

Insinöörimatematiikka IIA

Tentti 11.8.2010 (3h)

Sallitut apuvälineet:

- 1) Matematiikan laitoksen kaavakokoelma
- 2) MAOLin taulukkokirja
- 3) kurssiin kuuluva taulukko Fourier- ja Laplace-muunnoksista
- 4) laskin joka ei kykene symboliseen eikä graafiseen laskentaan

1. a) Laske

$$\mathcal{F}[\Pi(x) \cos 2\pi x](y).$$

b) Laske

$$\mathcal{F}[\text{sinc } x](y).$$

Vastaus: a) Eulerin kaavaa ja taulukkoa soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\Pi(x) \cos 2\pi x](y) &= \mathcal{F}[\Pi(x) \frac{1}{2}(e^{2\pi i x} + e^{-2\pi i x})](y) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{F}[\Pi(x) e^{2\pi i x}](y) + \frac{1}{2} \mathcal{F}[\Pi(x) e^{-2\pi i x}](y) = \frac{1}{2} \text{sinc}(y - 1) + \frac{1}{2} \text{sinc}(y + 1)\end{aligned}$$

b) Koska $\mathcal{F}[\Pi(x)](y) = \text{sinc } y$, saadaan duaaliperiaatteen mukaan

$$\mathcal{F}[\text{sinc } x](y) = \Pi(-y) = \Pi(y)$$

2. a) Laske

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2s - 15}\right](t).$$

b) Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' + 5y' = e^{3t}$$

alkuehdoilla $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Vastaus: a) Nimittäjä jakautuu tekijöihin seuraavasti: $s^2 + 2s - 15 = (s - 3)(s + 5)$. Tällöin käänneismuunnos saadaan suoraan taulukosta:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - 3)(s + 5)}\right] = \frac{1}{8}(e^{3t} - e^{-5t}).$$

b) Laplace-muunnokset laskemalla yhtälö saadaan muotoon

$$s^2 Y - s + 5(sY - 1) = \frac{1}{s - 3},$$

mikä voidaan edelleen kirjoittaa asuun

$$(s^2 + 5s)Y = 5 + s + \frac{1}{s-3}.$$

Tästä voidaan ratkaista

$$Y = \frac{1}{s} + \frac{1}{s(s+5)(s-3)}.$$

Taulukosta saadaan

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) = 1$$

ja a)-kohdan tulos integroimalla nähdään, että

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+5)(s+3)}\right] = \frac{1}{24}(e^{3t} - 1) + \frac{1}{40}(e^{-5t} - 1)$$

Yhdistämällä nämä saadaan ratkaisuksi

$$y(t) = 1 + \frac{1}{24}(e^{3t} - 1) + \frac{1}{40}(e^{-5t} - 1) = \frac{1}{24}e^{3t} + \frac{1}{40}e^{-5t} - \frac{1}{15}.$$

3. a) Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' = y^2$$

alkuehdolla $y(1) = 1$.

b) Etsi ainakin kolme erilaista ratkaisua differentiaaliyhtälölle

$$y'' = y.$$

Vastaus: a) Yhtälö on separoituva:

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

saadaan muotoon

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int dx + C,$$

mikä puolestaan voidaan kirjoittaa

$$-\frac{1}{y} = x + C.$$

Sijoittamalla tähän $x = 1$ saadaan $-1 = 1 + C$, josta $C = -2$. Ratkaisuksi saadaan siis $y = \frac{1}{2-x}$.

b) Tavanomainen yrite $y = e^{kx}$ johtaa yhtälöön

$$k^2 = 1,$$

mistä $k = \pm 1$. Näin ollen ratkaisuja ovat $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$ ja näiden lineaarikombinaatiot, kuten esimerkiksi $y_3 = e^x + e^{-x}$.

4. a) Etsi kaksi vektoria \mathbf{x} ja \mathbf{y} , jotka ovat kohtisuorassa toisiaan sekä vektoria $\mathbf{z} = (3, 2, 2)$ kohtaan.

b) Etsi tasojen $T_1 : x + y - 2z = 1$ ja $T_2 : x - 2y + z = 2$ leikkaukselle parametriesitys.

Vastaus: a) Vektoriksi \mathbf{x} voidaan valita esim. $\mathbf{x} = (0, 1, -1)$. Tällöin vektoriksi \mathbf{y} kelpaa edellisten ristitulo $\mathbf{y} = \mathbf{z} \times \mathbf{x} = (-4, 3, 3)$.

b) Tasojen yhtälöiden muodostama pari

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

reduoituu Gaussin menetelmällä muotoon

$$\begin{cases} x - z = \frac{4}{3} \\ y - z = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Tästä nähdään, että $(x, y, z) = (z + \frac{4}{3}, z - \frac{1}{3}, z) = (z, z, z) + (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0) = z(1, 1, 1) + (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$. Tämä on kysytty parametrimuoto, parametrina toimii z .