määritelmän 2.25 nojalla kuvaus  $f$  saa muodon

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2(\phi_1\phi_3 + \phi_2\phi_4) \\ 2(\phi_1\phi_4 - \phi_2\phi_3) \\ \phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 - \phi_4^2 \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

$$= \begin{pmatrix} 2g\sqrt{1 - g^2}(\cos(m\xi) \cos(n\varphi) - \sin(m\xi) \sin(n\varphi)) \\ -2g\sqrt{1 - g^2}(\cos(m\xi) \sin(n\varphi) + \sin(m\xi) \cos(n\varphi)) \\ 2g^2 - 1 \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Helposti nähdään tämän kuvauksen olevan  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{S}^2$ .

On vielä selvitettävä tämän kuvauksen Hopfin invariantti. Tämä tapaus on mielenkiintoinen sikäli, että Hopfin invariantti on helppo laskea suoraan, mutta vaikeampi lauseen 2.27 avulla. Sijoittamalla toruskoordinaattien yhtälöt stereograafisen projektion  $p: S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ ,  $p(u) = \frac{1}{1+u_4}(u_1, u_2, u_3)$  käänteiskuvaukseen

$$p^{-1}(x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{s^2}(2x^1, 2x^2, 2x^3, 1 - r^2) \quad (2.45)$$

missä  $r^2 = x_i x^i$  ja  $s^2 = 1 + r^2$ , saadaan ilmaistua tarvittava 1-muoto  $\omega$  toruskoordinaatein:

$$\omega \equiv \frac{1}{2\pi}(u_1 du_2 - u_2 du_1 + u_3 du_4 - u_4 du_3) \quad (2.46)$$

$$= \frac{-q}{2\pi}(m(\phi_1^2 + \phi_2^2)d\xi - \frac{n(\phi_1^3 + \phi_4^2)}{\sinh(\eta)}d\varphi) \quad (2.47)$$

$$= \frac{-q}{2\pi}(mg^2 d\xi + \frac{n(g^2 - 1)}{\sinh(\eta)}d\varphi) \quad (2.48)$$

ja

$$d\omega = \frac{gg'}{\pi}\left(\frac{n}{\sinh(\eta)}d\xi + md\varphi\right) \quad (2.49)$$

sekä

$$H(f) = \int_{S^3} \omega \wedge d\omega \quad (2.50)$$

$$= -\frac{mn}{2\pi^2} \int d\eta \int d\xi \int d\varphi g(\eta)g'(\eta) \quad (2.51)$$

$$= -mn\left(\lim_{\eta \rightarrow \infty} g^2(\eta) - \lim_{\eta \rightarrow 0} g^2(\eta)\right). \quad (2.52)$$

Mikäli voidaan löytää kuvaus  $g$  siten, että se on monotoninen ja saa rajoilla arvot 0, kun  $\eta \rightarrow \infty$  ja 1, kun  $\eta \rightarrow 0$ , saadaan

$$H(f) = mn. \quad (2.53)$$

Tällainen kuvaus on helppo löytää, eräs sellainen on  $-\tanh(1/\eta)$ , joka on differentioituva ja (jopa aidosti) monotoninen.

## 2.2.4 Hopfin invariantti alkukuvien linkityslukuna

Luvun 2.2 alussa mainittiin, että Hopfin invariantille on monta vaihtoehtoista määritelmää. Yllä esitetty differentiaaligeometrinen tapa on suoraviivaisuudestaan huolimatta kuitenkin hyvin hankala, sillä muodon  $\omega$  löytäminen on usein hyvin vaikeaa. Tämän takia jatkossa käytetään kuvauksen  $f$  Hopfin invariantin laskemiseksi

avaruuden  $S^2$  pisteiden alkukuvien  $f^{-1}(x \in S^2)$  kiinnityslukuun perustuvaa määritelmää. Tämä voidaan osoittaa ekvivalentiksi differentiaaligeometrisen määritelmän kanssa [43]. Aloitetaan määrittelemällä kiinnitysluku. Sitä varten täytyy ensin määritellä alkukuvien *risteys* ja kiertosuunta. Kiertosuunta voidaan valita mielivaltaisesti, kunhan kaikille alkukuville valitaan se samalla tavalla, mutta alla esitetty valinta on sikäli erityinen, että se on ainoa, joka antaa yhtäsuuruuden Hopfin invariantin ja alkukuvien kiinnitysluvun kirjallisuudessa käytetyn määritelmän välille. Mikäli valitaan toinen kiertosuunta, pitää lisäksi muuttaa Hopfin invariantin merkki tai muuttaa kiinnitysluvun määritelmässä esiintyvät luvut  $\epsilon(i) \rightarrow -\epsilon(i)$ . Lisäksi alla esitetyllä tavalla saadaan viitteissä [46] ja [41] mainitut varaukset.

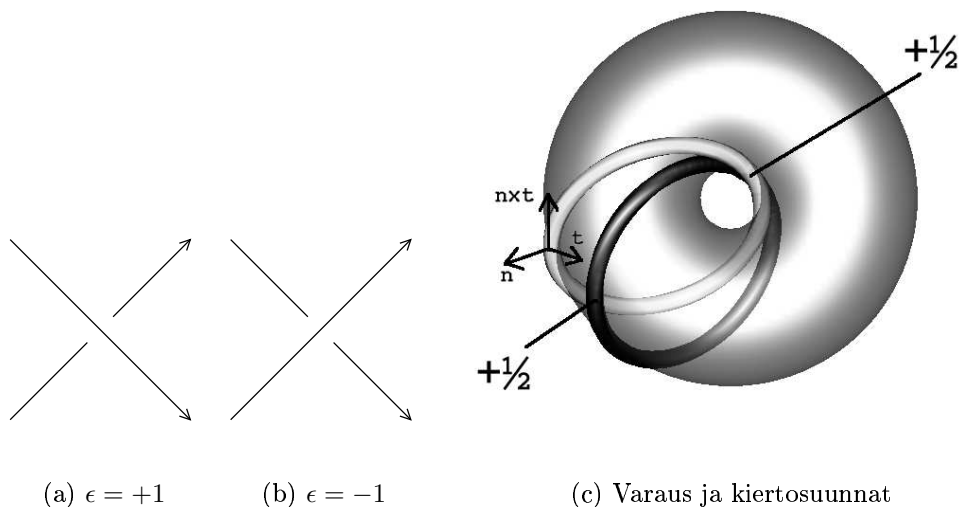
Määritellään alkukuvien  $f^{-1}(x^i)$  kiertosuunta seuraavasti. Valitaan kaksi pistettä  $x^1, x^2 \in S^2$ , joille  $x_3^1 = x_3^2 = x_0$  ja  $f: S^3 \rightarrow S^2$  differentioituva. Pisteiden  $x^1$  ja  $x^2$  alkukuvat  $f^{-1}(x^i)$  ovat kaikkien pisteiden  $y \in S^2$ , joille  $f(y_3) = x_0$ , alkukuvien  $f^{-1}(y)$  muodostaman *tasa-arvopinnan* suljettuja polkuja. Valitaan sitten toiselta alkukuvulta mielivaltainen piste. Olkoon  $\mathbf{n}$  tässä pisteessä määritelty tasa-arvopinnan ulospäin osoittava normaali sekä  $\mathbf{t}$  tasa-arvopinnan tämän pisteen se tangentti, joka osoittaa toisen alkukuvan lähimpään pisteeseen. Kiertosuunnaksi valitaan nyt vektorin  $\mathbf{n} \times \mathbf{t}$  polun  $f^{-1}(x^1)$  suuntaisen komponentin suunta. Kuvassa 2.1 on esitetty, miten määritetään alkukuvien kiertosuunta.

Seuraavaksi määritellään *risteys* ja linkitysluku (linking number). Olkoon  $x^1, x^2 \in S^2$  ja  $f: S^3 \rightarrow S^2$  differentioituva sekä  $\gamma \in \mathbb{R}^2$  joukko, joka saadaan, kun projisoidaan alkukuvat  $f^{-1}(x^i)$  (lähes mielivaltaiselle) tasolle. Valitaan sitten joukosta  $\gamma$  ne pisteet, joissa  $f^{-1}(x^1)$ :n projektio leikkaa  $f^{-1}(x^2)$ :n projektion ja lisätään tämän joukon alkioihin tieto siitä, kumpi alkukuva oli alunperin projektiosuunnassa alempana. Merkitään saatua joukkoa symbolilla  $C$  ja nimitetään sen alkioita *risteyksiksi*. Liitetään vielä jokaiseen risteykseen  $i \in C$  luku  $\epsilon(i)$  kuvan 2.1 osoittamalla tavalla.

**Määritelmä 2.28 (Linkitysluku).** Alkukuvien  $f^{-1}(x^1)$  ja  $f^{-1}(x^2)$  *linkitysluku* määritellään sitten kaavalla

$$\text{lk} := \frac{1}{2} \sum_{i \in C} \epsilon(i). \quad (2.54)$$

Tällöin systeemin Hopfin invariantti yhtyy sen linkityslukuun. Kutsutaan tästä lähtien Hopfin invarianttia lyhyesti (Hopfin) varaukseksi.



Kuva 2.1: Mahdolliset alkukuvien risteykset ja linkitysluku

## 2.3 Klassista kenttäteoriaa

Tässä kappaleessa esitetään klassisen kenttäteorian tärkeimmät tulokset lyhyesti ja ilman sen suurempia perusteluita. Jatkuvan aineen teorian perustiedot oletetaan tunnetuiksi ja tunnetuimmat tulokset todistuksineen löytyvät jokaisesta jatkuvan aineen teoriaa käsittelevästä kirjasta, joten ne on alla sivuutettu.

Käytetään tämän kappaleen ajan seuraavia merkintöjä. Kreikkalaiset indeksit viittaavat aina suureen Lorentz-indeksiin ja saavat arvoja joukosta  $[0, 3]$ . Kenttien määrittelyavaruudessa  $\mathbb{R}^4$  käytetään Minkowskin (pseudo)metriikkaa,  $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , joka myös nostaa ja laskee Lorentz-indeksejä:  $x_\alpha := g_{\alpha\beta}x^\beta$ . Tavalliseen tapaan identifioidaan Minkowskin avaruuden komponenteista aika,  $t = x_0$ , ja avaruus-osa,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ . Joukkoa  $\mathbb{R}^4$  varustettuna Minkowskin metriikalla merkitään symbolilla  $\mathcal{M}$ .

Muille kuin Lorentz-indekseille pätee automaattisesti  $x^a = x_a$ . Tensorille  $F_{i_1 \dots i_n}$  pätee  $F_{i_1 \dots i_n}^2 := F_{i_1 \dots i_n} F^{i_1 \dots i_n}$  ja muulle kuin Lorentz-vektorille  $\mathbf{n}$  on voimassa  $(\partial_\mu \mathbf{n})^2 := (\partial_\mu \mathbf{n}) \cdot (\partial^\mu \mathbf{n})$ . Mikäli Lorentz-vektorin indeksinä esiintyy latinalainen kirjain, se saa arvoja joukosta  $[1, 3]$ .

### 2.3.1 Lagrangen tiheys ja Eulerin-Lagrangen yhtälöt

Jatkuvan aineen fysiikassa on pohjimmiltaan kyse integraalin ääriarvojen löytämisestä, aivan kuten klassisessa Lagrangen mekaniikassakin. Matematiikassa tällainen ongelma kuuluu variaatioteoriaan ja seuraava lause onkin variaatioteorian perustu-

loksia. Sovitaan kuitenkin vielä sitä ennen koko tämän kappaleen voimassa olevat merkinnät.

**Määritelmä 2.29.** Olkoot  $\eta_a: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  luokan  $C^2$  funktioita ja  $x \in \mathbb{R}^4$ . Määritellään lisäksi

$$L := \int d^3x \mathcal{L}(\eta_a(x_\mu), \eta_{a,\nu}(x_\mu), x_\mu), \quad (2.55)$$

missä integrandin muodon määräävät mallinnettavan fysikaalisen systeemin ominaisuudet. Funktiota  $\mathcal{L}$  sanotaan systeemin *Lagrangen tiheydeksi* ja funktionaalia  $L$  *Lagrangen funktioksi*.

**Lause 2.30 (Eulerin-Lagrangen yhtälö).** Välttämätön ehto sille, että  $\eta$  minimoi  $L$ :n on, että jokainen  $\eta_a$  toteuttaa yhtälön

$$\frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{a,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a} = 0.$$

Tätä yhtälöä kutsutaan nimellä *Eulerin-Lagrangen yhtälö*<sup>3</sup>.

*Todistus.* Sivuuetaan. Löytyy esimerkiksi kirjasta [47]. □

Lagrangen tiheyden mahdollista muotoa rajoittavat systeemiltä vaadittavat ominaisuudet. Näistä ehkä merkittävimmät ovat symmetriat Poincarén ja Lorentzin ryhmien suhteen. Ne rajoittavat Lagrangen tiheydessä esiintyviä termejä ja jakavat kentät Poincarén tai Lorentzin ryhmän esityksiin. Jätetään jatkossa Poincarén ryhmä huomioimatta, sillä kenttäteoriassa Lorentzin ryhmä on keskeisessä asemassa. Lorentzin ryhmän esitykset luetteloidaan yleensä kahden puoliluvun  $(n, m)$  avulla,  $2n, 2m \in \mathbb{N}$ . Tässä työssä tapaamme vain esityksen  $(0, 0)$  kenttiä, sekä kappaleessa 3.1 esityksen  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  kentän.

**Määritelmä 2.31.** Olkoon  $\eta$  Lorentzin ryhmän esitykseen  $(0, 0)$  kuuluva kenttä. Sanotaan, että  $\eta$  on *skalaarikenttä*.

**Määritelmä 2.32.** Olkoon  $\eta$  Lorentzin ryhmän esitykseen  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  kuuluva kenttä. Sanotaan, että  $\eta$  on *vektorikenttä*.

Lagrangen tiheyden symmetrioihin liittyy myös seuraava Nötherin lause, joka takaa, että Lagrangen tiheyden jokaiseen tietynlaiseen symmetriaan liittyy säilyvä virta ja varaus. Päinvastainen väite ei kuitenkaan ole tosi; esimerkkinä mainitakoon Korteweg-de Vries -yhtälö, jolle on löydetty peräti numeroituvasti ääretön määrä säilyviä suureita, mutta jonka Lagrangen tiheydellä ei suinkaan ole ääretöntä määrää Nötherin lauseessa vaaditun kaltaisia symmetrioita.

---

<sup>3</sup>Matematiikassa yhtälöä kutsutaan nimellä Eulerin yhtälö.

### 2.3.2 Nötherin lause

Koostukoot tensorit  $X$  ja  $Y$  mielivaltaisista, luokan  $C^\infty$  kuvauksista, jotka voivat riippua mistä tahansa kentästä  $\eta_a$  tai koordinaatista  $x_\mu$  siten, että ne määräävät seuraavat jatkuvat muunnokset

$$\begin{cases} x_\mu \rightarrow x'_\mu := x_\mu + \epsilon_a X_\mu^a \\ \eta_b \rightarrow \eta'_b := \eta_b + \epsilon_a Y_b^a. \end{cases} \quad (2.56)$$

Määritellään *virta*

$$j_\mu^a := \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{b,\mu}} \eta_{b,\nu} - \mathcal{L} \delta_{\nu\mu} \right) X^{a\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{b,\mu}} Y^{ab} \quad (2.57)$$

sekä *varaus*

$$Q^a := \int d^3x j_0^a. \quad (2.58)$$

Yhtälön (2.56) määrittelemä muunnos aiheuttaa luonnollisesti myös muunnoksen

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'(\eta'_b(x'_\mu), \eta'_{b,\nu}(x'_\mu), x'_\mu), \quad (2.59)$$

mutta Nötherin lauseessa tätä muunnosta on hieman rajoitettu.

**Lause 2.33 (Nöther).** Olkoon  $L$  vakio ja  $\mathcal{L}$  muotoinvariantti infinitesimaalisessa muunnoksessa (2.56), eli

$$L = \int d^4x \mathcal{L}'(\eta'_b(x'_\mu), \eta'_{b,\nu}(x'_\mu), x'_\mu) = \int d^4x \mathcal{L}(\eta_b(x_\mu), \eta_{b,\nu}(x_\mu), x_\mu) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

ja

$$\mathcal{L}'(\eta'_b(x'_\mu), \eta'_{b,\nu}(x'_\mu), x'_\mu) = \mathcal{L}(\eta'_b(x'_\mu), \eta'_{b,\nu}(x'_\mu), x'_\mu).$$

Silloin virrat  $j_\mu^a$  ja varaukset  $Q^a$  säilyvät, sillä  $\forall a$ :

$$\begin{aligned} \partial^\mu j_\mu^a &= 0 \\ \frac{d}{dt} Q^a &= 0. \end{aligned}$$

*Todistus.* Sivuutetaan, löytyy kirjasta [47]. □

**Määritelmä 2.34.** Jos  $\mathcal{L}_{,\mu} = 0 \forall \mu$  ja muunnos on vain koordinaattien  $x_\mu$  siirto,  $X_\mu^a = \delta_\mu^a$  ja  $Y_\mu^a = 0$ , silloin selvästi Nötherin lauseen ehdot toteutuvat ja säilyväksi virraksi saadaan

$$T_\beta^\alpha := \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{b,\beta}} \eta_{b,\alpha} - \mathcal{L} \delta_\beta^\alpha \right) = j_\beta^\alpha \quad (2.60)$$

ja säilyväksi varaukseksi

$$Q^\alpha = \int d^3x j_0^\alpha. \quad (2.61)$$

$T_\beta^\alpha$  on toisen asteen tensori ja on nimeltään kentän  $\eta_b$  *energia-impulssitensori*.

Koska myös kenttäteoriassa aikatranslaation kanoninen vastine on energia, kutsutaan sitä vastaavaa säilyvää varausta  $Q^0$  *kentän energiaksi* sekä virtaa  $j^{00}$  kentän *energiatiheydeksi*. Edelleen klassisen mekaniikan kanssa yhtenevästi näitä kutsutaan usein myös kentän *Hamiltonin funktioksi*,  $E = Q^0$  sekä *Hamiltonin tiheydeksi*  $\mathcal{E} = j^{00}$ . Tavallisesti näitä merkitään symboleilla  $H$  ja  $\mathcal{H}$ , mutta tässä halutaan varmistua, ettei sekoiteta keskenään Hamiltonin funktiota ja Hopfin varauksen antavaa kuvausta, jota merkitään symbolilla  $H$ .

Koska  $E$  on integraali äärettömän alueen yli, joudutaan luonnollisesti heti pohtimaan, milloin se ylipäättään on olemassa. Aina voidaan kirjoittaa  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{kinetic} + \mathcal{E}_{potential}$ . Tällöin nähdään, että riittävä, vaan ei välttämätön, ehto  $E$ :n olemassalolle on, että kumpikin  $\mathcal{E}_{kinetic}$  ja  $\mathcal{E}_{potential}$  ovat erikseen olemassa. Tällainen jako on hyvin tavallinen ja integraalien suppenemista toisistaan riippumatta käytetään usein hyväksi; jopa niin usein, että seuraava määritelmä on perusteltu.

**Määritelmä 2.35.** Lagrangen tiheyttä  $\mathcal{L}$  vastaavassa energiatiheydessä  $\mathcal{E} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{E}_i(\eta_a, \eta_{a,\mu})$ , esiintyvä kenttä  $\eta_a$  on *lokaali*, mikäli  $\forall i \in \mathcal{I}: |\int d^3x \mathcal{E}_i| < \infty$ .

**Huomautus.** Luonnollisesti välttämätön ehto, jotta  $\int d^3x \mathcal{E}_i$  voisi olla olemassa, on, että  $\forall t \in \mathbb{R}: \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathcal{E}_i = 0$ .

Tarkastellaan nyt, mitä tietoa kentästä tämä lokaalisuusehto meille antaa. Vuorovaikuttamattomien - vapaiden - kenttien tapauksessa  $\mathcal{E}$  on kenttien ja niiden derivaattojen polynomi, jolle  $\mathcal{E}_i(0, 0) = 0$ , joten määritelmän 2.35 lokaalisuusehto täyttyy, mikäli  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \eta_a = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \partial_\mu \eta_a = 0$  riittävän nopeasti. Se, mikä on riittävän nopea luonnollisesti määräytyy polynomin  $\mathcal{E}_i$  muodosta.

Vuorovaikuttavien kenttien tapauksessa ehto  $\mathcal{E}_i(0, 0) = 0$  ei enää välttämättä täyty, vaan voikin olla voimassa  $\mathcal{E}_i(y_a, \partial_\mu y_a) = 0$ . Tällöin vaaditaan, että  $y_a = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \eta_a$  ja  $\partial_\mu y_a = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \partial_\mu \eta_a$ , missä siis ainakin yksi  $y_a, \partial_\mu y_a \neq 0$ . Tavallisesti riittää kuitenkin tämän erikoistapaus, missä kaikki  $\partial_\mu y_a = 0$ . Tämän tarkastelun valossa nähdään, että vuorovaikuttavien kenttien minimienergiatila ei välttämättä olekaan sellainen, jossa kaikki kentät häviävät äärettömyydessä. Tämän yksi merkittävimmistä seurauksista on *spontaani symmetriarikko*, jota alkeishiukkasfysiikassa käytetään esimerkiksi antamaan hiukkasille massat. Lienee syytä huomauttaa, että

vaikkei tässä työssä sitä tutkitakaan, sekä Skyrmen että Faddeevin-Skyrmen malleissa tapahtuu spontaani symmetriarikko. Se saa kuitenkin hieman erilaisen muodon, koska niiden kentät eivät voi kaikki yhtä aikaa hävitä.

Seuraavaksi siirrytään tarkastelemaan Eulerin-Lagrangen yhtälöiden ratkaisuja, mutta ensin sovitaan vielä yksi puhetapa.

**Määritelmä 2.36.** Olkoon  $\eta$  on sellainen Lagrangen tiheyden  $\mathcal{L}$  Eulerin-Lagrangen ratkaisu, että  $\mathcal{E}$  saa pienimmän arvonsa. Tällöin sanotaan, että  $\eta$  on *tyhjiö*.

