ALGEBRA Dem. XI 10.4. 2012

1 Kuinka monta kertalukua 108 olevaa Abelin ryhmää on olemassa (isomorfiaa vaille)?

2 Ryhmän G alkioiden x, y **kommutaattori** on $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Kommutaattorien generoima aliryhmä on G:n **derivaattaryhmä** tai **kommutaattoriryhmä** G' (s.92).
(a) Osoita, että $a[g, h]a^{-1}$ on kommutaattori kaikille $a \in G$ ja $g, h \in G$.
(b) Osoita, että G' on G:n normaali aliryhmä: $G' \trianglelefteq G$.

3 Todista seuraava **tulokaava** äärellisille ryhmille G. Olkoot $A, B \leq G$ aliryhmiä. Tällöin

$$|AB| = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}\,.$$

4 Olkoon G äärellinen ryhmä, ja $g \in G$, jolle $\mathrm{ord}(g) = km$, missä $\mathrm{syt}(k, m) = 1$. Osoita, että on yksikäsitteiset $x, y \in G$, joille $g = xy$, missä

$$xy = yx,\ \mathrm{ord}(x)|k \ \text{ ja } \ \mathrm{ord}(y)|m\,.$$

5 Olkoon G parillista kertalukua oleva äärellinen ryhmä. Osoita, että ryhmässä G on pariton määrä kertalukua 2 olevia alkioita. Erityisesti sellaisia on ainakin yksi.

6 Olkoon G äärellinen ryhmä.
(a) Osoita, että indeksi $[G : Z(G)]$ ei ole alkuluku, missä $Z(G)$ on keskus.
(b) Olkoon $|G| = p^2$. Osoita, että G on Abelin ryhmä.