ALGEBRA Dem. XII 24.4. 2012

HUOM. Tiistaina 17.4 luento 10-12 salissa MS-3

II VÄLIKOE Pe 27.4 kello 14:00-16:00 salissa XX

1 Todista seuraava Cayleyn lauseen yleistys: Olkoon G ryhmä ja $H \leq G$ sen jokin aliryhmä, jolle $[G : H] = n < \infty$. Tällöin on olemassa homomorfismi $\varphi\colon G \to S_n$, jolle $\mathrm{Ker}(\varphi)$ on suurin normaali aliryhmä, joka sisältyy ryhmään H.
Ohje. Määritellään $\tau_g\colon G/H \to G/H$ ehdosta $\tau_g(xH) = gxH$. Määrittele $\varphi\colon G \to S_{G/H}$ ehdosta $\varphi(g) = \tau_g$, missä $S_{G/H}$ on joukon G/H symmetriaryhmä, eli kaikkien permutaatioiden muodostama ryhmä.

2 Olkoon G yksinkertainen ryhmä ja $H \leq G$ niin, että $[G : H] = n < \infty$. Osoita, että on olemassa upotus $\varphi\colon G \to S_n$. (**Upotus** on injektiivinen homomorfismi.) Siten G on äärellinen.

3 Osoita, että jokaisella äärellisellä ryhmällä on kompositiosarja.

4 Olkoon G kertalukua 56 oleva ryhmä. Osoita, että sillä on (ainakin yksi) normaali Sylowin aliryhmä.

5 Olkoot p, q ja r eri alkulukuja. Osoita, että kertalukua pqr oleva ryhmä G ei ole yksinkertainen.

6 Osoita, että symmetrisellä ryhmällä S_5 on ainakin 6 kertalukua 5 olevaa aliryhmää.

7 Olkoot p ja q eri ryhmän G kertaluvun n alkulukutekijöitä, joille $k_p = 1$ ja $k_q = 1$. Osoita, että Sylowin p-aliryhmän P ja Sylowin q-aliryhmän Q alkiot kommutoivat keskenään.

8 Osoita, että kertalukua 175 olevalla ryhmällä on kertalukua 5 ja kertalukua 7 olevat normaalit aliryhmät.