### 2.3.3 G. H. Derrick ja solitoniratkaisun metsästys

Koska tässä tutkielmassa keskitytään kenttäyhtälöiden ratkaisuihin, jotka ovat lokaaleja, ei-perturbatiivisia, staattisia ja stabiileja, on syytä tutkia, milloin sellaisia on ylipäätään mahdollista löytää.

Tavallisesti funktion ääriarvoja etsitään sen ensimmäisen derivaatan nollakohdan ja toisen derivaatan merkin avulla. Niin tehdään nytkin, mutta sovitaan ensin merkinnät  $\eta_{a\lambda} := \eta_a(\lambda x^i)$  sekä  $E_\lambda := E(\eta_{a\lambda})$  ja kaksi määritelmää.

**Määritelmä 2.37.** Lagrangen tiheyden Eulerin-Lagrangen yhtälöiden staattinen, lokaali ratkaisu on *(skaalaus)stabiili*, mikäli sen tasaisessa skaalauksessa  $\mathbf{r} \rightarrow \lambda \mathbf{r}$ ,  $\lambda > 0$ , kentän energialla on minimi eli

$$\left. \frac{d}{d\lambda} E_\lambda \right|_{\lambda=1} = 0 \quad \text{ja} \quad \left. \frac{d^2}{d\lambda^2} E_\lambda \right|_{\lambda=1} \geq 0.$$

**Määritelmä 2.38.** Kutsutaan Eulerin-Lagrangen yhtälöiden lokaalia, staattista ja stabiilia ratkaisua tästä lähtien *solitoniksi*, vaikkei sen käyttäytymisestä törmäyksissä olekaan tietoa.

Historiallisesti tätä ilmeisesti sovelsi kenttäteoriaan ensimmäistä kertaa G. H. Derrick vuonna 1964 [48].

**Lause 2.39.** Olkoon  $\mathcal{L}_1 = \eta_{a,\mu} \eta_a^\mu$ ,  $\mathcal{L}_2 = \eta_{,\mu}^a \eta_{,\nu}^b \eta_{,\rho}^c \eta_{,\sigma}^d M_{abcd}^{\mu\nu\rho\sigma}(\eta)$  ja  $\mathcal{L}_3 = f(\eta_a)$ , missä  $f$  ja  $M$  ovat mielivaltaisia funktioita. Silloin Lagrangen tiheyden  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_3$  liikeyhtälöillä voi olla solitoniratkaisu vain, jos

$$-6 \int d^3x \mathcal{L}_3 < \int d^3x \mathcal{L}_1 \quad (2.62)$$

ja

$$\int d^3x (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 + 3\mathcal{L}_3) = 0. \quad (2.63)$$

*Todistus.* Olkoon  $\lambda > 0$ . Olkoon  $\eta_a$  liikeyhtälöiden staattinen, lokaali ratkaisu. Tällöin systeemin energiafunktioaali saa muodon  $E = E(\eta_a) = \int d^3x ((\eta_{a,i})^2 + \eta_{,i}^a \eta_{,j}^b \eta_{,k}^c \eta_{,l}^d M_{abcd}^{ijkl}(\eta_a) + f(\eta_a)) < \infty$ . Merkitään  $I_1 := \int d^3x (\eta_{a,i})^2$ ,  $I_2 := \int d^3x \eta_{,i}^a \eta_{,j}^b \eta_{,k}^c \eta_{,l}^d M_{abcd}^{ijkl}(\eta_a)$  ja  $I_3 := \int d^3x f(\eta_a)$ . Tehdään ratkaisuun  $\eta_a$  muunnos  $x^\alpha \rightarrow y^\alpha := \lambda x^\alpha$ , jolloin  $\eta_a \rightarrow \eta_{a\lambda}$  ja

$$E \rightarrow E_\lambda = \int d^3x \left( (\eta_{a\lambda,i})^2 + \eta_{\lambda,i}^a \eta_{\lambda,j}^b \eta_{\lambda,k}^c \eta_{\lambda,l}^d M_{abcd}^{ijkl}(\eta_\lambda) + f(\eta_{a\lambda}) \right) \quad (2.64)$$

$$= \lambda^{-1} I_1 + \lambda I_2 + \lambda^{-3} I_3, \quad (2.65)$$

missä on tehty integraalissa  $E_\lambda$  muuttujanvaihdos  $x \rightarrow \lambda x$  ja käytetty derivaatan ketjusäännöllä saatavaa yhtälöä

$$\frac{\partial \eta_a(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial \eta_a(y)}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \quad (2.66)$$

$$= \lambda \delta_j^i \partial_{y^j} \eta_a(y) = \lambda \partial_{y^j} \eta_a(y). \quad (2.67)$$

Määritelmän 2.37 yhtälöt saavat nyt muodon

$$\left( \frac{d}{d\lambda} E_\lambda \right) \Big|_{\lambda=1} = -I_1 + I_2 - 3I_3 = 0,$$

$$\left( \frac{d^2}{d\lambda^2} E_\lambda \right) \Big|_{\lambda=1} = 2I_1 + 12I_3 \geq 0,$$

jotka toteutuvat, kun

$$I_2 = I_1 + 3I_3 \quad \text{ja} \quad -6I_3 \leq I_1,$$

sillä  $\eta_{a1}$  on Eulerin-Lagrangen yhtälöiden ratkaisu.  $\square$

**Huomautus 5.** Tapauksessa  $I_3 = 0$ , saadaan ehdot  $I_1 = I_2$  ja  $I_1 \geq 0$ . Näistä yhtälöistä jälkimmäinen toteutuu varmasti, koska  $I_1$  on kineettinen energia, ja ensimmäistä kutsutaan *viriaaliteoreemaksi*.

**Huomautus 6.** Lienee syytä mainita myös, että Derrickin [48] alkuperäinen väite sisälsi ainoastaan tapauksen  $M = 0$ , jolloin saadaan tulos, ettei systeemillä voi olla solitoniratkaisua millään funktiolla  $f$ !

## Luku 3

# Skyrmen ja Faddeevin mallit: analyttisiä tarkasteluja

Tämä luku käsittelee lyhyesti T. H. R. Skyrmen 1950- ja 1960-lukujen taitteessa esittämää baryonimallia, L. D. Faddeevin myöhemmin rakentamaa hieman yleisempää, ryhmäteoreettista mallia sekä esittää jälkimmäisen kaksi analyttisesti ratkeavaa muunnelmaa.

Skyrmen malli on merkittävä paitsi siksi, että Faddeev pohjasi mallinsa siihen, myös siksi, että se lienee ensimmäinen kerta kun baryoneja on yritetty kuvata solitoneilla eikä tavanomaisilla häiriöteoreettisilla kehitelmillä ja ennen kaikkea, koska se voisi toimia baryonien matalaenergisinä approksimaationa.

### 3.1 Skyrmen epälineaarinen $\sigma$ -malli

Tutustutaan nyt lähemmin Skyrmen malliin ja sen teoreettisiin perusteisiin. Skyrmen alkuperäiset merkinnät ovat hieman raskaat ja vilisevät indeksejä, joten tässä ei käytetä niitä, vaan modernimpaa merkintää, kuten esimerkiksi kirjassa [49], jota tämä kappale löyhästi seuraa.

Etsiessään epälineaarista kenttäteoriaa, joka kuvaisi ei-perturbatiivisesti baryoneja, T. H. R. Skyrme julkaisi 1950- ja 1960-lukujen vaihteessa sarjan papereita [23–26], joissa hän esitteli nykyään Skyrmen epälineaarisen  $\sigma$ -mallina tunnetun kenttäteorian. Skyrmen tarkoituksena oli mallintaa neljällä itsensä kanssa vuorovaikuttavalla skalaarikentällä baryoneja siten, että skalaarikentän yhtälöillä on ratkaisuja, joilla on mesonien kanssa vuorovaikuttavien fermionien ominaisuudet. Skyrme löysi liikeyhtälöille ratkaisun, joka on äärellisenerginen, stabiili ja staattinen. Tällaisen ratkaisun mahdollistavaa vuorovaikutustermiä - vaikkei se olisikaan aivan samaa

muotoa - kutsutaan usein *Skyrmen termiksi* ja sen sisältävien kenttäteorioiden solitoiniratkaisuja *skyrmioneiksi*. Skyrmen kentälle on myös mahdollista löytää säilyvä varaus ja sitä vastaava säilyvä virta. Skyrme tulkitsee tämän varauksen baryoniluvuksi. Koko seuraava tarkastelu voitaisiin tehdä yleisemminkin. Silloin olisi vain käytettävä Paulin matriisien sijaan ryhmän  $SU(N)$  generaattoreita normattuna siten, että  $\text{tr}(\tau^a \tau^b) = 2\delta^{ab}$ , kuten kirjassa [49] on tehty. Tässä kuitenkin pitäydytään ryhmässä  $SU(2)$ .

Tutkitaan aluksi vain Skyrmen Lagrangen tiheyden kineettistä osaa ja otetaan topologinen osa mukaan vasta myöhemmin.

### 3.1.1 Kineettinen osa

Olkoot  $\sigma$  skalaari- ja  $\pi_i$  pseudoskalaarikenttiä sekä  $0 \neq f_\pi \in \mathbb{R}$ , joille  $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = f_\pi^2$ . Olkoon lisäksi  $\tau_i$  Paulin  $\sigma$ -matriisit. Merkitään sitten

$$U(x) := \frac{1}{f_\pi} (\sigma \hat{1} + i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathcal{O}(f_\pi^{-2}) \quad (3.1)$$

$$L_\mu(x) := U(x)^\dagger \partial_\mu U(x) \quad (3.2)$$

ja

$$\mathcal{L}_{S_{kin}} := \frac{1}{4} f_\pi^2 \text{tr}(\partial_\mu U(x) \partial^\mu U(x)^\dagger) \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{4} f_\pi^2 \text{tr}(L_\mu(x) L^\mu(x)^\dagger) \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 + \mathcal{O}(f_\pi^{-1}). \quad (3.5)$$

Skyrme rakensi teoriansa hyvin pragmaattisesti lähtien yksiulotteisesta mallista, jossa hiukkasta kuvasi tanh-tyyppisen askelfunktion jyrkkä nousu ja yleistäen tämän kolmeen ulottuvuuteen. Nykyään kenttäteoriat rakennetaan lähes poikkeuksetta alusta alkaen jotkin tietyt symmetriaominaisuudet täyttäväksi, joten on opettavaista nähdä, miten samaan Lagrangen tiheyteen päästään symmetriatarkasteluilla. Lähtökohtana on kvanttiväridynamiikka ja tavoitteena kuvata mesoneja sen matalaenergiarajalla. Tämä rajankäynti näkyy yhtälössä (3.5)  $\mathcal{O}$ -termin mukanaolona. Jatkossa tämä kuitenkin jätetään merkitsemättä ja muistetaan, että kyseessä on vain matalaenerginen arvio.

Kvanttiväridynamiikan uskotaan nykyään kuvaavan vahvoja vuorovaikutuksia aina suurten yhtenäisteorioiden energioihin asti. Jos mallin kvarkit oletetaan massattomiksi, tulee sen symmetriaryhmäksi  $G = SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ , missä  $N_f$  on

kvarkkimakujen määrä ja  $SU(N_f)_{L,R}$  operoivat erikseen vasen- ja oikeakätisiin kvarkkikenttiin. Tavallisesti  $N_f = 3$ . Symmetrian uskotaan kuitenkin olevan spontaanisti rikkoutunut siten, että moniston  $SU(N_f)$  pisteet ovat yksi-yhteen suhteessa teorian minimienergiatiloihin (tyhjiöihin). Näin ollen kvanttiväridynamiikan matalaenerginen dynamiikka on kuvattavissa kentällä, joka muuntuu symmetriaryhmän  $G$  globaaleissa muunnoksissa esityksen  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  mukaan. Olkoon  $V$  on tällainen kenttä ja muunnoksen suorittavat unitaarimatriisit  $A$  ja  $B$ , silloin

$$V \rightarrow V' \equiv AVB^\dagger.$$

Lyhyellä laskulla kuitenkin huomataan, että yllä määritelty  $U(x)$  muuntuu juuri näin. Näin päädytään siis kuvaamaan mesoneja juuri samanlaisella kentällä kuin millä Skyrme päätyi kuvaamaan baryoneja.

Tämä olisi ehkä jäänyt pelkäksi kuriositeetiksi, ellei 't Hooft olisi huomannut [50, 51], että kun kvarkkien väriyhmän  $SU(N)$   $N \rightarrow \infty$ , pienienergiset mesonit ja niiden vuorovaikutukset noudattavat yllä esitettyä efektiivistä teoriaa. Lisäksi Witten huomasi [52], että baryonit käyttäytyvät kuin solitonit tässä suuren  $N$ :n mesonikenttäteoriassa. Tämä havainto herätti Skyrmen mallin eloon noin kahdenkymmenen vuoden tauon jälkeen.

Sijoittamalla lauseen 2.39 Lagrangen tiheyteen  $f \equiv M \equiv 0$ , nähdään ettei Lagrangen tiheydellä  $\mathcal{L}_{S_{kin}}$  ole lainkaan solitoniratkaisuja, joten Lagrangen tiheyteen on lisättävä jotakin. Edelleen lauseen nojalla nähdään, ettei mikään kentän  $U$  funktio riitä tuottamaan solitoniratkaisuja, joten on etsittävä jotain muuta. Skyrme valitsi kentän derivaattojen korkeampia kertalukuja.

### 3.1.2 Topologinen osa

Ennen topologisen osan käsittelyä on hyvä tehdä seuraava huomio, joka sieventää kaavoja merkittävästi.

**Lause 3.1.** Olkoon  $a(x), b_i(x) \in \mathbb{R}$ ,  $A := \frac{1}{c}(a(x)\hat{1} + ib_i(x)\sigma^i)$  ja  $0 < a(x)^2 + b_i(x)b^i(x) \equiv c^2 \in \mathbb{R}$ . Silloin

$$A^{-1} = A^\dagger \quad \text{ja} \quad A^\dagger \partial_\mu A A^\dagger = -\partial_\mu A^\dagger.$$

*Todistus.*

$$\begin{aligned} AA^\dagger &= \frac{1}{c}(a(x)\hat{1} + ib_i(x)\sigma^i) \frac{1}{c}(a(x)\hat{1} - ib_i(x)\sigma^i) \\ &= \frac{\hat{1}}{c^2}(a(x)^2 + |\mathbf{b}(x)|^2) = \hat{1} \end{aligned} \quad (\text{oletuksen nojalla})$$

Tästä seuraa heti

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu(AA^\dagger) = (\partial_\mu A)A^\dagger + A\partial_\mu A^\dagger \\ \Rightarrow A^\dagger(\partial_\mu A)A^\dagger &= -\partial_\mu A^\dagger \end{aligned}$$

□

Skyrme käytti seuraavaa lisätermiä tuottaakseen teoriaan solitoniratkaisuja.

Olkoon  $U \equiv U(x)$  kuten edellä sekä  $0 \neq e \in \mathbb{R}$ . Merkitään

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S_{pot}} &:= \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} \left( \left[ (\partial_\mu U)U^\dagger, (\partial_\nu U)U^\dagger \right]^2 \right) \\ \mathcal{L}_{Skyrme} &:= \mathcal{L}_{S_{kin}} + \mathcal{L}_{S_{pot}}. \end{aligned}$$

Tämä on kuitenkin sievennettävissä hieman lausetta 3.1 ja jäljen syklisyyttä käyttäen, jolloin saadaan

$$\mathcal{L}_{S_{pot}} = \frac{1}{e^2} \operatorname{tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\nu U^\dagger - \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger).$$

Jotta lisätermin mahdollistaman solitoniratkaisun olemassaolo olisi nähtävissä, on ensin etsittävä  $\mathcal{L}_{Skyrme}$ :ä vastaava energiafunktioaali. Yksinkertaistetaan merkintää hetkeksi tätä varten merkitsemällä  $\phi_0 := \sigma$  ja  $\phi_i := \pi_i$ . Jälleen lausetta 3.1 ja jäljen syklisyyttä käyttäen määritelmän 2.34 mukainen energiafunktioaali saa muodon

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Skyrme} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{Skyrme}}{\partial \phi_{a,0}} \phi_{a,0} - \mathcal{L}_{Skyrme} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}_{S_{kin}}}{\partial \phi_{a,0}} \phi_{a,0} + \frac{\partial \mathcal{L}_{S_{pot}}}{\partial \phi_{a,0}} \phi_{a,0} - \mathcal{L}_{Skyrme}, \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{S_{kin}}}{\partial \phi_{a,0}} \phi_{a,0} &= \frac{1}{2} f_\pi^2 \operatorname{tr} (\partial_0 U \partial^0 U^\dagger) \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{S_{pot}}}{\partial \phi_{a,0}} \phi_{a,0} &= \frac{4}{e^2} \operatorname{tr} (\partial_0 U \partial_\mu U^\dagger \partial^0 U \partial^\mu U^\dagger - \partial_0 U \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U \partial^0 U^\dagger). \end{aligned}$$

Jos halutaan tarkastella mesoneja, pitäisi Lagrangen tiheyteen vielä lisätä massatermi  $\frac{1}{4} m^2 f_\pi^2 \operatorname{tr} U$ , mutta solitonitarkasteluja varten tämä ei ole tarpeen.

Aloitetaan solitoniratkaisujen tarkasteleminen staattisuudesta,  $\forall a: \partial_0 \phi_a = 0$ . Tätä varten on syytä huomata, että staattisuusehdolle on voimassa

$$\forall a: \partial_0 \phi_a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_0 U = 0,$$

jolloin energiafunktionaali saa muodon

$$\mathcal{E}_{Skyrme} = \int d^3x \left( \frac{1}{4} f_\pi^2 \operatorname{tr}(\partial_i U(x) \partial_i U(x)^\dagger) - \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} \left( \left[ (\partial_i U) U^\dagger, (\partial_j U) U^\dagger \right]^2 \right) \right).$$

Tästä nähdään helposti, että välttämätön ehto, jotta  $E_{Skyrme}$  olisi äärellinen, on

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} U \rightarrow \text{vakiomatriisi} \quad (3.6)$$

riittävän nopeasti. Lisäksi  $U$ :n on oltava riittävän säännöllinen. Erityisesti on huomattava, ettei tarkastelun yleisyys ei kärsi, mikäli valitaan  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} U \rightarrow \hat{1}$ , sillä matriisille  $U$  voidaan asettaa vakiokerroin muuttamatta Eulerin-Lagrangen yhtälöitä.

Lauseen 2.39 nojalla nähdään myös, että mallilla voi olla energieettisesti stabiili epätriviaali ratkaisu, kunhan kineettinen ja topologinen osa noudattavat viriaali-teoreemaa  $E_{kin} = E_{pot}$ . Lauseen toinen ehto toteutuu automaattisesti, sillä  $E_{kin}$  on kineettisenä energiana aina positiivinen.

Tässä ovatkin jo kaikki välttämättömät ehdot solitoniratkaisulle. Kiinnitetään seuraavaksi tarkasteluhetki. Olkoon tämä ajankohta  $t_0$ , jolloin joudutaan tarkastelemaan kenttää  $U_{t_0}(\mathbf{x})$ , jolloin  $U(x)$  siis toimii jatkuvana homotopiana eri ajan-kohtina tarkasteltavien kenttien välillä. Kaavasta (3.6) kuitenkin huomataan, että kentän  $U_{t_0}$ :n määrittelyalueeksi voidaankin  $\mathbb{R}^3$ :n sijaan ottaa  $S^3$ , koska se saa kaikilla  $|x| \rightarrow \infty$  saman arvon. Koska kuitenkin  $SU(2) \approx S^3$ , saadaan kentästä  $U$  kuvaus  $U_{t_0}: S^3 \rightarrow S^3 \cong SU(2)$ . Lauseen 2.5 nojalla  $\pi_3(SU(2)) \cong \mathbb{Z}$ , joten nähdään, että malli jakautuu (numeroituvasti) äärettömään määrään homotopialuokkia, joita kutakin vastaa bijektiivisesti jokin kokonaisluku. Ilmeisestikin tällaisia bijektioita on ääretön määrä<sup>1</sup>, joten on syytä valita niistä jokin. Eräs tällainen kuvaus on astekuvaus, joten käytetään sitä ja tehdään seuraava merkintä.

**Määritelmä 3.2.** Olkoon  $U$  kuten yllä. Merkitään  $\Phi \equiv (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) = (\sigma, \boldsymbol{\pi})$  ja määritellään

$$B(U(\Phi)) := \deg(\Phi).$$

Näin on määritelty kuvaus  $B: C^\infty(S^3, S^3) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Jatkossa lukua  $B(U)$  kutsutaan kentän  $U$  baryoniluvuksi syystä, joka selviää myöhemmin. Käyttämällä ensin kaavaa

<sup>1</sup>Mistä tahansa tällaisesta bijektiosta  $f$  saadaan uusi bijektio  $g \circ f$ , kun  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  on bijektio.

(2.13) ja myöhemmin kaavaa (2.45), saadaan tästä

$$B(U) = \frac{1}{12\pi^2} \int_{S^3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \phi^\alpha d\phi^\beta \wedge d\phi^\gamma \wedge d\phi^\delta \quad (3.7)$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} d^3x \epsilon_{ijk} \text{tr}(\partial_i U U^\dagger \partial_j U U^\dagger \partial_k U U^\dagger) \quad (3.8)$$

$$= \frac{-1}{24\pi^2} \int_{S^3} d^3x \epsilon_{ijk} \text{tr}(\partial_i U \partial_j U^\dagger \partial_k U U^\dagger), \quad (3.9)$$

sillä suoralla laskulla nähdään, että muodollisesti

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \phi^\alpha d\phi^\beta \wedge d\phi^\gamma \wedge d\phi^\delta = \frac{\epsilon_{ijk}}{2} \text{tr}(\partial_i U U^\dagger \partial_j U U^\dagger \partial_k U U^\dagger) d^3x. \quad (3.10)$$

Koska kentän  $U$  muutos ajan funktiona on homotopia, nähdään, ettei kenttä  $U_t$  voi mitenkään siirtyä homotopialuokasta toiseen, joten  $B$  on aikavakio. Vakion  $B$  voidaan myös ajatella olevan säilyvää virtaa vastaava varaus, mikäli sopiva säilyvä virta on olemassa. Skyrme huomasi, että seuraava virta säilyy ja, että sitä vastaava varaus on juuri  $B$ .

