

Insinöörimatematiikka IIA

Harjoitustehtäviä

1. Selvitä, onko \mathbb{R}^3 :n vektorijoukko $\{(1, 0, 1), (1, 1, 2), (1, -1, 0)\}$ lineaarisesti riippumaton. Jos näin ei ole, esitä jokin vektoreista muiden lineaarikombinaationa ja selvitä edelleen, onko jäljelle jäänyt joukko lineaarisesti riippumaton.

Ratkaisu: Gaussin menetelmä muuntaa matriisin $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ porrasmuotoon

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, mistä nähdään, että rivivektorit ovat lineaarisesti riippuvat. Menetelmässä käytetyt operaatiot kertovat, että $(1, -1, 0) + (1, 1, 2) - 2(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$, siis $(1, -1, 0) = 2(1, 0, 1) - (1, 1, 2)$. Jos $(1, -1, 0)$ poistetaan, kertoo sama menetelmä, että jäljelle jäänyt joukko on lineaarisesti riippumaton.

2. Laske $\|\mathbf{x} + 2\mathbf{y}\|$, kun tiedetään, että $\|\mathbf{x}\| = 2$, $\|\mathbf{y}\| = 3$ ja $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 3$.

Ratkaisu: $\|\mathbf{x} + 2\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + 2\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + 2\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 4\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + 4\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + 4\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + 4\|\mathbf{y}\|^2$. Sisätulo $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ selviää ehdosta $9 = 3^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 = 9 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + 9$, mistä saadaan $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -2$ ja $\|\mathbf{x} + 2\mathbf{y}\|^2 = 32$, siis $\|\mathbf{x} + 2\mathbf{y}\| = 4\sqrt{2}$.

3. Laske $\|\mathbf{x} + 4\mathbf{y}\|$, kun tiedetään, että $\|\mathbf{x}\| = 2$, $\|\mathbf{y}\| = 3$ ja $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 2\sqrt{10}$.

Vastaus: Kolmioepäyhtälön nojalla $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| = 2 + 3 = 5$, mutta $2\sqrt{10} > 2\sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$, joten tehtävässä kuvailtu tilanne on mahdoton.

Jos lukuarvo $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 2\sqrt{10}$ korvattaisiin jollakin pienemmällä arvolla $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = c \leq 5$, saataisiin vastaus seuraavasti:

$$c^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 = 4 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + 9,$$

josta $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{c^2 - 13}{2}$. Täten

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + 4\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + 4\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + 4\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 8\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + 16\|\mathbf{y}\|^2 \\ &= 16 + 4(c^2 - 13) = 96 + 4c^2 \end{aligned}$$

ja siis $\|\mathbf{x} + 4\mathbf{y}\| = \sqrt{96 + 4c^2}$.

4. Olkoon

$$\begin{cases} x'(t) = x - y \\ y'(t) = x + y. \end{cases}$$

Laske vektoreiden (x, y) ja (x', y') välinen kulma.

Ratkaisu: $(x, y) \cdot (x', y') = (x, y) \cdot (x - y, x + y) = x^2 - xy + y^2 + xy = x^2 + y^2$ ja $\|(x', y')\| = \sqrt{(x - y)^2 + (x + y)^2} = \sqrt{2x^2 + 2y^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}\|(x, y)\|$. Täten kysytty kulma θ toteuttaa yhtälön

$$\cos \theta = \frac{(x, y) \cdot (x', y')}{\|(x, y)\| \|(x', y')\|} = \frac{\|(x, y)\|^2}{\|(x, y)\| \sqrt{2} \|(x, y)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ja siis $\theta = \frac{\pi}{4}$.

5. Määritä vektorin $\mathbf{x} = (8, -2, 1)$ projektiio vektorilla $\mathbf{y} = (1, 2, 2)$.

Ratkaisu: $\mathbf{x}' = \frac{(8, -2, 1) \cdot (1, 2, 2)}{(1, 2, 2) \cdot (1, 2, 2)} \mathbf{y} = \frac{2}{3} \mathbf{y} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

6. a) Etsi kaksi \mathbb{R}^3 :n vektoria \mathbf{x} ja \mathbf{y} , jotka ovat kohtisuorassa toisiaan sekä vektoria $\mathbf{z} = (5, 2, -4)$ kohtaan.

b) Onko ratkaisu yksikäsitteinen, jos vielä vaaditaan, että $\|\mathbf{x}\| = 1$ ja $\|\mathbf{y}\| = 1$?

