Insinöörimatematiikka IIA

Demonstraatio 6, 23.2.2010

1. Olkoon $||\boldsymbol{x}|| = 4$, $||\boldsymbol{y}|| = 7$ ja $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| = 9$. Laske $||\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}||$.

   Vastaus:

$$\begin{aligned} & ||\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}||^2 = (\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} + 6\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + 9\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} \\ = \; & ||\boldsymbol{x}||^2 + 6\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + 9||\boldsymbol{y}||^2 = 4^2 + 6\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + 9\cdot 7^2 = 457 + 6\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

   Pistetulo $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ saadaan selville seuraavasti:

$$\begin{aligned} 9^2 &= ||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} \\ &= ||\boldsymbol{x}||^2 + 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + ||\boldsymbol{y}||^2 = 4^2 + 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + 7^2 = 65 + 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}, \end{aligned}$$

   mistä $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 8$ ja siis $||\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}||^2 = 457 + 6\cdot 8 = 505$ ja siis $||\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}|| = \sqrt{505}$.

2. Osoita, että

$$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 = 2||\boldsymbol{x}||^2 + 2||\boldsymbol{y}||^2.$$

   Tulkitse yllä oleva yhtälö geometrisesti selittääksesi miksi sitä kutsutaan suunnikassäännöksi.

   Vastaus:

$$\begin{aligned} & ||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 + ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ = \; & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} = 2||\boldsymbol{x}||^2 + 2||\boldsymbol{y}||^2. \end{aligned}$$

   Säännön mukaan suunnikkaan lävistäjien neliösumma on sama kuin suunnikkaan sivujen neliösumma.

3. Laske vektorin $\boldsymbol{x} = (4, 3, -5)$ projektio vektorilla $\boldsymbol{y} = (1, 2, 1)$.

   Vastaus: Projektio $\boldsymbol{x'}$ tarkoittaa vektoria $a\boldsymbol{y}$, jolle pätee $\boldsymbol{y}\cdot(\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{y}) = 0$. Tästä $a = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{||\boldsymbol{y}||^2}$. Tässä tehtävässä $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = (4, 3, -5)\cdot(1, 2, 1) = 4 + 6 - 5 = 5$ ja $||\boldsymbol{y}||^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$, jolloin $a = \frac{5}{6}$ ja $\boldsymbol{x'} = a\boldsymbol{y} = (\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6})$.

4. Käytä Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä todistaaksesi, että vektorille $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ pätee

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

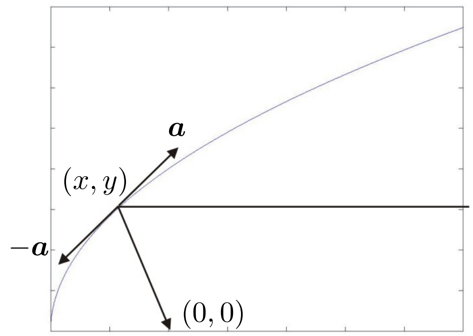
   Onko olemassa vektoreita $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, joille yllä oleva epäyhtälö toteutuu yhtäsuuruutena?

   Vastaus: Väite seuraa suoraan sijoittamalla $\boldsymbol{y} = (1, 1, \ldots, 1)$ Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöön

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2).$$

   Jos $x = (a, a, \ldots, a)$, pätee epäyhtälö yhtäsuuruutena.

5. Olkoon $y = y(x)$ sellaisen käyrän yhtälö, joka heijastaa x-akselin suuntaiset säteet origoon. Etsi differentiaaliyhtälö y:lle.



Käyrän tangentin suuntaiseksi vektoriksi voidaan valita $\boldsymbol{a} = (1, y')$ (miksi?), x-akselin suuntaiseksi vektoriksi $(1, 0)$ ja vektoriksi origosta käyrälle (x, y). Kirjoita yhtälö, jonka mukaan oikealta tulevan säteen kulma vektorin $\boldsymbol{a}$ kanssa on yhtä suuri kuin vektorin $-\boldsymbol{a}$ ja pisteestä (x, y) origoon kulkevan vektorin kanssa.

Vastaus: Derivaatan määritelmän perusteella käyrän $y = y(x)$ tangentin kulmakerrointa edustaa $y'(x)$, joten $\boldsymbol{a} = (1, y')$ on käyrän tangentin suuntainen vektori, samoin kuin $-\boldsymbol{a}$. $\boldsymbol{a}$:n ja vektorin $(1, 0)$ välisen kulman kosini on

$$\frac{(1, y') \cdot (1, 0)}{||(1, y')|| \cdot ||(1, 0)||} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Tämän tulee olla sama kuin vektoreiden $-\boldsymbol{a}$ ja $-(x, y)$ välisen kulman kosini, joka on

$$\frac{(-1, -y') \cdot (-x, -y)}{||(-1, -y')|| \cdot ||(-x, -y)||} = \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + (y')^2}\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Asetettaessa nämä kulmat yhtäsuuriksi saadaan

$$1 = \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Tämä on monisteen esimerkin 45 eksakti differentiaaliyhtälö.

6. Viidessä eri koejärjestelyissä mitattiin suureen A ja B arvo. Suureen A arvoiksi saatiin 2, 3, 3, 10 ja 5. Vastaavasti B:n arvoiksi saatiin 20, 22, 17, 11 ja 12. Laske A:n ja B:n välinen korrelaatio.

   Vastaus: Merkitään $\boldsymbol{x} = (2, 3, 3, 10, 5)$ ja $\boldsymbol{y} = (20, 22, 17, 11, 12)$, jolloin $\mu_x = \frac{23}{5}$ ja $\mu_y = \frac{82}{5}$. Tällöin siirretyt vektorit ovat $\boldsymbol{x'} = (-\frac{13}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{27}{5}, \frac{2}{5})$ ja $\boldsymbol{y'} = (\frac{18}{5}, \frac{28}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{27}{5}, -\frac{22}{5})$. Korrelaatiokerroin on näiden vektoreiden välisen kulman kosini:

$$\frac{\boldsymbol{x'} \cdot \boldsymbol{y'}}{||\boldsymbol{x'}|| \cdot ||\boldsymbol{y'}||} = \frac{-\frac{251}{5}}{\sqrt{\frac{205}{5}}\sqrt{\frac{466}{5}}} = -\frac{251}{\sqrt{205 \cdot 466}} \approx -0,81$$

7. Laske sen suunnikkaan ala, jonka kärjet ovat origo $(0, 0)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ ja $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Otaksutaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat tason I neljänneksessä.

   Vastaus: Ala on

$$x_1y_2 - y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$