**Lause 3.3.** Olkoon

$$J^\mu = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(\partial_\nu U U^\dagger \partial_\lambda U U^\dagger \partial_\rho U U^\dagger),$$

silloin

$$\partial_\mu J^\mu = 0.$$

*Todistus.* Olkoon  $A_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$ . Tälle on voimassa

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -[A_\mu, A_\nu],$$

joten kun lisäksi merkitään  $c = \frac{1}{24\pi^2}$ , saadaan

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= c \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu \text{tr}(A_\nu A_\lambda A_\rho) = \frac{3}{2} c \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(A_\lambda A_\rho (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)) \\ &= -\frac{3}{2} c \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(A_\lambda A_\rho [A_\mu, A_\nu]) \\ &= -3c \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(A_\mu A_\nu A_\lambda A_\rho) \\ &= 0, \end{aligned}$$

koska jokaista  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(A_\mu A_\nu A_\lambda A_\rho)$  vastaa jäljen syklistyyden nojalla ja summausindeksit kertaalleen uudelleennimeämällä saadaan

$$\begin{aligned} \epsilon^{\rho\mu\nu\lambda} \text{tr}(A_\rho A_\mu A_\nu A_\lambda) &= -\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(A_\rho A_\mu A_\nu A_\lambda) \\ &= -\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{tr}(A_\mu A_\nu A_\lambda A_\rho) \\ &= -\epsilon^{\rho\mu\nu\lambda} \text{tr}(A_\rho A_\mu A_\nu A_\lambda). \end{aligned}$$

□

Ilman liikeyhtälöiden ratkaisua ei Skyrmen kentästä saada enää paljoa irti. Saa-  
daan kuitenkin vielä seuraava tulos.

**Lause 3.4.** Olkoon  $U$  kenttä, jolle  $B(U) = B$  sekä  $L_\mu$  ja  $E_{Skyrme}$  kuten aiemminkin.  
Silloin

$$E_{Skyrme} \geq \frac{8\pi^2 f_\pi}{e} |B|.$$

*Todistus.* Merkitään  $A_i = \partial_i U U^\dagger$  ja huomataan, että  $A_i = -A_i^\dagger$ . Nyt saadaan  
Cauchyn-Schwartzin epäyhtälöä ja pientä alaspäin arviointia käyttäen

$$\begin{aligned} E_{Skyrme} &= \frac{f_\pi^2}{4} \int d^3x \operatorname{tr} \left( A_i A_i^\dagger - \frac{2}{e^2 f_\pi^2} [A_i, A_j]^2 \right) \\ &= \frac{f_\pi^2}{4} \int d^3x \operatorname{tr} \left( A_i A_i^\dagger + \frac{4}{e^2 f_\pi^2} (\epsilon_{ijk} A_j A_k)^2 \right) \\ &= \frac{f_\pi^2}{4} \int d^3x \operatorname{tr} \left( A_i^\dagger A_i + \frac{4}{e^2 f_\pi^2} (\epsilon_{ijk} A_j^\dagger A_k) (\epsilon_{ilm} A_l A_m^\dagger) \right) \\ &= \frac{f_\pi^2}{4} \int d^3x \operatorname{tr} \left( |A_i|^2 + \frac{4}{e^2 f_\pi^2} |\epsilon_{ijk} A_j^\dagger A_k|^2 \right) \\ &= \frac{f_\pi^2}{4} \int d^3x \operatorname{tr} \left( (|A_i|^2 \pm \sqrt{\frac{4}{e^2 f_\pi^2}} |\epsilon_{ijk} A_j^\dagger A_k|)^2 \mp 2 \sqrt{\frac{4}{e^2 f_\pi^2}} |\epsilon_{ijk} A_i A_j A_k| \right) \\ &\geq \frac{f_\pi^2}{4} \int d^3x \operatorname{tr} \left( |A_i + \sqrt{\frac{4}{e^2 f_\pi^2}} \epsilon_{ijk} A_j^\dagger A_k|^2 - 2 \sqrt{\frac{4}{e^2 f_\pi^2}} |A_i| |\epsilon_{ijk} A_j^\dagger A_k| \right) \\ &\geq \frac{f_\pi^2}{4} \int d^3x \operatorname{tr} \left( 2 \sqrt{\frac{4}{e^2 f_\pi^2}} |A_i| |\epsilon_{ijk} A_j^\dagger A_k| \right) \\ &\geq \frac{8\pi^2 f_\pi}{e} \sqrt{2} |B(U)|. \end{aligned}$$

□

Nähdään siis jokaisen kentän  $U$  energian olevan alhaalta rajoitettu, oli  $U$  liikeyhtälöiden ratkaisu tai ei, sekä tämän rajan riippuvan  $U$ :n homotopialuokasta. Tämä tulos myös paljastaa, miksi kannatti valita juuri tätä muotoa oleva kuvaus  $B$ : homotopialuokkaa vastaava kokonaisluku ilmaisee nyt myös luokan energian alarajan ja vielä siten, että pienempinumeroisilla luokilla energian rajakin on pienempi.

Skyrmen kentän säilyvää virtaa vastaava säilyvä suure voidaan siis identifoida kentän homotopialuokaksi ja siihen yksinkertaisella tavalla yhdistää kentän energia. Skyrme tulkitsi vakion  $B$  baryoniluvuksi ja virran  $J_\mu$  baryonivirraksi. Edellisen lauseen takia on silloin syytä tulkita homotopialuokan  $B = 1$  minimienergiatila

nukleoniksi. Jäljellä on oleellisesti enää eri homotopialuokkiin kuuluvien liikeyhtälöiden ratkaisujen löytämisen ongelma. Tällaisia Skyrmen kentän liikeyhtälöiden topologisesti epätriviaaleja, lokaaleja, ajasta riippumattomia, Skyrmen lisätermin stabiloimia ratkaisuja on alettu yleisesti kutsua nimellä *skyrmioni*. Tutustutaan nyt lähemmin skyrmioneihin.

### 3.1.3 Skyrmionit

Jo vuonna 1961 Skyrme löysi liikeyhtälöilleen numeeriset ratkaisut, jotka kuuluvat homotopialuokkiin  $B = 1$  ja  $B = 2$ . Silloisten tietokoneiden laskentatehon takia hän käytti yrittienä pallosymmetristä tilaa, joka vähentää vapausasteet yhteen, kuten kohta nähdään. Myöhemmin on kuitenkin huomattu, että vaikka tapauksessa  $B = 1$  minimienergiatila todellakin on Skyrmen pallosymmetrinen ratkaisu, korkeampivarauksisissa tapauksissa minimienergian tila ei sitä enää ole. Tietokoneiden laskentateho on vasta viimeaikoina kasvanut niin suureksi, että korkeampivarauksisia minimienergiatiloja on pystytty numeerisesti löytämään. Viimeisimpiä tutkimuksia on [53, sekä sen viitteet], joka käsittelee perusteellisesti baryoniluvut  $1 - 22$ . Tässä käsitellään vain Skyrmen alkuperäistä ratkaisua. Erityisen mielenkiintoista on, että jo klassisen skyrmioniratkaisun nukleonien sidosenergian ja baryoniluvun suhde,  $\Delta E/B$ , vastaa hyvin havaintoja [53].

Skyrmen käyttämä ratkaisu voidaan kirjoittaa muotoon

$$U_0(x) := \exp(i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}}F(r)) \quad (3.11)$$

$$= \hat{1} \cos F(r) + i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}} \sin F(r), \quad (3.12)$$

missä profiilifunktio  $F(r)$  on etsittävä siten, että tilan energia minimoituu. Sijoittamalla tämä Eulerin-Lagrangen liikeyhtälöihin, saadaan profiilifunktiolle seuraava toisen kertaluvun epälineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö.

$$F'' + \frac{2}{r}F' - \frac{\sin(2F)}{r^2} - \frac{16}{e^2 f_\pi^2 r^2} \left( \frac{\sin(2F) \sin^2(F)}{r^2} - F'^2 \sin(2F) - 2F'' \sin^2(F) \right) = 0 \quad (3.13)$$

Numeerisesti voidaan etsiä minimienergian antava profiilifunktio  $F(r)$  [26].

Koska  $U_0$  on näinkin yksinkertaista muotoa, saadaan varaus laskettua.

**Lause 3.5.** Olkoon  $U_0$  ylläolevaa muotoa ja lokaali sekä  $F(0) = n\pi$ . Silloin

$$B(U_0) = n.$$

*Todistus.* Merkitään mielivaltaiselle funktiolle  $f$   $f(\infty) := \lim_{r \rightarrow \infty} f(r)$ . Olkoon lisäksi  $n \in \mathbb{N}$ . Lokaalisuusehdosta (3.6) seuraa  $F(\infty) = 0$  ja näin  $B$ :n määritelmästä 3.2 saadaan laskettua

$$\begin{aligned}
B(U_0) &= \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \frac{12F'(r) \sin^2 F(r)}{r^2} \\
&= \frac{2}{\pi} \int dr F'(r) \sin^2 F(r) \\
&= \frac{1}{\pi} (F(0) - F(\infty)) + \frac{1}{2\pi} (\sin(2F(\infty)) - \sin(2F(0))) \\
&= \frac{1}{\pi} F(0) - \frac{1}{2\pi} \sin(F(0)) \\
&= n.
\end{aligned}$$

□

Valitsemalla  $n = 1$  saadaan siis tila, jolle  $B = 1$ . Näin  $U_0$ :n energia on lauseen 3.4 nojalla alhaalta rajoitettu ja  $E(U_0) \geq \frac{24\pi^2}{e^2}$ . Luonnollisestikin kytkentävaktion roolissa oleva luku  $\frac{1}{e^2}$  pitää vielä jostakin määrätä ja sekä Skyrme että muut hänen jälkeensä ovat nukleonitulkintaa käsitellessään määrittäneet kytkentävaktion siten, että energiaksi tulee nukleonin massa. Skyrmen käyttämä arvo oli  $(ef_\pi)^2 = \frac{2}{(1.6fm)^2}$ .

Samoihin aikoihin kuin Witten ja 't Hooft tutkivat kvarkkiväridynamiikan käyttäytymistä, kun väriryhmän  $N \rightarrow \infty$ , keskittyi Ludwig Faddeev mallin yleisiin periaatteisiin. Faddeev tutki [31], millaisella ryhmäteoreettisesti yleisemmällä Lagrangen tiheyden symmetrialla voidaan rakentaa vastaavalla tavalla kenttäteorioita, jotka sisältävät säilyvän topologisen varauksen. Tämäkin malli jäi kuitenkin vähäiselle huomiolle lähes viideksitoista vuodeksi numeeristen laskentaresurssien vähäisyyden takia. Seuraavaksi siirrymme Faddeevin mallin pariin.

## 3.2 Faddeevin-Skyrmen malli

Kuten aiemmin on todettu, on Faddeevin malli [31] hyvin läheistä sukua Skyrmen mallille. Skyrmen mallin Lagrangen tiheys on  $SU(2) \times SU(2)$ -symmetrinen, kun taas Faddeev yleisti tämän mielivaltaiselle kompaktille ryhmälle  $G$ . Keskitytään tässä kuitenkin tapaukseen, jossa  $G = O^3 \times O^3$  - sama tapaus, jota Faddeev itsekin käytti esimerkkinä ja jota on myös eniten tutkittu. Kuten Skyrmenkin mallin kohdalla, tarkastellaan aluksi vain kineettistä osaa.

### 3.2.1 Kineettinen osa

Olkoon  $\mathbf{n}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , missä  $n_i$  ovat skalaarikenttiä sekä  $|\mathbf{n}| = 1$ . Merkitään sitten Skyrmen mallin tapaan

$$\mathcal{L}_{F_{kin}} := \frac{1}{2} (\partial_\mu \mathbf{n}(x)) \cdot (\partial^\mu \mathbf{n}(x)). \quad (3.14)$$

Helposti nähdään, että tämä todellakin on  $O(3)$ -symmetrinen ja määritelmän 2.34 mukaiseksi energiafunktionaaliksi saadaan

$$\begin{aligned} E_{F_{kin}} &:= \frac{1}{2} \int d^3x \left( (\partial_0 \mathbf{n}) \cdot (\partial^0 \mathbf{n}) - (\partial_i \mathbf{n}(x)) \cdot (\partial^i \mathbf{n}(x)) \right)^2 \\ &\equiv \frac{1}{2} \int d^3x (\partial_\mu \mathbf{n})^2. \end{aligned}$$

Tällä ei kuitenkaan voi olla staattisia, stabiileja ja lokaaleja epätriviaaleja ratkaisuja, mikä nähdään valitsemalla lauseessa 2.39  $f \equiv M \equiv 0$ . Tarkastelu kannattaa kuitenkin suorittaa, jotta nähdään, millainen termi Lagrangen tiheyteen pitäisi lisätä tai miten tätä termiä pitäisi muuttaa, jotta solitoniratkaisuja voisi olla olemassa. Skaalauksessa  $\mathbf{n}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{n}(\lambda \mathbf{r})$  saadaan kappaleen 2.3.3 tapaan

$$E_{F_{kin}} \rightarrow E_{1\lambda} \equiv \frac{E_{F_{kin}}}{\lambda}. \quad (3.15)$$

Tästä nähdään heti kaksi vaihtoehtoa tilanteen korjaamiseksi. Lisätään Lagrangen tiheyteen lauseen 2.39 tapaan termi  $\mathcal{L}_2$  tai eliminoidaan termin skaalauksessa ilmenevä  $\lambda$ -riippuvuus  $E_{1\lambda}$ -termistä. Jälkimmäinen voidaan hoitaa helpoiten nostamalla se potenssiin  $3/2$ . Faddeev käytti edellistä, mutta myöhemmin esitellään mallia, jossa on käytetty jälkimmäistä.

### 3.2.2 Topologinen osa

Ennen kuin esitellään yksinkertaisin sellainen termi, joka kykenee stabiloimaan Lagrangen tiheyden (3.14) ratkaisun energian, on kuitenkin hyvä tehdä seuraava merkintä sekä huomio.

Olkoon  $\mathbf{n}: \mathbb{R}^4 \rightarrow S^2$ , missä  $n_i$  ovat skalaarikenttiä ja  $|\mathbf{n}| = 1$ . Merkitään

$$F_{\mu\nu} := \epsilon_{ijk} n^i \partial_\mu n^j \partial_\nu n^k \equiv \mathbf{n} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}).$$

**Huomautus 7.** Olkoon  $\mathbf{n}$  ja  $F_{\mu\nu}$  kuten edellä. Silloin

$$F_{\mu\nu}^2 = (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})^2 = (\partial_\mu \mathbf{n})^2 (\partial_\nu \mathbf{n})^2 - (\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n})^2.$$

*Todistus.* Jälkimmäinen yhtälö on tuttu vektorianalyysin kaava  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ . Ensimmäinen saadaan osoitettua, kun muistetaan, että

$$|\mathbf{n}|^2 = 1 \quad (3.16)$$

sekä tämän suoralla, mutta pitkällä laskulla saatava seuraus

$$n_i(\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})_j = n_j(\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})_i. \quad (3.17)$$

Silloin todellakin,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^2 &= \left( \mathbf{n} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \left( n_i n_j (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})_i (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \left( n_i^2 (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})_j^2 \right) \\ &= (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})^2. \end{aligned}$$

□

Olkoon  $0 < g \in \mathbb{R}$  sekä  $F_{\mu\nu}$  ja  $\mathbf{n}$  kuten edellä. Merkitään

$$\mathcal{L}_{F_{top}} := \frac{1}{2} g F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g F_{\mu\nu}^2$$

ja tätä vastaavaksi energiafunktionaaliksi tulee

$$E_{F_{top}} := g \int d^3x (F_{0j} F^{0j} - \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij})$$

### 3.2.3 Faddeevin-Skyrmen mallin Lagrangen tiheys

Termi  $\mathcal{L}_{F_{top}}$  on samaa muotoa kuin nyt lauseen 2.39 termi  $\mathcal{L}_2$ , joten viriaaliteoreeman 5 ollessa voimassa, nämä kaksi termiä yhdistämällä saadaan malli, jolla voi olla solitoniratkaisuja. Kyseessä on malli, jonka Faddeev valitsi tarkemman tarkastelun kohteeksi [31]. Kutsutaan tästä lähin tätä mallia Faddeevin malliksi ja tehdään seuraavat merkinnät.

Olkoot  $\mathbf{n}$  ja  $g$  kuten edellä. Merkitään

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Faddeev} &:= \mathcal{L}_{F_{kin}} + \mathcal{L}_{F_{top}} && \text{sekä} \\ E_{Faddeev} &:= \frac{1}{2} \int d^3x \left( (\partial_\mu \mathbf{n})^2 + 2g F_{0j} F^{0j} - g F_{ij}^2 \right). \end{aligned}$$

Solitoniratkaisun olemassaoloa tutkittaessa joudutaan tutkimaan vielä staattisen kentän lokaalisuutta. Staattisen kentän energiefunktionaali on

$$E_{Faddeev} = \frac{1}{2} \int d^3x \left( (\partial_i \mathbf{n})^2 - g \left( (\partial_i \mathbf{n})^2 (\partial_j \mathbf{n})^2 - (\partial_i \mathbf{n} \cdot \partial_j \mathbf{n})^2 \right) \right). \quad (3.18)$$

Tästä nähdään helposti, että tarpeeksi säännölliselle kentälle  $\mathbf{n}$  äärellinen energia saavutetaan ainakin, mikäli

$$\mathbf{n} \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \text{vakio}$$

tarpeeksi nopeasti. Erityisesti on huomattava, ettei tarkastelun yleisyys kärsi, mikäli tämä arvo kiinnitetään, joten olkoon  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{n} = (0, 0, 1)$ .

Määritelmän 2.38 mukaiselle solitoniratkaisulle välttämättömät ehdot on nyt tarkastettu ja huomattu, että Faddeevin-Skyrmen malli toteuttaa ne kaikki. Skyrmen mallin käsittelyn tapaan kiinnitetään seuraavaksi tarkasteluhetki. Olkoon tämä ajankohta  $t_0$ . Kuten edellä, sekä määrittely- että arvojoukko voidaan kompaktifoida, jolloin saadaan luvun 2.1 merkinnöin kentästä  $n$  kuvaus  $n_{t_0}: S^3 \rightarrow S^2$ , joka toimii jatkuvana homotopiana eri ajankohtina tarkasteltavien kenttien välillä. Lauseen 2.5 nojalla  $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ , joten Skyrmen mallin tapaan Faddeevinkin mallin tilat jakaantuvat (numeroituvasti) äärettömään määrään homotopialuokkia, joita jokaista vastaa bijektiivisesti jokin kokonaisluku. Kuten edellä, näitä bijektioita on numeroituvasti ääretön määrä; on siis syytä valita niistä jokin. Eräs tällainen kuvaus  $\pi_3(S^2) \rightarrow \mathbb{Z}$  on konstruoitu määritelmässä 2.22, joten valitaan se.

**Merkintä 3.6.** Olkoon  $H: \pi_3(S^2) \rightarrow \mathbb{Z}$  kuten määritelmässä 2.22 ja

$$Q \equiv Q(\mathbf{n}) := H(\mathbf{n}).$$

**Huomautus 8.** On syytä huomata tämän ja määritelmän 2.22 vastaavuudet. Muodolle  $d\omega$  voidaan kirjoittaa  $F := A(2)d\omega \equiv \frac{1}{2}F_{ij}dx^i \wedge dx^j$  ja jos merkitään lisäksi muotoa  $\omega(x)$  muodolla  $A$  siten, että  $F \equiv dA$ , saadaan fysiikassa tyypillisesti käytetty muoto

$$H(\mathbf{n}) \equiv \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{S^3} A \wedge F. \quad (3.19)$$

Lisäksi kannattaa huomata, että tällöin  $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ , joka voidaan laajentaa koskemaan myös aikakomponentteja.

Luvun 2.2 tapaan kutsutaan lukua  $Q$  kentän  $\mathbf{n}$  Hopfin invariantiksi. Lauseen 2.27 jälkeisten huomioiden nojalla  $Q$  on aikavakio. Skyrmen mallin tapaan tällekin varaukselle voidaan löytää vastaava säilyvä virta.

**Lause 3.7.** Olkoon

$$J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\nu\rho} A^\sigma, \quad (3.20)$$

silloin

$$\partial^\mu J_\mu = 0. \quad (3.21)$$

*Todistus.*

$$\begin{aligned} \partial^\mu J_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left( \partial^\mu F^{\nu\alpha} A^\beta + F^{\nu\alpha} \partial^\mu A^\beta \right) \\ &= +\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left( \partial^\mu \partial^\nu A^\alpha \right) A^\beta + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left( \partial^\nu A^\alpha \right) \partial^\mu A^\beta \\ &\quad - \epsilon_{\nu\alpha\mu\beta} \left( \partial^\mu \partial^\nu A^\alpha \right) A^\beta - \epsilon_{\beta\alpha\nu\mu} \left( \partial^\nu A^\alpha \right) \partial^\mu A^\beta \\ &= 0, \end{aligned}$$

missä on käytetty toisten derivaattojen jatkuvuutta ja vaihdettu sopivasti summausindeksien nimiä.  $\square$

Edelleen on olemassa epäyhtälö kentän homotopialuokan ja energian välillä. Faddeevin-Skyrmen mallin tapauksessa epäyhtälö on monimutkaisempi ja hankalampi johtaa kuin Skyrmen mallilla, mutta tuloskin on mielenkiintoisempi. Löytöjensä mukaan tätä rajaa usein kutsutaan Vakulenkon-Kapitanskiin [35] rajaksi.

**Lause 3.8 (Vakulenko-Kapitanskii).** Olkoon  $\mathcal{N} = \{\mathbf{n} | \mathbf{n}: S^3 \rightarrow S^2\}$ ,  $0 < c \in \mathbb{R}$  sekä  $Q$  ja  $E_F$  kuten edellä. Silloin  $\forall \mathbf{n} \in \mathcal{N}$

$$E_{Faddeev} \geq c\sqrt{g}|Q(\mathbf{n})|^{3/4}.$$

*Todistus.* Sivuutetaan, katso [35].  $\square$

Myöhemmin vakiota  $c$  on yritetty tarkentaa ja voidaankin osoittaa [54, 55], että ainakin

$$c = \sqrt{128}\pi^2 3^{3/8} \quad (3.22)$$

kelpaa. Lisäksi [54] esittää konjektuurin, että jopa  $c = 32\pi^2$  kelpaisi. Tämä konjektuuri perustuu Hopfin kuvauksen ominaisuuksiin, mutta sitä ei ilmeisesti ole vielä varmennettu analyttisesti. Koska energian ja varauksen riippuvuus ei olekaan Skyrmen mallin tapaan lineaarinen, on odotettavissa huomattavan rikas topologinen rakenne. Tämä tulos myös paljastaa, miksi kannatti valita juuri muotoa 3.6

oleva kuvaus  $Q$ : kentän tilojen minimienergiat kasvavat nyt monotonisesti  $|Q|$ :n mukana.