Ratkaisu: a) Kohtisuorien vektoreiden tulee toteuttaa yhtälö $5x + 2y - 4z = 0$, joten valinnat $\mathbf{x} = (4, 0, 5)$ ja $\mathbf{y} = (0, 2, 1)$ käyvät. Tällöin mikä hyvänsä vektori näin löydettyjen vektoreiden generoimalta tasolta on kohtisuorassa alkuperäistä vektoria vastaan, joten etsitään tasolta kaksi vektoria, jotka ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Valitaan $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$ ja määrätään $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x} + a\mathbf{y}$ ehdon $\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{x}_1 = 0$ perustella. Ehto antaa $a = -\frac{41}{5}$. Tällöin toiseksi vektoriksi voidaan valita esimerkiksi $5((4, 0, 5) - \frac{41}{5}(0, 2, 1)) = (20, -82, -16)$ tai tämä 2:lla jaettuna: $(10, -41, -8)$.

b) Ei ole, voidaan yhtä hyvin valita mitkä tahansa kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa yksikkövektoria tasolta, joka on kohtisuorassa vektoria $(5, 2, -4)$ kohtaan. Esimerkiksi $(4, -10, 0)$ ja $(20, 8, 29)$ jaettuna normillaan käyvät.

7. Etsi kaksi vektoria \mathbf{x} ja \mathbf{y} , jotka ovat kohtisuorassa toisiaan sekä vektoria $\mathbf{z} = (3, 2, 2)$ kohtaan.

Ratkaisu: Yhdeksi ehdon $(3, 2, 2) \cdot (x, y, z) = 0$ toteuttavaksi vektoriksi voidaan valita esim $\mathbf{x} = (-2, 3, 0)$. Toiseksi vektoriksi voidaan valita $\mathbf{y} = \mathbf{x} \times (3, 2, 2) = (6, 4, -13)$.

8. Millä t :n arvoilla (jos millään) vektorit $\mathbf{x} = (2, 2, 1)$ ja $\mathbf{y} = (2, 3 - t, t - 8)$ ovat a) kohtisuorat b) lineaarisesti riippuvat (ts. yhdensuuntaiset)?

Ratkaisu: a) $(2, 2, 1) \cdot (2, 3 - t, t - 8) = 2 - t = 0$, kun $t = 2$. b) Jos kyseiset vektorit ovat yhdensuuntaiset, on $(2, 2, 1) = c(2, 3 - t, t - 8)$ jollekin luvulle c . Ensimmäisiä koordinaatteja vertaamalla nähdään, että $c = 1$, toisia vertaamalla, että $t = 1$, ja kolmansia $t = 9$. Näin ollen kysyttyä t :n arvoa ei löydy.

9. Suuretta A mitattaessa saatiin viidessä eri koejärjestelyssä tulokset 12, 32, 14, 43 ja 8. Vastaavat suureen B :n arvot samoissa koejärjestelyissä olivat 28, 7, 30, 2 ja 22. Laske korrelaatio A :n ja B :n välillä.

Ratkaisu: Merkitään $\mathbf{x} = (12, 32, 14, 43, 8)$ ja $\mathbf{y} = (28, 7, 30, 2, 22)$ \mathbf{x} :n koordinaattien keskiarvo on $\frac{109}{5}$ ja \mathbf{y} :n $\frac{89}{5}$, joten siirrettyiksi vektoreiksi saadaan $\mathbf{x}' = (-9.8, 10.2, -7.8, 21.2, -13.8)$ ja vastaavasti $\mathbf{y}' = (10.2, -10.8, 12.2, -15.8, 4.2)$. $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' = -698, 2$, $\|\mathbf{x}'\| = \sqrt{900, 8}$ ja $\|\mathbf{y}'\| = \sqrt{636, 8}$. Korrelaatiokertoimeksi saadaan

$$\frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}'}{\|\mathbf{x}'\| \|\mathbf{y}'\|} = \frac{-698, 2}{\sqrt{900, 8} \cdot \sqrt{636, 8}} \approx -0.92.$$

10. Etsi pisteiden $\mathbf{x} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{y} = (0, 2, 1)$ ja $\mathbf{z} = (1, 1, 0)$ kautta kulkevan tason parametriesitys $\{\mathbf{z}_1 + s\mathbf{x}_1 + t\mathbf{y}_1 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$, koordinaattimuoto $ax + by + cz = d$ sekä normaalimuoto $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$.

