

Diskreetti matematiikka II
Demonstraatio V, 16.2.2012

1. Onko Boolean algebrassa mahdollista, että

- (a) $x \leq a$ ja $x \leq a'$ ja $x \neq 0$?
- (b) Entä $x \not\leq a$ ja $x \not\leq a'$ ja $x \neq 1$?

Todista tai esitä vastaesimerkki!

2. Olkoon $M = \{2, 6, 10, 12, 30, 60\}$. Operaatioina joukossa M ovat syt ja pyj.

- (a) Voidaanko joukosta M valita nolla-alkio 0 ja ykkösalkio 1?
- (b) Miksi joukosta M ei operaatioiden pyj ja syt avulla ei saada Boolean algebraa? Piirrä Hassen kaavio!

3. Olkoon \mathcal{F}_n^* sellaisten n -paikkaisten totuusfunktioiden φ joukko, joille

$$\varphi(1, 1, \dots, 1) = 0.$$

Osoita, että $(\mathcal{F}_2^*, \vee, \wedge, \neg, \perp, 1)$ on Boolean algebra, kun 1 valitaan sopivasti. Montako alkioita joukossa \mathcal{F}_n^* on?

Lisätehtävä: Voidaan osoittaa, että \mathcal{F}_n^* on Boolean algebra kaikilla n . Mieti miten tästä seuraa, että jokainen Boolean algebra on isomorfinen jonkun "totuusalgebran" kanssa. Miksi tämä on hyvä uutinen paatuneille totuus-taulukojille?

4. Olkoot \mathcal{B} ja \mathcal{C} kaksi Boolean algebraa kuten Määritelmässä 3.16 ja $f: B \rightarrow C$ näiden Boolean algebroiden välinen isomorfismi.

Osoita, että jos $x \in B$ on Boolean algebran \mathcal{B} atomi, niin $f(x) \in C$ on Boolean algebran \mathcal{C} atomi.

5. Ns. **Fibonacciin sanat** f_n määritellään seuraavasti: $f_0 = 0$, $f_1 = 01$ ja $f_n = f_{n-1}f_{n-2}$, kun $n \geq 2$. Etsi Fibonacciin sana f_8 .

Osoita, että sanat 11 ja 000 eivät esiinny minkään Fibonacciin sanan f_n tekijänä.

6. Tarkastellaan aakkoston $\Sigma = \{a, b, c\}$ kieliä $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $K = \{a^m b^k c^m \mid m, k \in \mathbb{N}\}$ ja $M = \{c^t \mid t \in \mathbb{N}\}$. Määritä kielet $N = LM$, $L \cap K$, $N \cap K$ ja M^c .

7. Todista luentoministeen lause 4.15, ts. että kielille L ja K on voimassa seuraava väite:

Jos $L \subseteq K$, niin $L^* \subseteq K^*$.