Skyrmen mallista poiketen mallin symmetriaominaisuuksia ei kuitenkaan voida käyttää hyväksi Eulerin-Lagrangen yhtälöiden ratkaisemiseksi, koska yrityksistä huolimatta muuttujia ei ole onnistuttu separoimaan. Koska nämä yhtälöt ovat lisäksi hyvin epälineaarisia, jäljelle jäävät vain numeeriset menetelmät. Ennen kuin kuitenkaan perehdytään Faddeevin mallin numeerisiin ratkaisuihin ja niiden ominaisuuksiin, tutkitaan vielä kahta Faddeevin mallin kaltaista mallia, joille voidaan löytää analyyttinen, epätriviaali ratkaisu.

### 3.2.4 Kaksi ratkeavaa mallia

On myös mahdollista muokata Faddeevin Lagrangen tiheyden kineettistä osaa siten, että se on stabiili yksinään. Samoin voidaan tehdä topologiselle osalle. Kuten yhtälöstä (3.15) nähdään, helpoin tapa tehdä tämä on nostaa koko kineettinen osa potenssiin  $3/2$  [34]. Tällöin Lagrangen tiheys tulee seuraavaan muotoon.

**Merkintä 3.9.** Olkoon  $\mathbf{n} \in S^2$  (eli  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $n_i \in \mathbb{R}$ ) ja

$$\mathcal{L}_N := - \left( -\frac{1}{4} (\partial_\mu n_i)^2 \right)^{3/2}.$$

Kuten edellä, keskitytään vain staattisiin ratkaisuihin, joten aikaderivaatat katoavat. Otetaan lisäksi käyttöön stereograafiset koordinaatit  $w$  seuraavasti

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos(\theta) \\ n_2 + in_3 &= \sin(\theta)e^{i\phi} \\ w &= \tan\left(\frac{1}{2}\theta\right)e^{i\phi} = \frac{n_2 + in_3}{1 + n_1} \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

jolloin Lagrangen tiheys saa muodon

$$\mathcal{L}_N \equiv - \frac{\left( (\partial_i w^*) (\partial_i w) \right)^{3/2}}{(1 + w^* w)^3}$$

ja Eulerin-Lagrangen liikeyhtälöt muodon

$$\partial_i \left( \frac{(\partial_i w) |\partial_j w|}{(1 + w^* w)^3} \right) + \frac{2w |\partial_j w|^3}{(1 + w^* w)^4} = 0$$

Olkoot jälleen  $u \in S^3$  sen tavalliset koordinaatit,

$$u_4 = \frac{1 - R^2}{1 + R^2} \quad u_i = \frac{2x_i}{1 + R^2} \quad R^2 = x_i x_i$$

ja

$$Z(u) = \frac{u_4 + iu_3}{u_1 + iu_2}. \quad (3.23)$$

Silloin voidaan osoittaa [34], että

$$Q(Z^n) = \pm n,$$

missä etumerkki määräytyy moniston  $S^3$  suunnistuksesta. Voidaan siis aina valita  $Q \geq 0$ . Voidaan lisäksi osoittaa [34], että  $Z$  on Eulerin-Lagrangen liikeyhtälöiden ratkaisu. On siis konstruoitu ratkaisu, jonka Hopfin invariantti on yksi. Numeerisia tarkasteluja ajatellen  $Z^n$  antaisi erään varauksen  $n$  tilan, mistä voitaisiin lähteä etsimään liikeyhtälöille ratkaisuja numeerisesti.  $Z$ :n kaltaisia rationaalikuvauksia tullaan kohtaamaan myöhemminkin.

Sijoittamalla  $Z$  Lagrangen tiheyteen, saadaan

$$\mathcal{L}_N|_{w=Z} = \frac{16\sqrt{2}}{(1 + R^2)^3},$$

joten ratkaisun energiatiheyden nähdään olevan pallosymmetrinen. Tämä on huomattava tulos, koska ratkaisu  $Z$  itse ei sitä ole! Tässä käsittelyssä sivuutetut laskut on laskettu viitteessä [34], missä myös jatketaan vielä hieman ratkaisun rakenteen tutkimista.

Muokataan sitten topologista osaa siten, että vuorostaan se on stabiili yksinään. Yhtälöstä (2.65) nähdään, että myös tämä on helpointa tehdä potenssiin korottamalla [56, 57]. Nyt Lagrangen tiheys saa muodon

**Määritelmä 3.10.** Olkoon taas  $\mathbf{n} \in S^2$  ja  $F_{\mu\nu}$  kuten edellä. Merkitään sitten

$$\mathcal{L}_{AFZ} := - (F_{\mu\nu}^2)^{3/4}$$

Käyttämällä jälleen  $S^2$ :n stereograafisia koordinaatteja<sup>2</sup>

$$n_1 + in_2 = \sin(\theta)e^{i\phi} \quad n_3 = \cos(\theta) \quad w = \tan\left(\frac{1}{2}\theta\right)e^{i\phi},$$

---

<sup>2</sup>Huomaa, että  $n$ :n komponentit on numeroitu eri tavalla kuin edellä.

saadaan

$$F_{\mu\nu} \equiv -\frac{2i}{(1+|w|^2)^2} (\partial_\mu w \partial_\nu w^* - \partial_\nu w \partial_\mu w^*).$$

Merkitään sitten vielä

$$K_\mu = \frac{i}{2} (1+|w|^2)^2 F_{\mu\nu} \partial^\nu w \quad \text{ja} \quad \mathcal{K}_\mu = \frac{(K_\alpha \partial^\alpha w^*)^{-1/4} K_\mu}{1+|w|^2},$$

jolloin Eulerin-Lagrangen liikeyhtälöt saavat hyvin yksinkertaisen muodon

$$\partial^\mu \mathcal{K}_\mu = 0. \quad (3.24)$$

Määritellään sitten  $\mathbb{R}^3$ :lle toruskoordinaatisto  $(\eta, \xi, \phi)$  seuraavasti. Olkoon  $0 < a \in \mathbb{R}$ ,  $q = \cosh(\eta) - \cos(\xi)$  ja

$$x = \frac{a}{q} \sinh(\eta) \cos(\phi) \quad y = \frac{a}{q} \sinh(\eta) \sin(\phi) \quad z = \frac{a}{q} \sin(\xi).$$

Kun  $m, n \in \mathbb{N}$ , voidaan osoittaa [57], että

$$w(\eta, \xi, \phi) := f(\eta) e^{i(m\xi + n\phi)} \quad (3.25)$$

on Eulerin-Lagrangen liikeyhtälöiden (3.24) ratkaisu, kun

$$f(\eta)^2 = \frac{\cosh(\eta) - \sqrt{\frac{n^2}{m^2} + \sinh^2(\eta)}}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2} \sinh^2(\eta) - \cosh(\eta)}}. \quad (3.26)$$

Edelleen voidaan osoittaa [57], että tämän Hopfin invariantti on

$$Q(\mathbf{n}) = mn.$$

Tämä oli tiettävästi ensimmäinen kerta, kun kenttäteoreettisille Eulerin-Lagrangen yhtälöille löydettiin suljetussa muodossa ääretön määrä solitoniratkaisuja, joiden Hopfin invariantti on suurempi kuin yksi. Tästä on ehkä syytä huomata, että valitsemalla  $m = n = 1$  saadaan sama ratkaisu kuin aiemmin kaavassa (3.23). Ensinäkemältä tämä lienee yllättävää, mutta kun asetetaan rajoitus  $(\partial_\mu w)^2 = 0$ , mallien Eulerin-Lagrangen yhtälöt ovat samat. Niiden yhtäläisyys tulee ilmi, kun huomataan, että (3.23) ja (3.25) toteuttavat tämän ehdon automaattisesti.

## Luku 4

# Faddeevin kentän liikeyhtälöiden numeerisesta ratkaisemisesta: aikaisempia tuloksia

Kuten jo aiemmin mainittiin, Faddeevin-Skyrmen malli jäi pitkäksi aikaa vähälle huomiolle, koska sille ei kyetty löytämään analyyttistä ratkaisua eikä sellaista muuttujat riittävästi separoivaa symmetriaa, että silloiset tietokoneet olisivat kyenneet löytämään numeerisen ratkaisun. Kuten kaavasta (2.40) nähdään, on helppo löytää kuvaus, minkä Hopfin invariantti on haluttu eli mikä kuuluu haluttuun homotopialuokkaan. Ikävä kyllä tällainen kuvaus ei yleensä - jos koskaan - ole Eulerin-Lagrangen yhtälöiden ratkaisu. Se kuitenkin sopii alkuarvoksi minimin numeeriseen etsintään; täytyy vain pitää huoli, ettei minimin etsimisessä käytetty algoritmi siirrä sitä toiseen homotopialuokkaan.

Hieman muunnellut mallit, olivat kyllä tutkimuksen kohteena jo 1970-luvun lopulla, kuten kappaleessa 3.2.4 esitelty malli [34] sekä de Vegan [58] malli, missä Faddeevin-Skyrmen Lagrangen tiheyttä on muutettu seuraavasti

$$\mathcal{L}_{deVega} = \frac{g_1}{2} (\partial_\mu \sigma_i)^2 + \Lambda(x) (\sigma_i^2 - 1) + g_2 ((\partial_\mu \sigma_i)^2)^2 + g_3 (\partial_\mu \sigma_i \partial_\mu \sigma_j)^2. \quad (4.1)$$

Tässä kineettinen termi ja neljännen asteen derivaattatermit kumoavat toinen toistensa aiheuttamat epästabiiliudet avaruuden skaalauksessa - aivan kuten käy täydessä luvun 3.2 Faddeevin-Skyrmen mallissakin.

Aivan ensimmäiseksi on syytä tutustua käytettyihin numeerisiin menetelmiin sekä niiden mukanaan tuomiin laskennallisiin hankaluuksiin.

## 4.1 Numeerisista menetelmistä

### 4.1.1 Derivaatan diskretointi

Tässä työssä on käytetty samaa derivaatan diskretointia kuin viitteessä [46], mutta kyseessä ei suinkaan ole ainoa mahdollinen tapa. Esimerkiksi viitteessä [59] on käytetty toisenlaista diskretointia.

Lagrangen tiheyden diskretointi on tehty seuraavasti. Ensin koko systeemi laitettiin äärelliseen, suorakulmaiseen hilaan. Tämä äärellisyys aiheuttaa luonnollisesti pientä epätarkkuutta sillä koko avaruutta ei näin saada tutkittua, mutta koska ratkaisut ovat hyvin lokalisoituneita, virheen voidaan uskoa olevan kohtalaisen pieni. Merkitään nyt diskreeteissa hilapisteissä määriteltyjä vektoreita  $n_{ijk}^l$ , missä  $i, j, k$  antavat hilapisteen koordinaatit ja  $l$  vektorin komponentin, jolloin siis  $\sum_{l=1}^3 (n_{ijk}^l)^2 = 1 \forall i, j, k$ . Tämän jälkeen Lagrangen tiheyden termit diskretoitiin seuraavasti. Olkoon  $\delta$  hilapisteiden jakoväli, jolloin saadaan

$$\left(\partial_\mu \mathbf{n}(x_1, x_2, x_3)\right)^2 \rightarrow \frac{1}{\delta^2} \sum_{i,j,k,l} \left( (n_{i+1jk}^l - n_{ijk}^l)^2 + (n_{ij+1k}^l - n_{ijk}^l)^2 + (n_{ijk+1}^l - n_{ijk}^l)^2 \right). \quad (4.2)$$

Topologiselle termille  $F_{\mu\nu}$  diskretointi suoritetaan  $(\mu, \nu)$ -tasossa siten että se on täysin symmetrinen. Tällöin esimerkiksi  $F_{12}$  saa muodon

$$n^l \rightarrow \frac{1}{4} (n_{ijk}^l + n_{i+1jk}^l + n_{ij+1k}^l + n_{ijk+1}^l) \quad (4.3)$$

$$\partial_1 n^l \rightarrow \frac{1}{2\delta} \left( (n_{i+1jk}^l - n_{ijk}^l) + (n_{i+1j+1k}^l - n_{ij+1k}^l) \right) \quad (4.4)$$

$$\partial_2 n^l \rightarrow \frac{1}{2\delta} \left( (n_{ij+1k}^l - n_{ijk}^l) + (n_{i+1j+1k}^l - n_{i+1jk}^l) \right). \quad (4.5)$$

Tarvittavat Riemannin integraalit suoritetaan sitten luonnollisella tavalla kertomalla joka hilapisteessä saatava Lagrangen tiheyden arvo vastaavan avaruuden osan tilavuudella  $\delta^3$  ja laskemalla nämä yhteen yli koko hilan.

### 4.1.2 Jyrkimmän suunnan menetelmä (gradienttimenetelmä)

Jyrkimmän suunnan menetelmä on periaatteeltaan varsin yksinkertainen. Olkoon annettuna funktio  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , jolle halutaan etsiä minimi. Olkoon  $\lambda_i > 0 \forall i \in \mathbb{Z}$ ,  $k = 1$  ja valitaan iteraation alkupiste,  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ . Lisäksi valitaan jokin ratkaisulta

haluttu tarkkuus. Tämä voidaan määrittää monellakin eri tavalla; yksi vaihtoehto on sopia, että haluttu tarkkuus on saavutettu, kun gradientti on kyllin pieni. Itse algoritmi on seuraava [60].

Vaihe 1) Olkoon  $y_k := x_k + \lambda_k(-\nabla f(x_k))$  ja  $\lambda_k$  valittu siten, että funktio  $f(y_k)$  saa minimiarvonsa sen suuntaan.

Vaihe 2) Mikäli saavutettu tarkkuus ei ole riittävä, asetetaan  $x_{k+1} = y_k$  ja  $k \rightarrow k+1$  sekä palataan vaiheeseen 1.

Kun kyseessä on funktionaali  $E[\mathbf{n}] := \int d^3x \mathcal{E}(\mathbf{n})$ , toimitaan samalla tavalla, mutta  $E$ :n gradientin sijaan lasketaan  $\mathcal{E}$ :n gradientti ja käydään läpi koko (diskreetoitu) maailma. Olkoon iteraation alkuarvo nyt  $\mathbf{n}_1$ . Sen jälkeen algoritmi näyttää seuraavalta.

Vaihe 1) Haetaan minimipiste jokaiselle kentälle  $\mathbf{m}_k$  kuten edellä, eli olkoon jälleen  $\mathbf{m}_k(\mathbf{x}) := \mathbf{n}_k(\mathbf{x}) + \lambda_k(-\nabla \mathcal{E}(\mathbf{x}))$  ja  $\lambda_k$  sellainen, että funktionaali  $E[\mathbf{m}_k]$  saa minimiarvonsa sen suuntaan.

Vaihe 2) Mikäli saavutettu tarkkuus ei ole riittävä, asetetaan  $\mathbf{n}_{k+1} := \mathbf{m}_k$  ja  $k \rightarrow k+1$  sekä palataan vaiheeseen 1.

### 4.1.3 Liittogradienttimenetelmä

Liittogradienttimenetelmä, kuten nimestäkin saattaa arvata, perustuu gradienttimenetelmään, mutta tämä menetelmä ottaa huomioon myös edellisen gradientin, jolloin saavutetaan nopeampi suppeneminen. Olkoon  $\epsilon > 0$  haluttu tarkkuus ja jälleen  $\lambda_i > 0 \forall i \in \mathbb{Z}$ ,  $k = 1$ ,  $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$  alkuarvaus ja  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  funktio, jolle halutaan etsiä ääriarvo. Lisäksi pitää valita jokin tapa määrittää algoritmissa esiintyvä luku  $\beta_k$ . Menetelmiä sen valitsemiseksi on useita, mutta tässä, kuten myös viitteissä [41, 46], on käytetty niin sanottua *Fletcher-Reeves* -menetelmää, jossa  $\beta_1 = 0$  ja

$$\beta_k = \frac{\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_{k-1} \cdot \mathbf{g}_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

kun merkitään

$$\mathbf{g}_k := \nabla f(\mathbf{x}_k).$$

Muilta osin menetelmä on täysin sama, vaikka  $\beta_k$  valittaisiinkin toisin. Algoritmi näyttää seuraavalta [60].

Vaihe 1) Lasketaan  $\mathbf{g}_k$  ja  $\beta_k$  yllä olevista määritelmistä

Vaihe 2)  $\mathbf{s}_k := -\mathbf{g}_k + \beta_k \mathbf{s}_{k-1}$

Vaihe 3) Etsitään  $\lambda_k > 0$  siten, että funktio  $f(\mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{s}_k)$  saa miniminsä  $\lambda_k$ :n suhteen.

Vaihe 4) Mikäli  $\|\mathbf{g}_k\| > \epsilon$ , asetetaan  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{s}_k$ ,  $k \rightarrow k + 1$  ja palataan vaiheeseen 1.

Myös tämä menetelmä yleistyy funktionaalille  $E[\mathbf{n}]$  samaan tapaan kuin gradienttimenetelmäkin.

#### 4.1.4 Numeeristen menetelmien ongelmista

Yhteistä kaikille näille menetelmille on niiden mukanaan tuomat ongelmat. Seuraavaksi kuvattavien kahden ongelman lisäksi gradienttimenetelmä ja liittogradienttimenetelmä tuovat mukanaan vielä kolmannenkin ongelman. Tässä työssä yhteinä tarkoituksena on ollut selvittää, kuinka hyvin eri varauksen kentät saavuttavat Vakulenkon-Kapitanskiin energiarajan 3.8. Kuitenkin, löytäessään lokaalin minimin, nämä algoritmit eivät enää pääse siitä pois, sillä gradientti luonnollisesti lähestyy nollaa ja mikäli seuraava iteraatio viekin minimin ohi, osoittaa gradientti uudessa pisteessä takaisin minimiä kohti. Ainoa keino päästä pois tällaisesta “potentiaaliukuopasta” on lisätä askelpituutta siten, että seuraava askel hyppääkin koko potentiaalivallin yli, mutta on kaksi hyvää syytä olla tekemättä näin. Ensinnäkin, kyseessä voikin olla globaali minimi, jolloin koko yritys päästä pois potentiaaliukuopasta on ajan tuhlausta. Tämän lisäksi mitään tietoa siitä, mihin suuntaan ja kuinka pitkä askel pitäisi ottaa.

Systeemien topologisten ominaisuuksien takia tilojen ei voida antaa kehittyä mielivaltaisesti ja muutoksen jatkuvuuden takaamiseksi tässä tutkimuksessa tarkkailtiin vierekkäisten vektoreiden välistä kulmaa. Mikäli se kasvoi liian suureksi (noin 60 astetta), aloitettiin kyseinen systeemi alusta tiheämmällä hilalla. Joissakin tapauksissa tämä olisi vaatinut enemmän muistiakapasiteettia kuin käytettävissä oli ja tapaus oli siirrettävä myöhempään tutkimukseen.

Toinen hankaluus seuraa äärellisestä hilasta, joka muuttaa äärettömän avaruuden äärelliseksi. Tämän takia on mahdollista, että tila ei pääse lähestymään hilan reunoilla vakuumiarvoaan tarpeeksi hitaasti. Tällöin vakuumiarvoon pakotetut reunat estävät tilan relaksoitumisen todellista minimienergiatilaa vastaavaan tilaan.

Hilan äärellisyydestä seuraa myös pieni systemaattinen virhe tilan energiaan. Tätä tutkittiin jo viitteessä [46], missä arvioidaan systemaattisen virheen suuruudeksi noin 5%.

## 4.2 Faddeevin-Skyrmen mallin lenkki- ja solmuraatkaisuuksista

Oli odotettava aina vuoteen 1996 asti ennen kuin ensimmäiset täyden Faddeevin-Skyrmen mallin numeeriset ratkaisut näkivät päivänvalon [61] ja [62]. Faddeevin mielenkiinto vanhaa malliaan kohtaan ei ollut kadonnut ja niinpä laskentakapasiteetin lisääntyttyä tarpeeksi, hän palasi mallinsa pariin. Jo hieman aikaisemmin myös Gladikowski ja Hellmund [63] sekä hieman myöhemmin Battye ja Sutcliffe [59, 64] sekä Hietarinta ja Salo [41, 46] julkaisivat lisää tuloksia Faddeevin-Skyrmen mallista. Käydään nyt lyhyesti läpi näiden julkaisujen tulokset.

Vielä 1996 laskentakapasiteetti ei ollut aivan Faddeevin-Skyrmen mallin perusteellisen käsittelyn vaatimalla tasolla, niinpä Faddeev ja Niemi päätyivät redusoidaan ongelman kaksiulotteiseksi seuraavasti. He käyttivät sylinterikoordinaattistoa  $(r, z, \psi)$  sekä olettivat ratkaisun olevan  $S^1 \times S^2$ -symmetrisen, jolloin Eulerin-Lagrangen yhtälöistä separoituu kulmariippuvuus  $\psi$  pelkäksi vaiheeksi. Separointi onnistuu, koska ehto  $|\mathbf{n}| = 1$  rikkoo Faddeevin-Skyrmen Lagrangen tiheyden  $SO(3)$ -symmetrian  $SO(2)$ -symmetriaksi. Tämä symmetriaoletus osoittautui myöhemmin kuitenkin virheelliseksi. Gladikowski ja Hellmund tekivät samanlaisen separaation, mutta toruskoordinaateilla.

Faddeev ja Niemi kuitenkin käyttivät numeerisissa laskuissaan stereograafisia koordinaatteja saadakseen yhtälönsä vielä helpommiksi käsitellä. Tämä kuitenkin tuo laskuihin ikävän singulariteetin [46] sekä hankaluuksia reunaehtojen kanssa [59].

