ALGEBRA Dem. X 3.4. 2012

1 Olkoon G kertalukua pq oleva ryhmä, jonka keskus ei ole triviaali, eli $Z(G) \neq \{1\}$, missä $p, q \in \mathbb{P}$ (mahdollisesti $p = q$), ja

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa \text{ kaikilla } x \in G\}.$$

Osoita, että G on Abelin ryhmä.

2 Olkoon G äärellisesti generoitu Abelin ryhmä. Osoita, että sen kaikki minimaaliset generoijajoukot ovat äärellisiä. (Generoijajoukko on **minimaalinen**, jos sen mikään aito osajoukko ei generoi ryhmää.)

3 Olkoot $G_1, G_2, \ldots, G_n$ syklisiä ryhmiä (additiivisesti esitettyinä), missä $\#G_i = k_i$ kullakin i. Osoita, että (ulkoinen) suora summa $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ on syklinen jos ja vain jos $\mathrm{syt}(k_i, k_j) = 1$ aina kun $i \neq j$.

4 (Kiinalainen jäännösluokkalause) Olkoot $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ niin, että $\mathrm{syt}(n_i, n_j) = 1$ kun $i \neq j$. Merkitään $n = n_1 n_2 \cdots n_k$. Osoita, että seuraava isomorfia on voimassa:

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}\,.$$

5 (Cauchyn lause Abelin ryhmille) Jos alkuluku p jakaa Abelin ryhmän G kertaluvun, on olemassa alkio $x \in G$, jolle $\mathrm{ord}(x) = p$.
(**Ohje.** Induktio ja vastaoletus: minkään aidon aliryhmän kertaluku ei ole jaollinen alkuluvulla p. Olkoon $H < G$ suurinta kertalukua oleva aito aliryhmä. Valitaan $x \in G \setminus H$ ja $A = \langle x \rangle$. Tällöin $G = HA$. Tulokaava, Lagrange.)

6 Olkoon $(G, +)$ Abelin ryhmä, joka toteuttaa seuraavan **jaollisuusehdon**: kaikilla $a \in G$ ja $n \in \mathbb{N}$, on olemassa $b \in G$ siten että $a = nb$. Osoita, että ryhmällä G ei ole maksimaalisia aliryhmiä. (Aliryhmä H on **maksimaalinen**, jos $H \subset G$ aidosti, ja kaikille aliryhmille N, jos $H \subseteq N \subset G$, niin $H = N$.)