Ratkaisu: Tason suuntavektoreiksi voidaan valita $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y} - \mathbf{x} = (-1, 1, -1)$, $\mathbf{y}_1 = \mathbf{z} - \mathbf{x} = (0, 0, -2)$ ja paikkavektoriksi $\mathbf{x} = (1, 1, 2)$. Tällöin parametriesitys on

$$T = \{(1, 1, 2) + s(-1, 1, -1) + t(0, 0, -2) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Normaalivektoriksi saadaan $\mathbf{n} = \mathbf{y}_1 \times \mathbf{x}_1 = (2, 2, 0)$ ja normaalimuodoksi siis

$$(2, 2, 0) \cdot ((x, y, z) - (1, 1, 2)) = 0.$$

Vastaava koordinaattimuoto on $2x + 2y = 4$, siis $x + y = 2$.

11. Etsi tasojen $T_1 : x + y - 2z = 1$ ja $T_2 : x - 2y + z = 2$ leikkaukselle mahdollisimman yksinkertainen esitys.

Ratkaisu: Gaussin eliminointimenetelmä muuntaa yhtälöparin

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

muotoon

$$\begin{cases} x - z = \frac{4}{3} \\ y - z = -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

jonka ratkaisu voidaan kirjoittaa $(x, y, z) = (z + \frac{4}{3}, z - \frac{1}{3}, z) = z(1, 1, 1) + (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$.

12. Määrää tasojen $T_1 = \{(1, 1, -2) + s(0, 1, 2) + t(-1, 1, -1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ ja $T_2 = \{(0, 1, 0) + s(-1, 1, 0) + t(0, 0, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ leikkaussuoran L parametrimuoto ja standardimuoto.

Ratkaisu: Tason T_1 normaaliksi saadaan $\mathbf{n}_1 = (0, 1, 2) \times (-1, 1, -1) = (-3, -2, 1)$, mistä saadaan normaalimuoto $(-3, -2, 1) \cdot ((x, y, z) - (1, 1, -2)) = 0$, mikä voidaan kirjoittaa koordinaattimuodoksi $-3x - 2y + z = -7$. Samoin saadaan tasolle T_2 normaalivektori $\mathbf{n}_2 = (-1, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, 1, 0)$ ja koordinaattimuodoksi $x + y = 1$. Yhtälöparin

$$\begin{cases} -3x - 2y + z = -7 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

augmentoitu matriisi saadaan Gaussin menetelmällä redusoituun porrasmuotoon, joka puolestaan vastaa paria

$$\begin{cases} x - z = 5 \\ y + z = -4, \end{cases}$$

joten ratkaisu voidaan kirjoittaa muotoon $(x, y, z) = (z + 5, -z - 4, z) = z(1, -1, 1) + (5, -4, 0)$. Leikkaussuoran parametrimuoto on siis $(x, y, z) = t(1, -1, 1) + (5, -4, 0)$, missä $t \in \mathbb{R}$. Yhtälöistä $x = t + 5$, $y = -t - 4$ ja $z = t$ saadaan $t = x - 5 = -y - 4 = z$, siis standardimuoto on

$$x - 5 = \frac{y + 4}{-1} = z.$$

13. Etsi pisteiden $\mathbf{x} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{y} = (0, 1, 1)$ ja $\mathbf{z} = (1, 0, 1)$ kautta kulkevan tason
a) parametriesitys $\{\mathbf{z}_1 + s\mathbf{x}_1 + t\mathbf{y}_1 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

b) koordinaattimuoto $ax + by + cz = d$.

Ratkaisu: a) Voidaan valita $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y} - \mathbf{x} = (-2, 0, 1)$ ja $\mathbf{y}_1 = \mathbf{z} - \mathbf{x} = (-1, -1, 1)$ sekä $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}$.

b) Tason normaalivektoriksi voidaan valita $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{y}_1 = (1, 1, 2)$, jolloin normaalimuoto on $(1, 1, 2) \cdot ((x, y, z) - (2, 1, 0)) = 0$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon $x + y + 2z = 3$.

14. Määrää tasojen $T_1 : x + 2y + 2z = 1$ ja $T_2 : x - y + z = 2$ leikkaussuoran L a) parametrimuoto. b) standardimuoto.