Sekä [59, 64] että [41, 46] käyttivät laskuissaan täyttä kolmiulotteista mallia. Tällä saavutettiin se etu, että voitiin tutkia myös ratkaisuja, jotka eivät ole rotaatiosymmetrisiä; haittapuolena on tietenkin suurempi laskentakapasiteetin kulutus. Näiden kahden ryhmän käyttämät numeeriset algoritmit ja minimoinnin alkutilat ovat kuitenkin oleellisesti erilaiset, joten niiden tulosten yhtyessä voidaan suurella varmuudella uskoa minimienergiatilan todellakin löytyneen. Näitä numeerisia algoritmeja on tarkemmin kuvattu kappaleessa 4.1.

Tässä yhteydessä on kuitenkin syytä mainita, että Battye ja Sutcliffe tutkivat sekä symmetriset että epäsymmetriset epäsolmu-alkutilat [59]; Hietarinta ja Salo taas tutkivat jopa viittä erilaista alkutilaa - sekä epäsolmuja että yhteen liitettyjä

epäsolmuja [41, 46]. Vaikka samalla varauksella kaikki alkutilat eivät olekaan tuotaneet samaa minimienergiatilaa, voidaan silti uskoa oikean minimienergiatilan löytyneen, koska käytetyt numeeriset algoritmit ovat herkkiä lokaaleille minimeille ja jokainen minimienergiatila on saavutettu, joko eri alkutiloista tai eri algoritmeilla, vähintään kahdella eri tavalla. Kaikki jatkossa mainitut tulokset ovat minimienergiatiloiksi uskottuja tiloja.

### 4.2.1 Visualisoinnista

Ennen tulosten esittämistä on syytä kiinnittää huomiota niiden esitysasun. Tavanomaisen funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  esittäminen on ongelmatonta ja jopa kuvaus  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  voidaan esittää mieltämällä kuvauksen arvo annetussa pisteessä avaruuden  $\mathbb{R}^3$  kolmanneksi koordinaatiksi, jolloin tuloksena on pinta. Kuvausten  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tapauksessa tällainen ratkaisu kuitenkin johtaisi neliulotteiseen kuvaan, joten on käytettävä toisenlaista esitystä. Yleensä tällaiset kuvaukset esitetäänkin vektoreina siten, että maali- ja lähtöavaruudet mielletään samaksi koordinaatistoksi ja piirretään sopiviin pisteisiin kuvauksen määräämä vektori. Sopivat pisteet määräytyvät siitä, milloin kuva sisältää tarpeeksi tietoa kuvauksesta menettämättä selkeyttään - yleensä tämä tarkoittaa tilannetta, jossa vektorit eivät ole päällekkäin. Tämäkään tapa ei kuitenkaan enää ole havainnollinen kuvausten  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , missä  $n + m > 4$ , kohdalla.

Kuvauksia  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  kuvataan usein myös virtausviivojen avulla. Tällöin vektorien sijaan piirretään viivoja, joita alkujaan paikallaan olevat hiukkaset seuraisivat. Samaa menetelmää voidaan käyttää myös kuvausten  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  kohdalla, mutta Faddeevin-Skyrmen kentän tapauksessa tämä ei ole järkevää, kahdestakin syystä. Ensinnäkin kyseessä ei ole mikään virtaus, mutta vielä merkittävämpi syy on kentän globaali  $SO(3)$ -symmetria. Mikäli kenttään tehdään globaali kierto, kierretyllä kentällä on edelleen samat symmetriat kuin alkuperäiselläkin, mutta virtausviivoilla ei! Ne sisältävät siis tietoa, jota kenttä todellisuudessa ei sisällä. On siis käytettävä jotakin muuta tapaa. Hietarinta ja Salo esittivät [46] seuraavan tavan kuvata tällaista kenttää.

Valitaan jokin maaliavaruuden vektorin komponentti sekä sille jokin arvo ja etsitään ne lähtöavaruuden pisteet, joissa valittu komponentti saa valitun arvon ja piirretään saatujen pisteiden kautta kulkeva pinta. Tällaista pintaa, jolla jokin suure saa vakioarvon, kutsutaan *tasa-arvopinnaksi*. Faddeevin-Skyrmen mallin kenttä on yksikkövektorikenttä, joten sillä on vain kaksi riippumatonta komponenttia. Tasa-arvopinnan pisteissä näistä toinen on jo määrätty, joten jäljelle jää vain yksi vapausaste. Annetaan tämän riippumattoman komponentin nyt määrätä pinnan

väri jollakin yksikäsitteisellä tavalla. Näin saadaan kaikki oleellinen tieto kentästä yhdellä tasa-arvopinnalla esitettyä yhtä aikaa. Hietarinta ja Salo [46] valitsivat komponentin  $n_3$ :n tasa-arvopinnan määrääväksi suureeksi ja toiseksi riippumattomaksi komponentiksi vektorien  $(1, 0, 0)$  ja  $(n_1, n_2, 0)$  välisen kulman. Kuvassa 4.1(a) on esitetty tällä menetelmällä saatu yksinkertaisimman torusmaisen alkutilan, jolle  $Q=1$ , kuva. Jatkossa voidaan käyttää käsitettä tilan muoto, kun tarkoitetaan tilan  $n_3$ -komponentin määräämän tasa-arvopinnan muotoa.

Myöhemmin käytetään myös toisenlaista esitystä Faddeevin-Skyrmen kentälle. Edelleenkin valitaan jokin vektorin komponentti ja sille arvo, mutta tasa-arvopinnan piirtämisen sijaan kiinnitetään myös toisen vapaan komponentin arvo, jolloin koko vektori on kiinnitetty. Tämän jälkeen etsitään kyseisen vektorin alkukuva. Kuten kappaleessa 2.2.4 todettiin, saatu alkukuva on suljettu polku lähtöavaruudessa. Tällaisen polun löytäminen diskreetistä hilasta on kuitenkin merkittävästi hankalampaa kuin tasa-arvopinnan etsiminen ja värittäminen. Tämä on suoraa seurausta alkukuvan tasa-arvopintaa pienemmästä dimensiosta. Energian minimoinnissa käytetystä laskentahilasta on säästetty tyypillisesti  $60^3$  pistettä, mistä tasa-arvopinnalle osuu tyypillisesti tuhansia pisteitä, mutta alkukuvaan vain satoja eikä niistä enää saa aina kunnollista kuvaa. Myöhemmissä minimointilaskuissa onkin tämän takia säästetty suurempi määrä hilapisteitä ja tarvittaessa vielä käytetty lineaarista interpolaatiota pisteiden määrän lisäämiseksi. Tästä esityksestä on helppo laskea tilan varaus luvun 2.2.4 esittämällä tavalla.

Joissakin tapauksissa vektorin  $(0, 0, -1)$  alkukuva voi olla degeneroitunut moninkertaiseksi, jolloin tämä täytyy ottaa huomioon kiinnityslukua laskettaessa:  $n$ -kertaisen ja  $m$ -kertaisen alkukuvan kiinnitysluku on  $nm\epsilon$ ,  $\epsilon = \pm 1$ . Näitä käsitellään myöhemmin tarkemmin, mutta on syytä huomata jo nyt, että mikäli käytetään tässä kuvattua tapaa kiinnitysluvun laskemiseksi, täytyy toiseksi vektoriksi valita jokin muu vektori kuin  $(0, 0, -1)$ .

### 4.2.2 Varaukset $Q = 1$ ja $2$

Varauksen  $Q = 1$  minimienergiatilan uskotaan olevan tila, jonka  $n_3$ -komponentin määräämät tasa-arvopinnat ovat torussymmetrisiä ja jonka energiatiheys on keskitynyt ellipsoidiksi origon ympärille [41, 46, 59, 63, 64]. Kuvassa 4.1 on esitetty eräs viitteessä [41] käytetty alkutila ja siitä seurannut minimienergian tila.

Se, että neljällä erilaisella alkutilalla ja kolmella erilaisella minimointialgoritmilta on saatu sama tulos, antaa syytä uskoa, että kyseessä todella on minimienergiatila, vaikka viitteissä [61] ja [62] energiatiheydeksi saatiinkin toruksen muotoinen

keskittymä. Tämän eron arvellaan seuranneen stereograafisten koordinaattien tuotamista hankaluuksista [46, 59].

Varauksen  $Q = 2$  kohdalla kaikkien edellä mainittujen ryhmien tulokset yhtyvät, joten voimme olla lähes varmoja, että kyseessä on todellinen minimienergiatila. Kuvassa 4.2(a) on esitetty eräs viitteessä [41] saavutettu minimienergian tila.

### 4.2.3 Varaus $Q = 3$

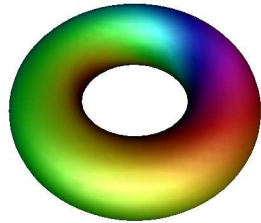
Viitteessä [61] on tutkittu myös varauksen  $Q = 3$  mahdollista kolmisolmuratkaisua. Koska se ei enää ole torussymmetrinen, käyttivät Faddeev ja Niemi sen tutkimiseen täyttää kolmiulotteista mallia. Pienen laskentakapasiteetin takia he esittivät kuitenkin vain viitteellisiä tuloksia mahdollisesta kolmisolmun muotoisesta ratkaisusta varauksella  $Q = 3$  sekä ehdottivat, että myös monimutkaisemmat torussolmut voisivat esiintyä mallin Eulerin-Lagrangen liikeyhtälöiden ratkaisuuina korkeammilla varauksilla.

Tarkemmat laskut [41, 59, 64] osoittivat kuitenkin myöhemmin, että varauksen  $Q = 3$  minimienergiatila on väännetty torus eikä kolmisolmu. On syytä huomata, että tämä ratkaisu ei enää ole rotaatiosymmetrinen, joten viitteiden [61–63] käyttämä muuttujien separointi rotaatiosymmetrisellä yritteellä ei enää tuottaisi minimienergiatilaa. Kuvassa 4.2(b) on esitetty paras viitteessä [41] saavutettu minimienergiatila.

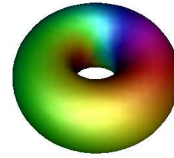
### 4.2.4 Varaukset $Q \in \{4, 5, 6, 7\}$

Korkeampia varauksia on tutkittu alempia vähemmän, ilmeisesti niiden vaatiman suuremman laskentakapasiteetin takia. Joitakin tuloksia on kuitenkin saatu [41, 46, 59, 64].

Varauksen  $Q = 3$  perusteella voisi odottaa varauksen  $Q = 4$  tuottavan myös väännetyin toruksen, ja ensimmäiset tulokset [59, 64] viittasivatkin tähän suuntaan. Tätä tulosta ei kuitenkaan saatu toistettua erilaisella alkutilalla [46], joka tuotti kaksi linkitettyä ja väännettyä, varauksen  $Q = 1$  lenkkiä. Aivan uudenlainen alkutila [41], kuitenkin toi asiaan selvyyden: kumpikaan aiemmista tuloksista ei ollut oikea minimienergiatila, vaan minimi on symmetrinen torus, jolla on kaksi ydintä. Tämä vastaa tilannetta, jossa kaavassa (2.42) asetetaan  $m = 2$ , kun tähän asti koko ajan on ollut  $m = 1$ . Tämä lopputila saatiin viimein [41] myös viitteen [46] lopputilasta, kun minimointia jatkettiin huolimatta siitä, että energia ei enää juurikaan laskenut. Kyseessä oli kuitenkin vain suvantovaihe ja myöhemmin energia alkoi las-

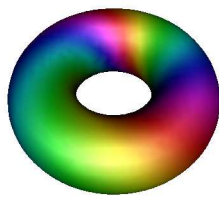


(a) Alkutila

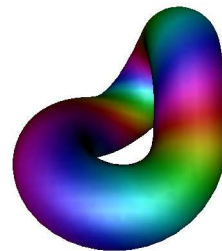


(b) Lopputila

Kuva 4.1: Varauksen  $Q = 1$  alku- ja minimienergiatilat



(a)  $Q = 2$



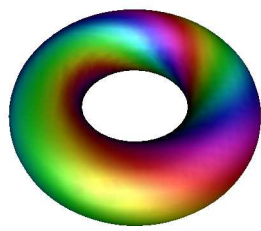
(b)  $Q = 3$

Kuva 4.2: Varausten  $Q = 2$  ja  $Q = 3$  minimienergiatilat

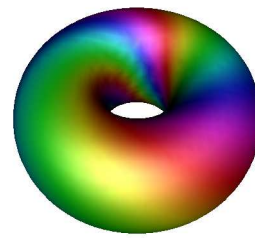
kea taas nopeasti. Tämä on alin varaus, missä alkutila ja minimienergiatila ovat rakenteeltaan erilaisia: kahdesta linkitetystä toruksesta saadaan yksi kaksiytiminen torus. Varauksen  $Q = 4$  paras saavutettu minimienergiatila on esitetty kuvassa 4.3.

Varauksen  $Q = 5$  kohdalla oikean minimienergiatilan löytäminen oli myös hankalaa: viitteissä [59, 64] saatu tulos on vain lokaali minimi. Tämä olisi ilmeisesti kuitenkin johtanut globaaliin minimiin, mikäli laskua olisi jatkettu kyllin pitkään, sillä lähes sama alkutila johtaa eri lopputulokseen [41], joka kuitenkin laskun aikana muistuttaa viitteiden [59, 64] lopputulosta. Tämä minimienergiatila on kaksi linkitettyä lenkkiä, joiden varaukset ovat  $Q = 1$  ja  $Q = 2$ . Varauksen  $Q = 6$  minimienergiatila on hyvin samankaltainen, lenkkien varaukset vain ovat molemmat  $Q = 2$ . Molemmista varauksista on parhaat saavutetut minimienergiatilat esitetty kuvassa 4.4.

Kaikkein mielenkiintoisin tapaus on kuitenkin varauksen  $Q = 7$  minimienergiatila. Kuten Faddeev ja Niemi ehdottivat [61], epäsolmua monimutkaisempia torusolmuja todellakin esiintyy Faddeevin-Skyrmen mallin minimienergiatiloina, tosin vasta korkeammilla varauksilla kuin heidän ehdottamansa  $Q = 3$ , sillä varauksen  $Q = 7$  minimienergiatila on kolmisolmu. Samaan tulokseen päätyivät sekä [59, 64] että [41, 46], joista viimeisimmässä jopa kolmella eri alkutilalla. Yhden näistä alkutiloista kehittyminen kolmisolmuksi on esitetty kuvassa 4.5.

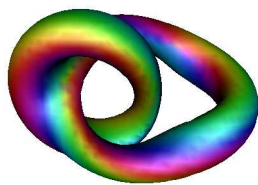


(a) Alkutila

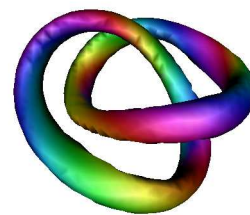


(b) Lopputila

Kuva 4.3: Varauksen  $Q = 4$  alku- ja minimienergiatilat

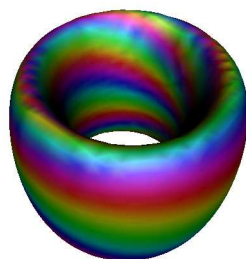


(a)  $Q = 5$

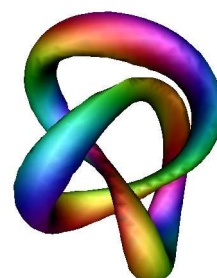


(b)  $Q = 6$

Kuva 4.4: Varausten  $Q = 5$  ja  $Q = 6$  minimienergiatilat



(a) Alkutila



(b) Lopputila

Kuva 4.5: Varauksen  $Q = 7$  eräs alkutila ja minimienergiatila

# Luku 5

## Solmuvorteksit

Tässä työssä on tutkittu pääasiassa Faddeevin-Skyrmen mallin erilaisista pyörremäisistä alkutiloista energian relaksaatiolla saatavia minimienergiatiloja. Tavallisesti tällaisia tiloja kutsutaan *vortekseiksi*. Energian relaksaatioprosessia tutkimalla nähdään myös, millaisia jatkuvia muutoksia Faddeevin-Skyrmen kenttä voi kokea sekä miten hyvin Vakulenkon-Kapitanskiin raja (lause 3.8) saturoituu eri varauksilla. Ensin käydään läpi energian relaksaation vaikutus äärelliseen otokseen alkutiloja ja tämän jälkeen tutkitaan millaiset vektorikentän muutokset ovat ylipäättään mahdollisia. Koska vektorikentän mahdollisten muutosten joukko on varauksesta riippumaton, niitä tutkitaan yleisesti eikä varauskohtaisesti. Energian relaksaatiolaskut on laskettu CSC - Tieteellinen Laskenta Oy:n rinnakkaisilla supertietokoneilla käyttäen samaa ohjelmaa kuin viitteissä [41, 46]. Relaksaation alkutila on saatu luvun 2.2 tuloksia, erityisesti lausetta 2.27, käyttäen.

Alkutilojen varaukset on valittu aiempia julkaistuja tuloksia [41, 46, 59, 61–64] silmällä pitäen, vaikka ne eivät olekaan täysin vertailukelpoisia, kuten myöhemmin käy ilmi. Kenttiä, joiden varaus  $Q > 9$  ei tässä käsitellä, koska niiden aiheuttamat numeeriset ongelmat vaativat vielä enemmän laskentakapasiteettia. Tämä on valitettavaa, sillä on perusteltua odottaa niiltä kentiltä lisää (torus)solmuratkaisuja, mahdollisesti jopa muita kuin kolmisolmuratkaisuja. Käydään ennen relaksaatiotulosten tarkastelua vielä lyhyesti läpi käytetyt numeeriset menetelmät sekä kohdatut numeerisia ongelmia.

### 5.1 Alkutiloista

Energian minimoinnin alkutiloiksi valittiin kahdenlaisia alkutiloja. Suoria *vortekseja* joihin on tehty epäsymmetrinen häiriö sekä suoria vortekseja, joiden ympärille on

asetettu *rengas*. Selvitetään seuraavaksi miten nämä tilat on rakennettu sekä miten niiden varaus on helpointa laskea.

### 5.1.1 Renkaan ja vorteksin rakentaminen

Rengasmaisiin alkutiloihin on tutustuttu jo kappaleessa 4.2. Nimitys viittaa tilojen  $n_3$ -komponentin määräämän tasa-arvopinnan muotoon, joka on torus. Käytetään kuitenkin nimitystä *rengas*, jota voidaan harhaanjohtamatta käyttää silloinkin kun siihen on muodostunut epäsymmetrisyyksiä. Rengastilan luomiseen on käytetty kaavaa (2.43), mistä on  $x^2$ - ja  $x^3$ -akselit käännetty, jolloin saadaan sama kaava kuin viitteen [41] kaavassa (1). Edelleen tällaisen tilan varaus on helppo laskea kappaleen 2.2.4 avulla. Kaavan (2.43) merkinnöin varaukseksi tulee

$$Q = nm. \quad (5.1)$$

Merkitään tästä lähin  $n_r$  ja  $m_r$ , missä alaindeksi ilmaisee niiden liittyvän renkaaseen.

Tutustutaan nyt uuteen tilaan, jota kutsutaan *vorteksiksi*. Tämän  $n_3$ -komponentin tasa-arvopinnat ovat  $x_3$ -akselin suuntaisia sylintereitä, siten, että sylinterin symmetria-akseli yhtyy  $x_3$ -akseliin. Olkoon se lisäksi jaksollinen:  $\exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{Z}, \mathbf{n}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{n}(x_1, x_2, x_3 + nc)$ . Kutsutaan tätä tilaa vorteksiksi. Vorteksin luonnissa on käytetty seuraavaa kaavaa

$$r_0 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (5.2)$$

$$n_3 = 1 - \frac{2a}{a - 1 + e^{br_0^2}} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{n}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-n_3^2}}{r_0} (x_1 \sin(2\pi n_t x_3) - x_2 \cos(2\pi n_t x_3)) \\ \frac{\sqrt{1-n_3^2}}{r_0} (x_1 \cos(2\pi n_t x_3) + x_2 \sin(2\pi n_t x_3)) \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

missä vakiot  $a$  ja  $b$  on valittu (kokeilemalla) siten, että alkutilan energia on mahdollisimman alhainen. Heti nähdään myös, että tämän tilan jakson pituus  $c = 1/n_t$ .

Vorteksin varaus on helpointa laskea kahden eri vektorin alkukuvien kiinnitysluvun avulla kappaleen 2.2.4 kuvaamalla tavalla, jolloin varaukseksi tiettyä pituutta kohden saadaan

$$Q = n_t. \quad (5.5)$$

Kaavaa (5.4) olisi mahdollista muuttaa samanlaiseksi kuin kaava (2.43). Tällöin vorteksin kaava näyttäisi suoristetulta renkaan kaavalta ja tulisi mukaan myös kokonaisluku  $m_t$ . Käytettävissä olevan prosessoriajan äärellisyyden takia tässä on tutkittu vain tiloja, joilla  $|m_t| = 1$ , joten jätetään se jatkossa kokonaan pois. Tämän

lisäksi tulee huomata, että minimisaatiolaskuissa on tutkittu vortekseja vain osalta niiden (ääretöntä) pituutta, mutta havainnollisuuden takia välillä esitetään pidempi pätkä. Tällöin pitää huomata, että varaus tulee laskea vain alkuperäisen osan matkalta, vaikka kuvassa esitettäisiinkin suurempi osa vorteksia.

### 5.1.2 Rengasvorteksin rakentaminen

Jo varhaisessa vaiheessa kävi ilmi, että jotkin vorteksitilat muuttuvat energian minimoinnissa tiloiksi, jotka muodostuvat hieman deformatuneista vortekseista ja renkaista sen ympärillä. Tämän takia on tutkittu myös sellaisia tiloja, jotka on muodostettu lisäämällä renkaan symmetria-akselille vorteksi siten, että renkaan symmetria-akseli yhtyy vorteksin symmetria-akseliin ja niiden väliin jää pieni pätkä tyhjiötä ( $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ ). Teknisesti tämä tarkoittaa, että renkaan kaavaan on tehty sijoitus  $r \rightarrow r' = r - 1$  ja käytetty vain alue  $r' \geq 0$ . Keskelle jääneen tyhjän alueen vektoreille taas on annettu arvot vorteksin kaavan mukaan siten, että vorteksin ja renkaan välissä kenttä varmasti saa vakuumiarvonsa. Kutsutaan tällaista tilaa jatkossa *rengasvorteksiksi*.

Edellä kuvatun kaltaisen yhdistetyn systeemin varaus lasketaan alkukuvien linkitysluvusta samalla tavalla kuin pelkän vorteksin tai renkaankin, mutta nyt on syytä huomata, että kunkin vektorin  $\mathbf{n}$  alkukuva on tyypillisesti epäyhtenäinen eikä sen linkitystä itsensä kanssa pidä ottaa huomioon. Kuvassa 5.1 on esitetty erään rengasvorteksin etelänavan ( $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ ) ja kahden päiväntasaajan pisteen ( $\mathbf{n} = (x_1, x_2, 0)$ ,  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ) alkukuvat. Lisäksi kuvaan on merkitty rengasosasta ja vorteksiosasta saatavien alkukuvien risteykset ja niitä vastaavat varaukset. Kuten nähdään, voidaan tällaisen tilan varaus jakaa kolmeen osaan: renkaan varaus (5.1), vorteksin varaus (5.5) ja niiden yhdistämisestä (*liitoksesta*) muodostuva varaus. Kuten tähänkin mennessä, voidaan toruksen varaus kuvata kahden kokonaisluvun tulolla kuten myös renkaan varaus. Olkoot nämä nyt renkaalle  $n_r$  ja  $m_r$  sekä renkaalle  $n_t$  ja  $m_t$ . Renkaan ja vorteksin omien varausten lisäksi nähdään, että liitoksesta aiheutuu  $|4m_r m_t|$  samanmerkkistä alkukuvien risteystä, joten tästä aiheutuva kokonaisvaraus on  $|2m_r m_t|$ . Etumerkki määräytyy nyt siitä, miten tilan osien alkukuvien kulkusuunnat on valittu. Kappaleen 2.2.4 mukaisella valinnalla saadaan negatiivinen etumerkki, jolloin

$$Q = n_r m_r + n_t m_t - 2m_r m_t, \quad (5.6)$$

missä nyt siis koko ajan  $|m_t| = 1$ . Kaava 5.6 pitää luonnollisesti paikkansa myös ilman tätä ehtoa.

Kaavasta (2.46) nähdään, että vaihtamalla renkaassa  $m_r \rightarrow -m_r$  tai  $n_r \rightarrow -n_r$ , sen varauksen merkki vaihtuu. Kuvassa 5.2 on esitetty ne neljä varauksen  $|Q| = 1$  rengasta, jotka saadaan toisistaan  $n_r$ :n ja  $m_r$ :n etumerkkejä vaihtelemalla. Nähdään, että jokaista yhtä etumerkin vaihtoa vastaa alkukuvan kulkusuunnan muutos, joten kulkusuunta määrää yksikäsitteisesti varauksen etumerkin, kuten kappaleessa 2.2.4 todettiin. Samoin käy myös vorteksin tapauksessa, mutta ei liitoksen. Liitoksen varaus muuttuu vain, kun joko  $m_r$  tai  $m_t$  vaihtaa etumerkkinsä sillä  $n_r$ :n etumerkin vaihto vain siirtää kunkin alkukuvan renkaalla olevan osan renkaan ulkopinnalta sisäpinnalle kun taas toisen  $m$ :n vaihto vaihtaa kulkusuuntaa osoittavan vektorin suunnan, jolloin jokainen risteys toisen alkukuvan osan kanssa vaihtaa merkkinsä. Tämä nähdään vertaamalla kuvaa 5.1 kuviin 5.3, jossa on esitetty edellisestä yhden luvun  $n_r, m_r, n_t$  tai  $m_t$  etumerkkiä muuttamalla saatavat tilat.

Käsitellään edelleen vain sellaisia tiloja, joissa  $|m_t| = 1$ . Kaavasta (5.6) nähdään myös, että mikäli  $m_r > 1$ , kasvaa sekä renkaan että liitoksen tuottama varaus. Tätä on kuitenkin mahdoton nähdä vektorin  $(0, 0, -1)$  alkukuvasta, sillä se on  $m_r$ -kertaisesti degeneroitunut ympyrä. Tämä nähdään kaavasta (2.43) seuraavasti. Olkoon yksinkertaisuuden vuoksi  $n_r = 1$  ja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sellainen funktio, että  $f \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0$  eikä milloinkaan muulloin ja  $f > 0$  muutoin; lasku on oleellisesti sama, vaikka  $|n_r| > 1$ . Tutkitaan, mikä on vektorin  $(0, 0, -1)$  alkukuva  $\mathbf{n}^{-1}\{(0, 0, -1)\}$ . Kaavasta (2.43) saadaan

$$\mathbf{n}(\eta, \xi, \phi) = \left( \frac{2f}{f^2 + 1} \cos(m_r \xi + \phi), \frac{2f}{f^2 + 1} \sin(m_r \xi + \phi), \frac{f^2 - 1}{f^2 + 1} \right) \quad (5.7)$$

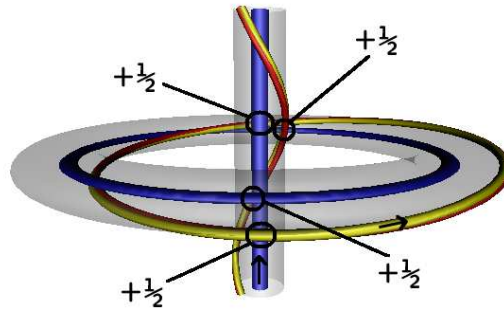
$$= (0, 0, -1) \Leftrightarrow f = 0 \Leftrightarrow \eta = \infty. \quad (5.8)$$

Olkoon  $0 < \epsilon < 1$  ja  $n \in \mathbb{Z}$ . Tutkimalla vastaavasti vektorin  $(\sqrt{2\epsilon - \epsilon^2}, 0, -1 + \epsilon)$  alkukuvaa toruskoordinaatein, huomataan, että

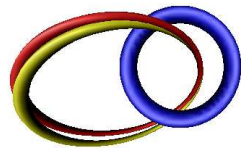
$$\mathbf{n}^{-1}\{(\sqrt{2\epsilon - \epsilon^2}, 0, -1 + \epsilon)\} = \left\{ \left( f^{-1} \left( \sqrt{\frac{\epsilon}{2 - \epsilon}} \right), \xi, \phi \right) \mid m_r \xi + \phi = n\pi \right\} \quad (5.9)$$

Valitaan siis helpoin tapaus, eli  $n = 0$ , jolloin saadaan yhtälö  $\phi = -m_r \xi$ . Sijoitetaan tämä kaavoihin (2.41), saadaan

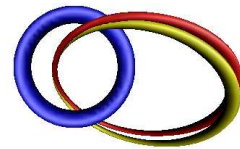
$$\begin{cases} x^1 &= \frac{\sinh \eta \cos(-m_r \xi)}{\cosh \eta - \cos \xi} \\ x^2 &= \frac{\sinh \eta \sin(-m_r \xi)}{\cosh \eta - \cos \xi}, \end{cases} \quad (5.10)$$



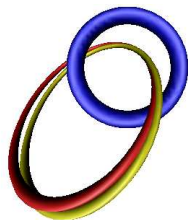
Kuva 5.1: Yksinkertaisen rengasvorteksin liitoksesta aiheutuvan varauksen laskeminen



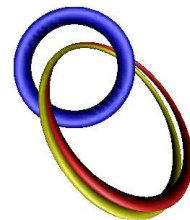
(a)  $1r1+1, Q = 1$



(b)  $1r-1+1, Q = -1$

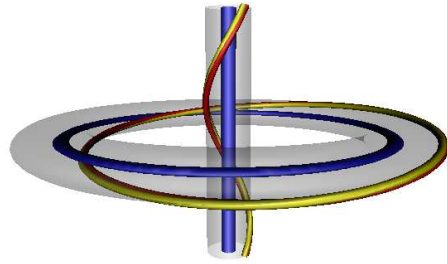


(c)  $1r1-1, Q = -1$

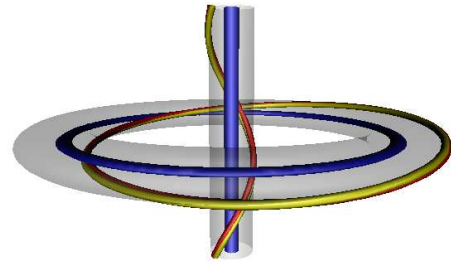


(d)  $1r-1-1, Q = 1$

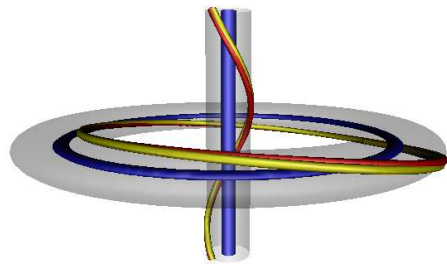
Kuva 5.2: Kaikki varauksen  $|Q| = 1$  renkaat



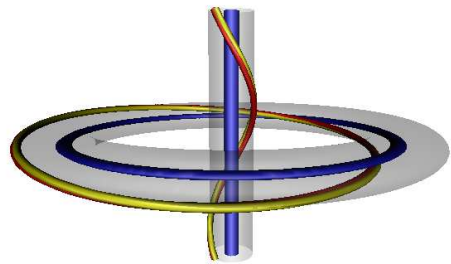
(a)  $1r_{1-1}1_{t1+1}, Q = 2$



(b)  $1r_{1-1}1_{t-1-1}, Q = -2$

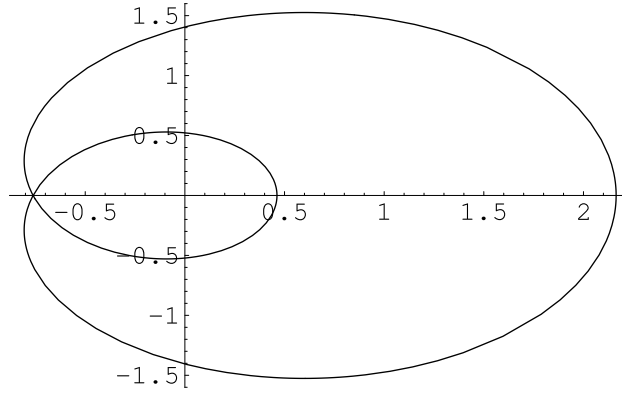


(c)  $1r_{1+1}1_{t1-1}, Q = 2$



(d)  $1r_{-1-1}1_{t1-1}, Q = -2$

Kuva 5.3: Erilaisia  $|Q| = 1$  osista saatavia rengasvortekseja



Kuva 5.4: Etelänavan alkukuva  $xy$ -tasossa

jotka ovat kuvan 5.4 kaltaisia käyriä, joissa lenkkien väliin jäävä ala pienenee  $\eta$ :n kasvaessa. Ilmeisesti siis lenkit yhtyvät, kun  $\eta \rightarrow \infty$ . Tämä nähdään myös analyytisesti, sillä

$$\begin{cases} \lim_{\eta \rightarrow \infty} x^1 &= \cos(-m_r \xi) \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} x^2 &= \sin(-m_r \xi), \end{cases} \quad (5.11)$$

mikä välittömästi tunnistetaan ympyrän yhtälöksi, missä ympyrä piirtyy  $m_r$  kertaa sillä aikaa kun  $\xi$  kiertää ympyrän kerran. Tämä ominaisuus täytyy siis ottaa huomioon sellaisten tilojen varausta laskettaessa, joilla  $|m_r| > 1$ . Ongelma voidaan välttää myös valitsemalla toiseksi tutkittavaksi alkukuvaksi jokin muu kuin vektorin  $(0, 0, -1)$  alkukuva.

Sovitaan vielä yksi merkintä. Kunkin homotopialuokan energialla on alaraja, joka on muotoa  $cQ^{3/4}$ , missä  $c$  on jokin tuntematon vakio. Jaetaan tämän tapaisesti kentän energia kahteen osaan seuraavasti

$$E(\mathbf{n}) = E_0(\mathbf{n})Q(\mathbf{n})^{3/4} \quad E_0(\mathbf{n}) := c(\mathbf{n})\sqrt{g} \quad (5.12)$$

ja kutsutaan lukua  $E_0$  kentän  $\mathbf{n}$  energian varauksesta riippumattomaksi osaksi. Tässä tutkimuksessa on kaikkialla käytetty arvoa  $g = 0.2$ .

## 5.2 Rengasvorteksit

Ensimmäiset tutkimukset tehtiin vortekseilla, joihin oli lisätty pieni epäsymmetria. Nämä osoittautuivat kuitenkin hyvin hankaliksi ja hitaiksi numeerisesti: alkutilan energia on hyvin korkea ja alussa se laskee hyvin jyrkästi. Tämä tuo mukanaan ensimmäisen tyypillisen numeerisen hankaluuden: vierekkäisten vektorien välinen

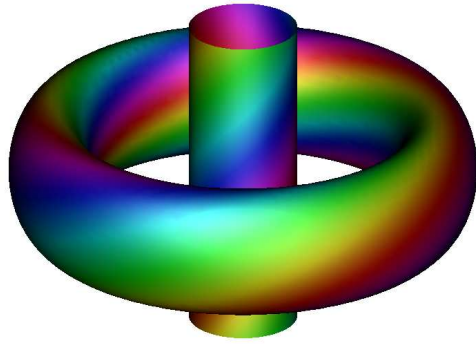
Nimi	$ Q(\mathbf{n}) $	$E_{min}$	Kuvaus
1r1-1_1t2-1	5	506.45	(1, -1)-rengas ja (2, -1)-vorteksi
2r1-1_1t-1-1	5	515.58	kaksi (1, -1)-rengasta ja (-1, -1)-vorteksi
1r2-1_1t2-1	6	588.71	(2, -1)-rengas ja (2, -1)-vorteksi
2r1-1_1t0-1	6	597.61	kaksi (1, -1)-rengasta ja (0, -1)-vorteksi
1r2-2_1t-1-1	7	657.22	(2, -2)-rengas ja (-1, -1)-vorteksi
2r1-1_1t1-1	7	671.77	kaksi (1, -1)-rengasta ja (1, -1)-vorteksi
1r2-2_1t0-1	8	735.14	(2, -2)-rengas ja (0, -1)-vorteksi
2r1-1_1t2-1	8	755.75	kaksi (1, -1)-rengasta ja (2, -1)-vorteksi
1r2-2_1t1-1	9	784.77	(2, -2)-rengas ja (1, -1)-vorteksi
3r1-1_1t0-1	9	836.74	kolme (1, -1)-rengasta ja (0, -1)-vorteksi

Taulukko 5.1: Tutkitut renkaista ja vorteksista kootut alkutilat

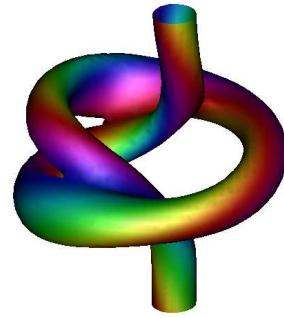
kulma kasvaa liikaa. Myöhemmin, energian jo hieman laskettua, vektorin  $(0, 0, -1)$  alkukuva levenee  $x_1x_2$ -suunnassa nopeasti, mikä tuo lisää numeerisia hankaluuksia, koska sen ja vakuumivektorin alkukuvien välinen tila pienenee. Tämä on suoraa seurausta äärettömän avaruuden asettamisesta äärelliseen hilaan; hilan reuna on äärellisellä etäisyydellä, kun taas avaruus on ääretön. Kun numeeriset hankaluudet oli voitettu ja minimisaatio saatu ajettua tarpeeksi pitkälle, huomattiin, että vorteksista irtoaa rengas tai renkaita - varauksen mukaan - ja nämä jäävät sen ympärille linkitetyksi tilaksi. Tämä havainto motivoi etsimään analyttisen tavan rakentaa tällainen linkitetty tila ja katsoa, miten se käyttäytyy - pitäisihän sillä olla heti aluksi paljon pienempi energia kuin vorteksilla. Osoittautuu, että näin on ja samalla numeeriset ongelmatkin katosivat - ilmeisesti pienempienergisisissä tiloissa ei tapahdu niin nopeita muutoksia. Numeriikan hitauteen saatiin kuitenkin vain pientä helpotusta: jotkin alkutilat suppenivat hyvin nopeasti, toisilla kesti jopa kauemmin kuin alkuperäisillä vorteksiratkaisuilla. Tällä tavalla saatiin kuitenkin tutkittua suurempi kirjo mahdollisia alkutiloja ja varauksia kuin vortekseilla.

Kuvissa 5.5(a) ja 5.5(c) on esitetty kaksi erilaista alkutilaa. Muut alkutilat ovat samankaltaisia, parit  $(n_r, m_r)$  ja  $(n_t, m_t)$  vain vaihtelevat; tutkitut alkutilat on esitetty taulukossa 5.1.

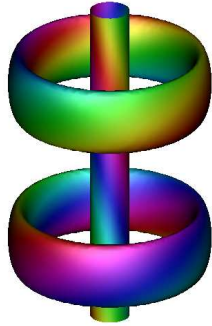
Aivan ongelmitta näidenkään alkutilojen energian minimointi ei sujunut. Suurimmat hankaluudet liittyivät tiloihin, joissa on monta rengasta. Oli tiedossa, että ne tarvitsevat paljon tilaa  $x_1x_2$ -suunnassa, mutta alkutilan rakentaminen puolestaan vaatii paljon tilaa  $x_3$ -suunnassa ja käytettävissä ollut muistikapasiteetti ei riittänyt molempien tarpeiden tyydyttämiseen. Tämän takia niiden kanssa jouduttiin



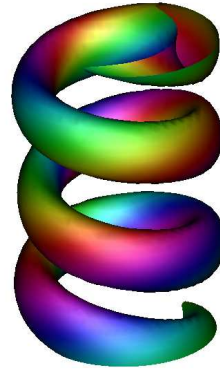
(a) Alkutila 1r2-2\_1t-1-1



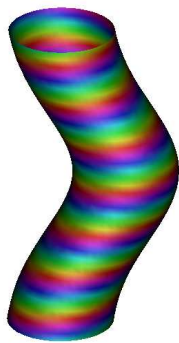
(b) Lopputila 1r2-2\_1t-1-1



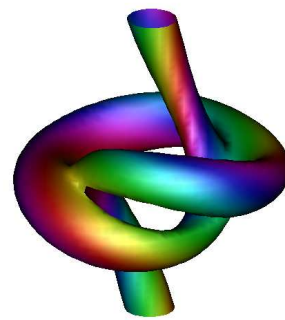
(c) Alkutila 2r1-1\_1t1-1



(d) Lopputila 2r1-1\_1t1-1



(e) Alkutila 1t7-1



(f) Lopputila 1t7-1

Kuva 5.5: Varauksen  $Q = 7$  alku- ja lopputilat

tekemään pieni kompromissi. Niiden annettiin aluksi olla  $x_1x_2$ -suunnassa liian pienessä hilassa, mutta ennen kuin se ehti muodostua ongelmaksi energian minimin löytämisessä, hila harvennettiin kahdeksasosaan alkuperäisestä ja upotettiin  $x_1x_2$ -suunnassa nelinkertaiseen - riittävän suureen - hilaan. Tätä harvennusta ei voi tehdä heti, koska silloin törmätään taas vierekkäisten vektorien välisen kulman ongelmaan.

Minimoinnit tehtiin liittogradienttimenetelmällä, lukuunottamatta ensimmäisiä 100:aa-1000:tta iteraatiota, jotka tehtiin gradienttimenetelmällä. Poikkeuksen muodostivat tilanteet, joissa kenttä upotettiin suurempaan hilaan. Tällöin käytettiin taas gradienttimenetelmää seuraavat 100-1000 iteraatiota.

Kuvassa 5.6 on esitetty kunkin alkutilan energian varauksesta riippumattoman osan,  $E_0(\mathbf{n})$ , kehitys iteraatioiden lukumäärän funktiona. Huomataan, että monissa tapauksissa kesken minimoinnin energia pysyy hyvin pitkään lähes samana. Syy tähän selviää vasta, kun käy läpi minimointiprosessista tehdyn animaatioelokuvan. Minimoinnin aikana säästettiin kentän tila sadan iteraation välein ja näistä tehtiin tarpeen mukaan animaatioita. Niistä nähdään, että pitkän tasaisen “terassin” aikana tapahtuu vain yhdenlaista muutosta: vektorit kiertyvät  $x_3$ -komponenttinsa ympäri. Animaatiossa tämä ilmenee värin kiertymisellä muuten muuttumatonta tasa-arvopintaa pitkin. Ilmeisesti tämä ei vaikuta merkittävästi energiaan, mutta myöhemmin nähdään, että se on välttämätöntä, jotta isopinna kaksiosaa voivat koskettaa ja lävistää toisensa. Tehdyt animaatiot löytyvät viitteestä [65].

Saavutetut minimienergiat muodostivat pienen yllätyksen. Kaikki saavutetut minimienergioiden varauksesta riippumattomat osat ovat alle 6%:n päässä keskiarvosta 155.81, mutta kunkin varauksen tilat ovat aivan erilaiset. Kuvapareihin 5.5(a), 5.5(b) ja 5.5(c), 5.5(d) on valittu näistä suurimman määrän iteraatioita vaatinut pari, jotta väliaikaisen tasaisen “terassin” mahdollisuus olisi mahdollisimman pieni. Nähdään, etteivät saavutetut lopputilat muistuta lainkaan toisiaan, vaikka energiat ovat lähes samat. Ilmeisestikin kyseessä on, muidenkin varausten kohdalla, joko degeneroitunut globaali minimi tai lokaali minimi, missä energia on hyvin lähellä globaalia minimiä. Tämän tarkemmaksi tutkimiseksi päätettiin tutkia vielä uudestaan vorteksialkutiloja.