Ratkaisu: a) Yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

on ekvivalentti ryhmän

$$\begin{cases} x + \frac{4}{3}z = \frac{5}{3} \\ y + \frac{1}{3}z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

kanssa, joten $(x, y, z) = (-\frac{4}{3}z + \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}z - \frac{1}{3}, z) = (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0) + z(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$.

b) Merkitään $z = t$, jolloin saadaan

$$\frac{x - \frac{5}{3}}{-\frac{4}{3}} = \frac{y + \frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{z}{1}.$$

15. Määritä suoran $L : \frac{x-2}{2} = y + 1 = \frac{z+1}{3}$ etäisyys tasosta $2x - y - z = 6$.

Ratkaisu: Merkitsemällä $\frac{x-2}{2} = y + 1 = \frac{z+1}{3} = t$ saadaan suoralle parametri-
muoto $(x, y, z) = (2t + 2, t - 1, 3t - 1) = t(2, 1, 3) + (2, -1, -1)$. Normaalivek-
toriksi tasolle saadaan $\mathbf{n} = (2, -1, -1)$.

Todetaan, että $(2, -1, -1) \cdot (2, 1, 3) = 0$, joten siis suora on tason kanssa sa-
mansuuntainen. Muodostetaan suora $L : (2, -1, -1) + t(2, -1, -1)$ jolla on
yhteinen piste $(2, -1, -1)$ alkuperäisen suoran kanssa ja joka on kohtisuoras-
sa tasoa vastaan. Suoran yleinen piste $(2 + 2t, -1 - t, -1 - t)$ kuuluu tasolle
tarkalleen silloin kun

$$2(2 + 2t) - (-1 - t) - (-1 - t) = 6 \iff t = 0,$$

mikä merkitsee sitä, että piste $(2, -1, -1)$ tasolle. Tällöin siis suora kulkee
tasossa ja sen etäisyys tasosta on 0.

16. Laske pisteen $(8, 3, -2)$ etäisyys tasosta $3x + y - 2z = 4$.

Ratkaisu: Tason normaalivektoriksi voidaan valita $\mathbf{n} = (3, 1, -2)$, jolloin suora
 $L : (8, 3, -2) + t(3, 1, -2)$ kulkee pisteen $(8, 3, -2)$ kautta ja on kohtisuoras-
sa tasoa vastaan. Suoran yleinen piste $(8 + 3t, 3 + t, -2 - 2t)$ kuuluu tasolle
tarkalleen silloin kun

$$3(8 + 3t) + (3 + t) - 2(-2 - 2t) = 4 \iff t = -\frac{27}{14}.$$

Tason ja pisteen välinen etäisyys on täten

$$\left\| -\frac{27}{14}(3, 1, -2) \right\| = \frac{27}{14} \sqrt{9 + 1 + 4} = \frac{27\sqrt{14}}{14}.$$

17. Laske suorien $L_1 = \{(1, 1, 1) + t(1, 1, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ja $L_2 = \{(4, 2, 2) + t(1, -1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ välinen etäisyys.

Ratkaisu: Vektori $\mathbf{n} = (1, -1, 0) \times (1, 1, -1) = (1, 1, 2)$ on kohtisuorassa kum-
paakin suoraa kohtaan. on selvitettävä, milloin $(1 + t, 1 + t, 1 - t) - (4 + s, 2 - s, 2) = (-3 + t - s, -1 + t + s, -1 - t)$ on samansuuntainen kuin $(1, 1, 2)$, siis milloin on olemassa luku c , jolle yhtälöryhmä

$$\begin{cases} t - s - c = 3 \\ t + s - c = 1 \\ -t \quad \quad -2c = 1 \end{cases}$$

toteutuu. Gaussin menetelmällä yhtälöryhmä saadaan muotoon

$$\begin{cases} t & = & 1 \\ s & = & -1 \\ c & = & -1. \end{cases}$$

Suorien välinen etäisyys on siis pisteiden $(2, 2, 0)$ ja $(3, 3, 2)$ etäisyys $\|(2, 2, 0) - (3, 3, 2)\| = \|(-1, -1, -2)\| = \sqrt{6}$.

18. a) Totea, että suora $L : x - 2 = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{3}$ on yhdensuuntainen tason $T : x + y - z = 1$ kanssa. Ohje: Etsi suoran suuntavektori \mathbf{s} ja vertaa sitä tason normaalivektoriin \mathbf{n} .

b) Mikä on suoran L etäisyys tasosta T ? Ohje: Valitse suoralta L jokin piste \mathbf{x} ja selvitä, millä t :n arvolla $\mathbf{x} + t\mathbf{n}$ kuuluu tasolle T . Laske näin saadun tason pisteen etäisyys pisteestä \mathbf{x} .