### 5.3 Taipuneet vorteksit

Linkitettyjä tiloja tutkittaessa huomattiin, että kaikki saman varauksen alkutilat eivät päädy samaan minimienergiatilaan. Ensimmäinen viite tästä saatiin varauksen  $Q=7$  alkutilojen kohdalla (kuvat 5.5(a) ja 5.5(b)). Niinpä päätettiin tutkia uudel-

Nimi	$ Q(\mathbf{n}) $	$E_{min}$	Kuvaus
1t5-1	5	506.44	Vorteksi, jossa viisi kierrettä
1t6-1	6	584.02	Vorteksi, jossa kuusi kierrettä
1t7-1	7	657.57	Vorteksi, jossa seitsemän kierrettä
1t8-1	8	732.97	Vorteksi, jossa kahdeksan kierrettä

Taulukko 5.2: Tutkitut vorteksialkutilat

leen, miten vorteksit käyttäytyvät. Tällä kertaa numeeriset ongelmat onnistuttiin muutaman yrityksen jälkeen kiertämään kasvattamalla alkutilojen epäsymmetriaa (kuten kuvassa 5.5(e) näkyvä mutka) ja asettamalla ne tarpeeksi suureen hilaan, ettei myöhemmin odotettavissa olevasta nopeasta laajenemisesta  $xy$ -suunnassa tule ongelmia. Tällä välin CSC - Tieteellinen laskenta Oy oli myös hankkinut uuden super-tietokoneen, jonka laskentateho ja muistikapasiteetti olivat entistä suuremmat, joten hilan kasvattaminen oli mahdollista. Ainoastaan varauksen  $Q = 9$  vorteksi osoittautui edelleen liian paljon muistia vaativaksi ja se oli jätettävä myöhempään. Kuvassa 5.5(e) on esitetty eräs käytetty alkutila ja taulukossa 5.2 on esitelty kaikki tutkitut alkutilat.

Kaikille muille varauksille paitsi varaukselle  $Q = 9$  löytyi pienen etsinnän jälkeen alkutila, jolla vierekkäiset vektorit eivät käännä liian kauas toisistaan. Ne, joille kyseinen tila löytyi, saatiinkin sitten ajettua ilman ongelmia loppuun asti. Minimointi suoritettiin edelleen liittogradienttimenetelmällä lukuunottamatta ensimmäisiä 100:aa-1000:tta gradienttimenetelmällä tehtyä iteraatiota. Aiemmasta viisastuneena kaikki tilat asetettiin heti lopullisenkokoiseen hilaan, joten mitään upotusta ja siitä seuraavaa gradienttimenetelmän käyttöä ei tarvittu.

Pelkän vorteksin muodostamien alkutilojen energiat ovat hyvin korkeita, kuten nähdään kuvasta 5.7, jossa on esitetty kunkin vorteksitilan energian varauksesta riippumattoman osan kehitys iteraatioiden lukumäärän funktiona. Tälläkin kerralla nähdään, ettei lopullista energiaa aina saavuteta heti, vaan tapauksessa  $Q = 7$  energia on lähes vakio pitkän aikaa keskellä minimointiprosessia. Tässä vaiheessa tätä osattiin jo odottaa ja jokainen alkutila ajettiin niin pitkälle, että kahden iteraation välinen muutos oli hyvin pieni ja valem minimistä ohi pääseminen olisi vienyt kohtuuttoman kauan rajalliset laskentaresurssit huomioiden. Edelleenkin ei voida olla varmoja, että löydetyt minimi todella ovat globaaleja minimejä, tai edes minimejä - nehan voivat olla vain vielä pidempiä tasaisia pätkiä. Ne ovat kuitenkin kaikki alle 1 %:n päässä keskiarvostaan  $E_0 = 152.67$ . Koska lisäksi joissakin tapauksissa sekä vorteksitilat että rengasvorteksitilat päätyvät lähes samaan energiaan, voidaan

helposti uskoa näiden todella olevan minimejä.

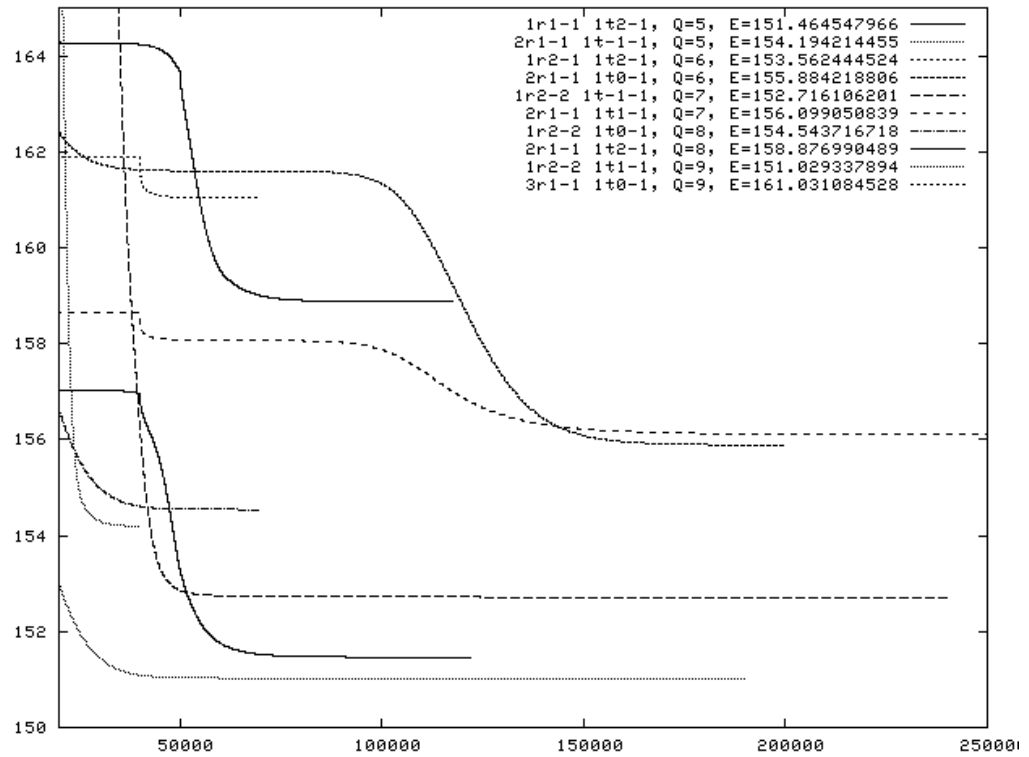
Vorteksialkutiloilla saavutettiin poikkeuksetta vähintään yhtä alhainen energia kuin rengasvortekseilla. Lisäksi yhtä poikkeusta lukuunottamatta saavutettu lopputila on lisäksi lähes saman näköinenkin kuin saman energian rengasvorteksista saatu. Tämä antaa syytä uskoa, että kyseessä minimointia jatkamalla todellakin saavutettaisiin globaali minimi. Kuvassa 5.5(f) on esitetty vorteksin, jolle  $Q = 7$  minimienergiatila sekä kuvissa 5.5(b) ja 5.5(d) varauksen  $Q = 7$  rengasvorteksien lopputilat. Nähdään myös, että kolmesta varauksen  $Q = 7$  alkutilasta kahdessa tuloksena on kolmisolmu kuten kuvassa 4.5. Tämä antaa vielä lisäpontta uskomukselle, että kolmisolmu todellakin on minimienergiatila.

## 5.4 Minimienenergiatilat ja Vakulenkon-Kapitanskiin raja

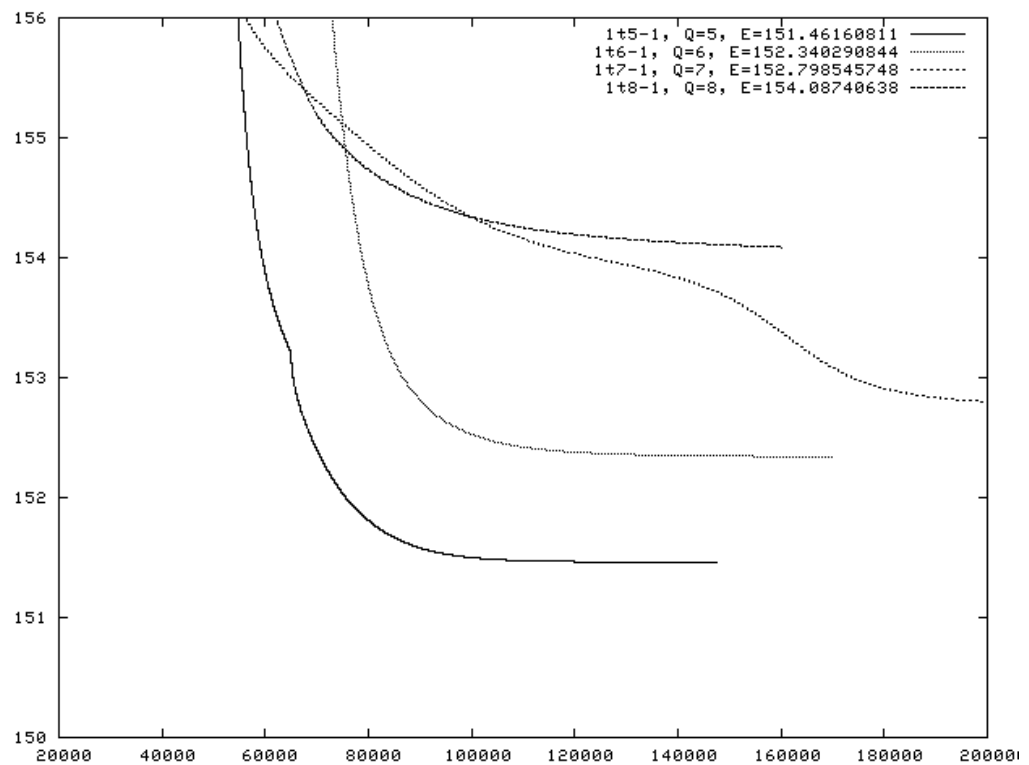
Lauseessa 3.8 johdettiin alaraja Faddeevin-Skyrmen kentän energialle, kun lähtöavaruutena on  $S^3$ . Vorteksin tullessa mukaan, lähtöavaruudeksi tulee  $S^2 \times S^1$ . Tämä voi muuttaa systeemin topologiaa radikaalistikin, mutta koska kuvausten  $f: S^2 \times S^1 \rightarrow S^2$  homotopialuokkien määrittäminen on hyvin hankalaa, on tässä lähdetty oletuksesta, että energiaan se ei vaikuta. Voidaan siis verrata saatuja tuloksia sekä aiemmin saatuihin, todellisiin Faddeevin-Skyrmen mallin tuloksiin että Vakulenkon-Kapitanskiin rajaan sekä sen tarkennettuun arvioon (3.22).

Edellisissä kappaleissa käytettiin lauseen 3.8 vakiona  $E_0$  saatujen  $E_0$ :n arvojen keskiarvoa. Kaikkien tutkittujen tilojen tuottama keskiarvo on  $E_0 = 154.93$ . Käytetään nyt sitä ja tutkitaan, kuinka hyvin saadut lopputilat satureivat tämän rajan. Tämä on esitetty kuvassa 5.8. Nähdään, ettei yksikään lopputila jää yli 4%:n päähän keskiarvosta. Lopputilojen energioita tarkasteltaessa tulee myös ottaa huomioon, että kaikkia systeemejä ei ole iteroitu yhtä pitkälle. Niin pian kun on käynyt ilmeiseksi, että vorteksi- ja rengasvorteksi-alkutilat saavuttavat lähes saman energian ja näyttävät lähes identtisiltä, ei rengasvorteksin iterointia ole enää jatkettu. Tämä selittää rengasvorteksien systemaattisen hieman suuremman energian. Esimerkiksi varauksen  $Q = 8$  tapauksessa rengasvorteksista saatu kolmisolmu on paljon tiukemman näköinen, mutta ilmeisestikin laajenisi iteraatiota jatkettaessa identtiseksi vorteksin saavuttaman tilan kanssa.

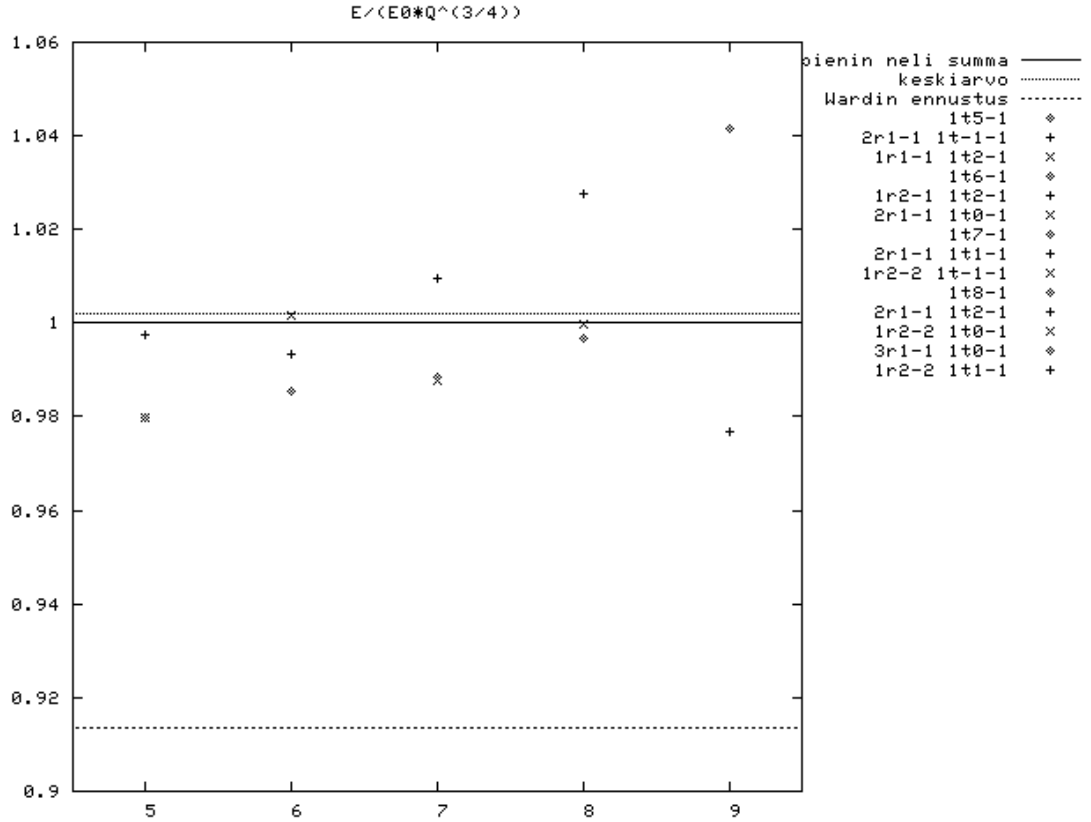
Vakio  $E_0$  voidaan myös etsiä pienimmän neliösumman menetelmää käyttäen, sovittamalla muotoa  $E = E_0 Q^{3/4}$  oleva käyrä saatuihin tuloksiin, saadaan  $E_0 = 154.66$ . Kuvassa 5.8 on verrattu saatujen lopputilojen energiaa näin saatuun ar-



Kuva 5.6: Renkaiden ja vorteksin muodostamien systemien energiakehitykset



Kuva 5.7: Vorteksitilojen energiakehitykset



Kuva 5.8: Lopputilojen energiat verrattuna pienimmällä neliösummalla sovitettuun arvoon, keskiarvoon ja Wardin ennusteeseen

voon. Taas nähdään, että saavutetut energiat vastaavat hyvin sovitettua arvoa, tosin yllättävästi vähän huonommin kuin keskiarvoaan: nyt yksi tapaus on yli 4%:n päässä sovitetusta arvosta.

On mielenkiintoista huomata, että vaikka nämä rajat satureituvatkin kohtuullisen hyvin, ollaan vielä kaukana analyttisestä rajasta. Kaavasta (3.22) saadaan  $E_0 = 75.39$ , kun se kerrotaan käytetyn vakion  $g = 0.2$  neliöjuurella. Tämä on niin kaukana numeeristen ratkaisujen antamasta arvosta, että on mielenkiintoista tutkia, pitääkö luvussa 3.2 mainittu [54]:n ehdotus, jonka mukaan  $E_0 = 32\pi^2 \sqrt{g}$ , paikkansa. Tästä saadaan  $E_0 = 141.24$ , joka on jo hyvin lähellä - eroa on enää alle 10%  $E_0$ :n keskiarvoon ja käyrään sovitettuun  $E_0$ :aan sekä alle 15% jokaiseen laskettuun  $E_0$ :aan! Tämä on esitetty kuvassa 5.8. Voidaan siis uskoa tämän ehdotuksen pitävän paikkansa ja energian todellakin käyttäytyvän tässä muunnetussa mallissa samalla tavalla kuin puhtaassa Faddeevin-Skyrmen mallissakin.

## 5.5 Etelänavan alkukuvan topologiasta

Ensikatsomalta näyttäisi siltä, että monen alkutilan energian minimoinnin aikana sen topologia muuttuu merkittävästi (esimerkiksi 5.5(a) ja 5.5(b)). Kuitenkin minimoinnin aikana pidetään huoli siitä, ettei tapahdu epäjatkuvia muutoksia, koska oikeassa jatkuvassa mallissa niitä ei voi tapahtua. Kappaleessa 2.2 osoitettiin varauksen olevan bijektiivisessä suhteessa kentän homotopiaryhmän alkioihin eikä tehty jatkuva muutos voi muuttaa tätä suhdetta. Ilmeisestikään itse kentän topologia ei siis voi muuttua. Jotakin kuitenkin muuttuu, koska alkutila ei näytä lainkaan lopputilalta.

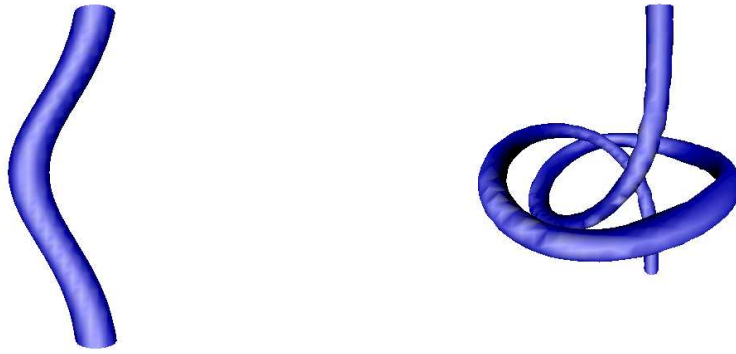
Tutkitaan nyt, mitä tapahtuu mielivaltaisen vektorin alkukuvulle energian minimointiprosessin aikana. Käsitellään tässä tapausta  $Q = 7$  ja vorteksialkutilaa; samat havainnot pätevät myös muihin tapauksiin. Alku- ja lopputilojen etelänavan alkukuvat on esitetty kuvassa 5.9. Molemmissa tapauksissa kyseessä on avaruuteen upotettu, suljettu polku - solmu - ja huomataan, että polun kiinnitysluku itsensä kanssa on muuttunut: sen mielivaltainen tasoprojektio leikkaa itsensä lopputilassa, mutta ei alkutilassa. Ne ovat siis epäekvivalentteja solmuja. Tällaisten solmujen ekvivalenssiutta ja erilaisuutta tutkii solmuteoria, mutta siihen ei tässä sen enempää perehdytä. Tästä herää heti kysymys, miksi ja miten *tämä* kiinnitysluku muuttuu sekä onko sillä mahdollisesti jotakin yhteyttä Hopfin invarianttiin ja sen esittämiseen alkukuvien kiinnityslukuna.

Viimeiseen kysymykseen vastaaminen vaatisi kiinnitysluvun lisäksi toisen käsitteen, kiertymän, määrittelemistä, eikä tässä mennä siihen, vaan todetaan vain, että tällainen yhteys on olemassa. Sen sijaan tutkitaan kiinnitysluvun muuttumista.

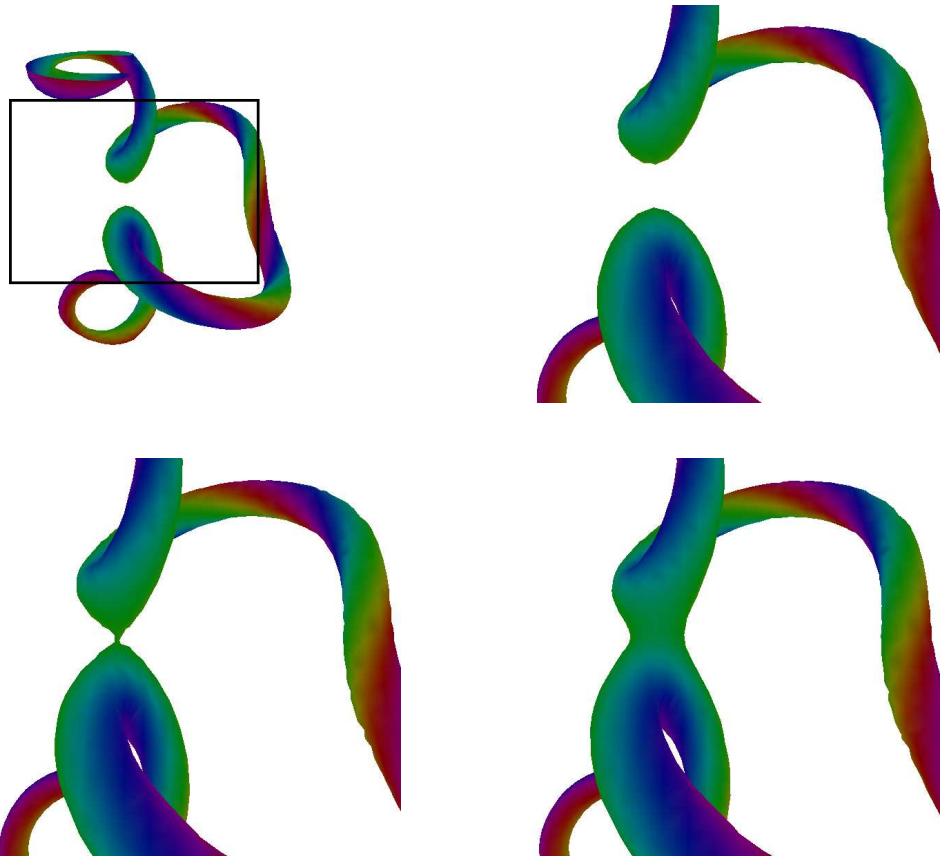
Alkukuvan kiinnitysluku itsensä kanssa muuttuu, kun alkukuvan osat menevät toistensa läpi tai törmäävät toisiinsa ja irtoavat eri tavalla kuin olivat ennen törmäystä. Kuvissa 5.10 on esitetty kuvin, miten tällainen läpimeno ja irtoaminen tapahtuvat. Tutkimalla jonkin tasa-arvopinnan käyttäytymistä tällaisen törmäyksen tapahtuessa, huomataan lisäksi, että törmäyksiä tapahtuu vain tietyissä olosuhteissa. Ajatellaan jokaisen vektorin  $\mathbf{n} = (x_1, \sqrt{1 - x_1^2 - x_3^2}, x_3)$  alkukuvulle määritellyksi suunta oikean käden säännöllä, kuten aiemminkin. Kun lisäksi määritellään jokaiselle alkukuvulle tasa-arvopinnan  $n_3 = 0$  tangentin suuntainen normaali, saadaan yksikäsitteinen vektori, joka osoittaa seuraavan vektorin  $\mathbf{n} = (x_1 + \epsilon, \sqrt{1 - (x_1 + \epsilon)^2 - x_3^2}, x_3)$  alkukuvaa kohti. Kutsutaan tätä vaikka nimellä  $\mathbf{n}_\perp$ . Käy ilmi, että kaksi tällaisen tasa-arvopinnan osaa voi törmätä toisiinsa vain silloin, kun molempien pisteiden  $\mathbf{n}_\perp$  osoittavat samaan suuntaan, siis törmäyshetkellä ne yhtyvät. Tämä on aivan luonnollista, kun muistetaan kyseessä olevan vekto-

rikentän jatkuvan muutoksen. Tasa-arvopinnan kahden osan yhtymisen tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että kentän vektorit ovat samat molemmilla osilla juuri yhtymistä ennen, joka kuvituksessa käytetyn värityksen kannalta katsottuna on juuri yllä esitetty vaatimus. Lisäksi animaatioita [65] tarkastelemalla näyttäisi siltä, että tällaiset osat vetävät toisiaan puoleensa ja sellaiset, joilla  $\mathbf{n}_\perp$  ovat vastakkaissuuntaisia, hylkivät toisiaan. Hylkimisen ja puoleensa vetämisen voimakkuus näyttäisi riippuvan kyseisten vektorien pistetulon itseisarvosta - negatiiviset hylkivät ja positiiviset vetävät puoleensa.

Solitonien välisiä voimia on jo alustavasti numeerisesti tutkittukin [66], mutta hieman erilaisella järjestelyllä. Saadut tulokset ovat kuitenkin sopuinnussa tässä tehtyjen havaintojen kanssa. Jatkossa tätä tietoa voitaneen käyttää hyväksi mahdollisimman pienienergistien alkutilojen rakentamisessa.



Kuva 5.9: Varauksen  $Q = 7$  vorteksitilan etelänavan alkukuvat



Kuva 5.10: Alkukuvan kahden osan törmäys

# Luku 6

## Yhteenveto

### 6.1 Tulosten vertailua

Aiemmissä tutkimuksissa lähtöavaruus on ollut  $S^3$ , jolloin solitonin varaus todellakin on ollut kuvauksen  $n$  Hopfin invariantti. Lähtöavaruuden muuttaminen  $S^3 \rightarrow S^2 \times S^1$  ei tulosten perusteella kuitenkaan näyttäisi muuttavan Vakulenkon-Kapitanskiin löytämää [35] varauksen ja energian alarajan välistä suhdetta. Saatujen numeeristen tulosten valossa voidaan uskoa jopa Wardin tälle rajalle ehdottaman [66] tiukemman arvion pitävän paikkansa. Tarkalleen ottaen nyt tutkitussa mallissa energiaksi kutsuttu suure on vain energia tutkittua  $x_3$ -akselin pätkää kohden eikä koko avaruuden yli integroituna - aivan kuten Hopfin varauskin.

Nyt löydetty minimi noudattavat erittäin hyvin Vakulenkon-Kapitanskiin energiaraajaa. Ainoastaan useasta renkaasta ja vorteksista kootut alkutilat jäävät hyvin korkeaenergisiksi. Olisikin mielenkiintoista tietää, onko kyseessä lokaali minimi vai pelkästään pitkä ja loiva "terassi". Myös varauksen  $Q = 9$  vorteksialkutila olisi tutkimuksen arvoinen, kunhan laskentakapasiteetti ensin hieman kasvaa.

Tulosten eroavuus esimerkiksi viitteiden [41, 46] numeerisista tuloksista selittyy vakion  $g$  valinnalla sillä tässä on valittu sille eri arvo. Vakio  $g$  määräytyy vasta mahdollisista mallin kuvaaman fysikaalisen ilmiön mittauksista, joten toistaiseksi se voidaan valita vapaasti, kunhan se on positiivinen ja näin suoraan vaikuttaa saatavien minimienergioiden energiaan. On myös mahdollista, että  $g$ :n arvo vaikuttaa minimienergiatilojen muotoon ja tätä olisikin mielenkiintoista tutkia jatkossa.

## 6.2 Mihin seuraavaksi?

Faddeevin-Skyrmen mallille on, kuten johdannossa todettiin, esitetty moniakin eri sovellusvaihtoehtoja ja näitä tullaan varmasti jatkossa tutkimaan, mutta joitakin yleisiä ominaisuuksia on vielä tutkimatta.

Ensinnäkin on löytynyt vasta kaksi torussolmun muotoista minimienergiatilaa. Faddeevin ja Niemen alkuperäinen odotus [61] oli, että torussolmu (kolmisolmu) esiintyisi jo varauksen  $Q = 3$  kohdalla. Tätä ei kuitenkaan ole numeerisesti pystytty todentamaan, vaan kaikki varauksen  $Q = 3$  minimienergiatilat ovat olleet vääntyneitä renkaita. Kyseessä voi kuitenkin olla vain lokaali minimi ja olisi mielenkiintoista luoda analyttinen kolmisolmutila, jolle  $Q = 3$  ja antaa sen energian minimoitua. Itse asiassa voisi odottaa muidenkin torussolmujen esiintyvän ratkaisuuina, kunhan varausta on riittävästi. Tämäkin aihe odottaa numeerisia tuloksia.

Varaus  $Q = 3$  kyllä riittäisi kolmisolmun luomiseen, mutta vasta varauksella  $Q = 7$  sellainen syntyy energiaa minimoimalla. Battye ja Sutcliffe [59] esittivät kvalitatiivisin argumentein, että pienin energia syntyy sellaisesta tilasta, jossa etelänavan alkukuva on mahdollisimman lyhyt, kunhan varaus otetaan jollakin tavalla huomioon pituutta määritettäessä. Tämän lisäksi, mikäli alkukuva koostuu erillisistä osista, näiden erillisten osien varausten tulee olla mahdollisimman pieniä ja varauksen symmetrisesti jakautunut osien välille. Tämän lisäksi linkityksestä tulee oma lisänsä energiaan. Tämän argumentoinnin varmistaminen vaatisi mahdollisesti hyvinkin korkeavarauksisten tilojen tutkimista, sillä seuraava torussolmu tai kolme symmetrisesti linkittyneitä rengasta tuskin esiintyvät, kuten ei kolmisolmukaan, pienimmällä kyseisen tilan mahdollistavalla varauksella minimienergiatiloina, vaan vasta jossakin korkeammalla - jos sielläkään. Tätä varauksen ja alkukuvan pituuden suhdetta on hieman laajennetulla mallilla alustavasti jo tutkittukin [67].

Tähän mennessä tutkimus on keskittynyt lähes yksinomaan mallin staattisten ominaisuuksien tutkimiseen. Yksi avoin kysymys onkin kentän dynamiikka ja erityisesti mielenkiintoinen on kysymys solitonien vuorovaikutuksista sekä siitä ovatko ne todellakin stabiileja myös törmätessään. Tämän tutkiminen vaatisi koko kenttäyh-tälöiden käyttöä, mutta laskentakapasiteetin kasvaessa se tulee mahdolliseksi.

Tulee olemaan hyvin mielenkiintoista nähdä, millaisia tuloksia jatkossa saavutetaan sekä Faddeevin-Skyrmen mallin itsensä että sen yleistysten piirissä sillä mahdollisten sovellusten ja ilmiöiden kirjo on hyvin laaja.

# Liite A

## Merkinnöistä

$\partial_a$	Osittaisderivaatta $a$ :n muuttujan suhteen: $\partial_a f(u) \equiv \frac{\partial f(u)}{\partial u^a}$ .
$f_{,a}$	Myös osittaisderivaatta: $f(u)_{,a} \equiv \frac{\partial f(u)}{\partial u^a}$ . Huomaa, että $f$ voi luonnollisesti sisältää muitakin indeksejä.
$\simeq$	Homotooppisuutta ilmaiseva binäärirelaatio; mikäli $f$ ja $g$ ovat homotooppiset, merkitään $f \simeq g$ .
$\approx$	Homeomorfaa ilmaiseva binäärirelaatio; mikäli on olemassa homeomorfa $A \rightarrow B$ , merkitään $A \approx B$ .
$\cong$	Isomorfaa ilmaiseva binäärirelaatio; mikäli on olemassa isomorfa $A \rightarrow B$ , merkitään $A \cong B$ .
$I$	Yksikköjana: $I := [0, 1]$ , ellei toisin mainita.
$\mathbf{x}$	Vektoriavaruuteen ja sen dimensioon katsomatta merkitään sen alkioita lihavoidulla symbolilla, $\mathbf{x} \in X$ . Merkitään myös $\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , mikäli avaruuden dimensio on $n$ . Poikkeuksen muodostaa Minkowskin avaruus $\mathcal{M}$ , jonka alkioita merkitään vaikiintuneella tavalla lihavoimattomilla symboleilla: $x \in \mathcal{M}$ .
$\partial I$	Kun $I$ on (topologinen) avaruus, $\partial I$ on sen reuna eli $\partial I := \bar{I} \setminus I^0$ .
$\overleftarrow{\gamma}$	Polun $\gamma$ käänteispolku: $\overleftarrow{\gamma} := \gamma(1 - t)$ .
$(f * g)(t)$	Polkujen $f$ ja $g$ kompositio, määritelmä 2.3.
$\pi_n(X, x_0)$	Avaruuden $X$ $n$ :s absoluuttinen homotopiaryhmä.
$\pi_n(X)$	Jos $X$ on yhtenäinen, merkitään $\pi_n(X) := \pi_n(X, x_0)$ .
$\mathbb{I}_X$	Ryhmän $X$ neutraalialkio.
$D^n$	Avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikkökiekko eli $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \mathbf{x}\  \leq 1\}$ .
$S^n$	$S^n := \partial(D^{n+1})$ , eli $n$ -pallo: $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ \mathbf{x}\  = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

$C^n(A, B)$	Mikäli $n > 0$ , tämä on $n$ kertaa jatkuvasti differentioituvien kuvausten $A \rightarrow B$ joukko. Jos $n = 0$ , kyseessä on jatkuvien kuvausten $A \rightarrow B$ joukko, jota merkitään myös $C(A, B)$ .
$C^\infty(A, B)$	Sileiden kuvausten $A \rightarrow B$ joukko eli ne kuvaukset $f$ , joille pätee $f \in C^n(A, B) \forall n \in \mathbb{Z}$ .
$\Lambda^p(X)$	Sileällä monistolla $X$ määriteltyjen $p$ -muotojen joukko.
$\Lambda(X)$	Porrastettu Grassman-algebra, joka muodostuu avaruuden $X$ $p$ -muotojen joukoista: $\Lambda(X) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(X)$ .
$\wedge$	Kiila- eli ulkotulo: $\wedge: \Lambda(X) \times \Lambda(X) \rightarrow \Lambda(X)$ .
$d$	Ulkoderivaatta: $d: \Lambda(X) \rightarrow \Lambda(X)$ .
$f^*$	Funktion $f$ määrittämä vetofunktio. Jos $f: X \rightarrow Y$ , niin $f^*: \Lambda(Y) \rightarrow \Lambda(X)$ .
$\epsilon_{i_1 \dots i_n}$	Täysin antisymmetrinen $n$ -tensori eli on voimassa $\forall j \in [1, n]$ : $\epsilon_{i_1 \dots i_j i_{j+1} \dots i_n} = -\epsilon_{i_1 \dots i_{j+1} i_j \dots i_n}$ .
$\text{id}_X$	Identiteettikuvaus $X \rightarrow X$ .
$\text{id}$	$\text{id}_X$ , mikäli $X$ selviää asiayhteydestä.
$\sigma_i$	Paulin matriisit: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ja $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
$\text{tr}$	Matriisin jälki.

Jos  $X$  ja  $Y$  ovat topologisia avaruuksia sekä  $f: X \times I \rightarrow Y$ , niin  $f_t := f|_{X \times t}$ .

# Kirjallisuutta

- [1] M. Kléman, “Defects in liquid crystals,” *Rept. Prog. Phys.* **52** (1989) 555–654.
- [2] J. P. Martikainen, A. Collin, and K. A. Suominen, “Creation of a monopole in a spinor condensate,” *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 090404.
- [3] J. Ruostekoski and J. R. Anglin, “Creating vortex rings and three-dimensional skyrmions in Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 3934–3937, [cond-mat/0103310](#).
- [4] R. L. Davis and E. P. S. Shellard, “Global string lifetimes: never say forever,” *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 2021.
- [5] V. M. H. Ruutu *et al.*, “Big bang simulation in superfluid  $^3\text{He-B}$  – vortex nucleation in neutron-irradiated superflow,” *Nature* **382** (1996) 334, [cond-mat/9512117](#).
- [6] T. A. Ioannidou and P. M. Sutcliffe, “Soliton dynamics in 3D ferromagnets,” *Physica* **D150** (2001) 118–126, [cond-mat/0101129](#).
- [7] T. W. B. Kibble, “Topology of cosmic domains and strings,” *J. Phys.* **A9** (1976) 1387–1398.
- [8] K. Kajantie, M. Karjalainen, M. Laine, J. Peisa, and A. Rajantie, “Thermodynamics of gauge-invariant U(1) vortices from lattice monte carlo simulations,” *Phys. Lett.* **B428** (1998) 334–341, [hep-ph/9803367](#).
- [9] A. J. Niemi, K. Palo, and S. Virtanen, “(Meta)stable closed vortices in (3+1)-dimensional gauge theories with an extended Higgs sector,” *Phys. Rev.* **D61** (2000) 085020.
- [10] Y. M. Cho, “Knot solitons in Weinberg-Salam model,” [hep-th/0110076](#).

- [11] C. Bäuerle, Y. M. Bunkov, S. N. Fisher, H. Godfrin, and G. R. Pickett, “Laboratory simulation of cosmic string formation in the early Universe using superfluid  $^3\text{He}$ ,” *Nature* **382** (1996) 332.
- [12] T. D. C. Bevan *et al.*, “Momentum creation by vortices in superfluid  $^3\text{He}$  as a model of primordial baryogenesis,” *Nature* **386** (1997) 689.
- [13] M. Hindmarsh and A. Rajantie, “Defect formation and local gauge invariance,” *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 4660–4663, [cond-mat/0007361](#).
- [14] A. Rajantie, “Formation of topological defects in gauge field theories,” *Int. J. Mod. Phys.* **A17** (2002) 1–44, [hep-ph/0108159](#).
- [15] M. J. Bowick, L. Chandar, E. A. Schiff, and A. M. Srivastava, “The cosmological Kibble mechanism in the laboratory: String formation in liquid crystals,” *Science* **263** (1994) 943–945, [hep-ph/9208233](#).
- [16] M. B. Hindmarsh and T. W. B. Kibble, “Cosmic strings,” *Rept. Prog. Phys.* **58** (1995) 477–562, [hep-ph/9411342](#).
- [17] R. Ray and A. M. Srivastava, “Measuring cosmic defect correlations in liquid crystals,” [hep-ph/0110165](#).
- [18] R. Carmi, E. Polturak, and G. Koren, “Observation of spontaneous flux generation in a multi-Josephson-junction loop,” *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 4966–4969.
- [19] Y. M. Cho, “Creation of knots in bose-einstein condensates,” [cond-mat/0112325](#).
- [20] E. Babaev, L. D. Faddeev, and A. J. Niemi, “Hidden symmetry and duality in a charged two-condensate Bose system,” *Phys. Rev.* **B65** (2002) 100512, [cond-mat/0106152](#).
- [21] P. A. M. Dirac, “Quantised singularities in the electromagnetic field,” *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A133** (1931) 60–72.
- [22] P. A. M. Dirac, “The theory of magnetic poles,” *Phys. Rev.* **74** (1948) 817–830.
- [23] T. H. R. Skyrme *Proc. Roy. Soc.* (1958).
- [24] T. H. R. Skyrme *Proc. Roy. Soc.* (1959).

- [25] T. H. R. Skyrme *Proc. Roy. Soc.* **260** (1961) 127.
- [26] T. H. R. Skyrme *Nuclear Physics* **31** (1962) 556.
- [27] G. 't Hooft, "Magnetic monopoles in unified gauge theories," *Nucl. Phys.* **B79** (1974) 276–284.
- [28] A. M. Polyakov, "Particle spectrum in quantum field theory," *JETP Lett.* **20** (1974) 194–195.
- [29] B. Julia and A. Zee, "Poles with both magnetic and electric charges in nonabelian gauge theory," *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2227–2232.
- [30] H. Jehle, "Flux quantization and particle physics," *Phys. Rev.* **D6** (1972) 441–457.
- [31] L. D. Faddeev, "Some comments on the many-dimensional solitons," *Letters in Mathematical Physics* **1** (1976), no. 4, 289.
- [32] L. D. Faddeev, *Relativity, Quanta and Cosmology, osa 1*, ch. Einstein and Several Contemporary Tendencies in the Field Theory of Elementary Particles. Johnson Reprint, 1979.
- [33] W. H. Thomson *Trans. R. Soc. Edin.* **25** (1869) 217.
- [34] D. A. Nicole, "Solitons with non-vanishing Hopf-index," *J. Phys. G* **4** (1978), no. 9, 1363.
- [35] A. F. Vakulenko and L. V. Kapitanskii, "Stability of solitons in  $S^2$  in the nonlinear  $\sigma$ -model," *Sov.Phys.Dokl.* **24** (1979), no. 6,.
- [36] L. D. Faddeev and A. J. Niemi, "Partially dual variables in  $SU(2)$  yang-mills theory," *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 1624–1627, hep-th/9807069.
- [37] E. Langmann and A. J. Niemi, "Towards a string representation of infrared  $SU(2)$  yang- mills theory," *Phys. Lett.* **B463** (1999) 252–256, hep-th/9905147.
- [38] L. D. Faddeev and A. J. Niemi, "Magnetic geometry and the confinement of electrically conducting plasmas," *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3416–3419, physics/0003083.

- [39] E. Babaev, “Vortices carrying an arbitrary fraction of magnetic flux quantum in two-gap superconductors,” *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 067001, [cond-mat/0111192](#).
- [40] E. Babaev, “Knotted solitons in triplet superconductors,” *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 177002, [cond-mat/0106360](#).
- [41] J. Hietarinta and P. Salo, “Ground state in the faddeev-skyrme model,” *Phys. Rev.* **D62** (2000) 081701.
- [42] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [43] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*. Springer-Verlag, 1982.
- [44] Y. Choquet-Bruhat and C. D. with Margaret Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics*. North Holland, 1992.
- [45] J. F. Adams, “On the non-existence of elements of Hopf invariant one,” *Annals of Mathematics* **72** (1960) 20–104.
- [46] J. Hietarinta and P. Salo, “Faddeev-hopf knots: Dynamics of linked un-knots,” *Phys. Lett.* **B451** (1999) 60–67, [hep-th/9811053](#).
- [47] H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 2nd ed., 1980.
- [48] G. H. Derrick, “Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles,” *J. Math. Phys.* **5** (1964), no. 9, 1252.
- [49] W. Zakrzewski, *Low dimensional sigma models*. IOP Publishing Ltd, 1989.
- [50] G. 't Hooft, “A planar diagram theory for strong interactions,” *Nucl. Phys.* **B72** (1974) 461.
- [51] G. 't Hooft, “A two-dimensional model for mesons,” *Nucl. Phys.* **B75** (1974) 461.
- [52] E. Witten, “Baryons in the  $1/n$  expansion,” *Nucl. Phys.* **B160** (1979) 57.
- [53] R. A. Battye and P. M. Sutcliffe, “Skyrmions, fullerenes and rational maps,” *Rev. Math. Phys.* **14** (2002) 29–86, [hep-th/0103026](#).
- [54] R. S. Ward, “Hopf solitons on  $S(3)$  and  $R(3)$ ,” [hep-th/9811176](#).

- [55] J. Kiukas, “Epäyhtälöistä,” *unpublished*.
- [56] H. Aratyn, L. A. Ferreira, and A. H. Zimerman, “Toroidal solitons in 3+1 dimensional integrable theories,” *Phys. Lett.* **B456** (1999) 162–170, [hep-th/9902141](#).
- [57] H. Aratyn, L. A. Ferreira, and A. H. Zimerman, “Exact static soliton solutions of 3+1 dimensional integrable theory with nonzero Hopf numbers,” *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 1723–1726, [hep-th/9905079](#).
- [58] H. J. de Vega, “Closed vortices and the Hopf index in classical field theory,” *Physical Review D* **18** (1977), no. 8,.
- [59] R. A. Battye and P. Sutcliffe, “Solitons, links and knots,” *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A455** (1999) 4305–4331, [hep-th/9811077](#).
- [60] J. Haataja, J. Käpyaho, and J. Rahola, *Numeeriset menetelmät*. Yliopistopaino, 1993.
- [61] L. D. Faddeev and A. J. Niemi, “Knots and particles,” *Nature* **387** (1997) 58, [hep-th/9610193](#).
- [62] L. D. Faddeev and A. J. Niemi, “Toroidal configurations as stable solitons,” [hep-th/9705176](#).
- [63] J. Gladikowski and M. Hellmund, “Static solitons with non-zero hopf number,” *Phys. Rev.* **D56** (1997) 5194–5199, [hep-th/9609035](#).
- [64] R. A. Battye and P. M. Sutcliffe, “Knots as stable soliton solutions in a three-dimensional classical field theory,” *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 4798–4801, [hep-th/9808129](#).
- [65] “Visualisations of the faddeev-skyrme field,  
<http://lagrange.tfy.utu.fi/hopf/animations/>.”
- [66] R. S. Ward, “The interaction of two hopf solitons,” *Phys. Lett.* **B473** (2000) 291–296, [hep-th/0001017](#).
- [67] M. Lübcke, S. M. Nasir, A. Niemi, and K. Torokoff, “Twisted vortices in a gauge field theory,” [hep-th/0106102](#).