Ratkaisu: a) Suoran suuntavektori on $(1, 2, 3)$ ja tason normaalivektori $(1, 1, -1)$. Koska $(1, 2, 3) \cdot (1, 1, -1) = 0$, on L yhdensuuntainen tason T kanssa.

b) Piste $\mathbf{x} = (2, -3, 1)$ kuuluu suoralle L ja $\mathbf{x} + t\mathbf{n} = (2+t, -3+t, 1-t)$. Näin saatu piste kuuluu tasolle, kun $2+t-3+t-(1-t) = 1$, mikä toteutuu, kun $t = 1$. Pisteiden \mathbf{x} ja $\mathbf{x} + t\mathbf{n}$ etäisyys on siis $\|\mathbf{x} + t\mathbf{n} - \mathbf{n}\| = \|t\mathbf{n}\| = \sqrt{3}$.

19. a) Totea, että suorat $L_1 = \{(1, 1, 1) + t(1, 1, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ja $L_2 = \{(4, 2, 2) + t(1, -1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eivät leikkaa (tällöin sanotaan että suorat ovat *ristikkäiset*).

b) Määritä suora, joka leikkaa sekä L_1 :n että L_2 :n kohtisuorasti ja laske sen avulla suorien L_1 ja L_2 etäisyys. Ohje: suorat $\{\mathbf{x} + t\mathbf{z} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ja $\{\mathbf{y} + t\mathbf{z} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ovat samat tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ on muotoa $c\mathbf{z}$.

Ratkaisu: a) Suorilla on leikkauspiste tarkalleen silloin kun yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} 1+t = 4+s \\ 1+t = 2-s \\ 1-t = 2 \end{cases}$$

on ratkaisu. Viimeisen yhtälön perusteella $t = -1$ ja mistä seuraa ensimmäiseen yhtälöön nojautuen, että $s = -4$ ja toiseen, että $s = 2$, ristiriita. Täten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

b) Vektori $(1, 1, -1) \times (1, -1, 0) = (-1, -1, -2)$ on kohtisuorassa kumpaakin suoraa vastaan, jolloin halutun suoran suuntavektoriksi voidaan valita $\mathbf{z} = (1, 1, 2)$. Kysytyllä suoralla on suoralla L_1 oleva paikkavektori $(1+t, 1+t, 1-t)$ mutta myös suoralla L_2 oleva paikkavektori $(4+s, 2-s, 2)$. Paikkavektoreiden erotuksen tulee olla suuntavektorin suuntainen, jolloin siis $(1+t, 1+t, 1-t) - (4+s, 2-s, 2) = c(1, 1, 2)$. Tämä yhtälö voidaan kirjoittaa yhtälöryhmäksi

$$\begin{cases} t - s - c = 3 \\ t + s - c = 1 \\ -t - 2c = 1 \end{cases},$$

jolla on yksikäsitteinen ratkaisu $t = 1, s = -1, c = -1$. Suoran paikkavektoriksi voidaan siis valita $\mathbf{x} = (2, 2, 0)$ tai $(3, 3, 2)$. Nämä ovat myös ne pisteet, joissa vektorin $(1, 1, 2)$ suuntainen suora leikkaa suorat L_1 ja L_2 , joten suorien etäisyys on pisteiden $(2, 2, 0)$ ja $(3, 3, 2)$ etäisyys $\|(3, 3, 2) - (2, 2, 0)\| = \|(1, 1, 2)\| = \sqrt{6}$.

Selvitä seuraavien 2. asteen pintojen laatu sekä hahmottele kuviot

20. a) $x^2 - 2y^2 - z^2 = 1$ b) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$.

Ratkaisu: a) Pinta $x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - z^2 = 1$ on 2-vaippainen hyperboloidi, akselina x -akseli.

b) Pinta $x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - z^2 = 1$ on 1-vaippainen hyperboloidi, akselina z -akseli.

21. a) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4x - 8y = 8$ b) $x^2 + 4y^2 - z = 0$.

Ratkaisu: a) Pinnan yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $(x + 2)^2 + 4(y - 1)^2 + 16z^2 = 16$ ja edelleen sijoitus $x' = x + 2$, $y' = y - 1$, $z' = z$ antaa $(\frac{x'}{4})^2 + (\frac{y'}{2})^2 + z'^2 = 1$. Kyseessä on ellipsoidi.

b) Käyrä on elliptinen paraboloidi $x^2 + (\frac{y}{2})^2 = z$.

22. Kartion kärki on pisteessä $(0, 0, 1)$ ja kartio leikkaa xy -tason yksikköympyrää pitkin. Määritä kartion yhtälö.

Ratkaisu: Kartio muodostuu, kun yz -tason suora $y = z - 1$ pyörähtää z -akselin ympäri. Pyöräyspinnan yhtälöksi saadaan $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$.