ALGEBRA Dem. XII 24.4. 2012

HUOM. Tiistaina 17.4 luento 10-12

1 Todista seuraava Cayleyn lauseen yleistys: Olkoon G ryhmä ja $H \leq G$ sen jokin aliryhmä, jolle $[G : H] = n < \infty$. Tällöin on olemassa homomorfismi $\varphi\colon G \to S_n$, jolle $\mathrm{Ker}(\varphi)$ on suurin normaali aliryhmä, joka sisältyy ryhmään H.
Ohje. Määritellään $\tau_g\colon G/H \to G/H$ ehdosta $\tau_g(xH) = gxH$. Määrittele $\varphi\colon G \to S_{G/H}$ ehdosta $\varphi(g) = \tau_g$, missä $S_{G/H}$ on joukon G/H symmetriaryhmä, eli kaikkien permutaatioiden muodostama ryhmä.

Ratkaisu. Huomaa, että tässä sivuluokkien joukko G/H ei ole välttämättä ryhmä, jos H ei ole normaali aliryhmä.

Määritellään

$$\tau_g\colon G/H \to G/H \text{ ehdosta } \tau_g(xH) = gxH$$

Jos $g, h \in G$, niin

$$(\tau_g\tau_h)(xH) = \tau_g(hxH) = g(hxH) = (gh)xH\,,$$

joten $\tau_g\tau_h = \tau_{gh}$. Myös $\tau_g \in S_{G/H}$, sillä $\tau_g\tau_{g^{-1}} = \tau_{gg^{-1}} = \tau_{g^{-1}}\tau_g$. Määritellään sitten $\varphi\colon G \to S_{G/H}$ ehdosta $\varphi(g) = \tau_g$, jolloinka saadaan

$$\varphi(g)\varphi(h) = \tau_{gh} = \varphi(gh)\,,$$

ja niinpä φ on homomorfismi. Vielä, jos $g \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ eli $\varphi(g) = 1_{G/H}$, niin $\tau_g(xH) = xH$ kaikilla $x \in G$. Erityisesti tämä on voimassa kun $x = 1$, jolloin $gH = 1H = H$, eli $g \in H$. Siten $\mathrm{Ker}(\varphi) \leq H$.

Nyt $[G : H] = n = |G/H|$, ja siten $S_{G/H} \cong S_n$. Osoitetaan lopuksi, että $\mathrm{Ker}(\varphi)$ on suurin vaadittu normaali aliryhmä. Olkoon $N \trianglelefteq G$ niin, että $N \leq H$, ja olkoon $a \in N$ Tällöin, kun $x \in G$, niin $x^{-1}ax \in N$, ja siten $x^{-1}ax \in H$ eli $x^{-1}axH = H$ ja näin ollen $axH = xH$, ja $\tau_a(xH) = xH$. Niinpä τ_a on identiteettikuvaus eli $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ kuten vaadittua.

2 Olkoon G yksinkertainen ryhmä ja $H \leq G$ niin, että $[G : H] = n < \infty$. Osoita, että on olemassa upotus $\varphi\colon G \to S_n$. (**Upotus** on injektiivinen homomorfismi.) Siten G on äärellinen.

Ratkaisu. Edeltävän tehtävän mukaan on olemassa homomorfismi $\varphi\colon G \to S_n$, ja koskapa $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1\}$ normaalina aliryhmänä, on φ injektiivinen. Äärellisyys on välitön seuraus.

3 Osoita, että jokaisella äärellisellä ryhmällä on kompositiosarja.

Ratkaisu. Olkoon G pienin vastaesimerkki. Tällöin G ei ole yksinkertainen (muutoin $\{1\} \trianglelefteq G$ on kompositiosarja). Olkoon $H \trianglelefteq G$ maksimaalinen normaali aliryhmä (jolloin G/H on yksinkertainen). Nyt $|H| < |G|$ ja oletuksen nojalla ryhmällä H on kompositiosarja: $\{1\} \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_k = H$. Mutta $\{1\} \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_k \trianglelefteq G$ on ryhmän G kompositiosarja; ristiriita.

4 Olkoon G kertalukua 56 oleva ryhmä. Osoita, että sillä on (ainakin yksi) normaali Sylowin aliryhmä.

Ratkaisu. $56 = 2^3 \cdot 7$. Jos ryhmällä G ei ole normaalia Sylowin 7-ryhmää, sillä on 8 kappaletta Sylowin 7-ryhmiä, mutta näissä on yhteensä vain $8 \cdot (7-1) + 1 = 49$ alkiota (koska ne ovat syklisiä). Loput $7 + 1$ alkiota muodostavat yksikäsitteisen (ja siten normaalin) Sylow 2-ryhmän (ykkösalkion kanssa). – Eri alkuluvuille Sylowin aliryhmien leikkaus on aina triviaali.

5 Olkoot p, q ja r eri alkulukuja. Osoita, että kertalukua pqr oleva ryhmä G ei ole yksinkertainen.

Ratkaisu. Oletetaan, että $p < q < r$. Oletetaan, että G on yksinkertainen, jolloinka $k_p > 1$, $k_q > 1$ ja $k_r > 1$. Lisäksi $k_p | qr$ ja $k_p \equiv 1 \pmod{p}$, $k_q | pr$ ja $k_q \equiv 1 \pmod{q}$, $k_r | pq$ ja $k_r \equiv 1 \pmod{r}$. Koska $k_r > r > \max(p, q)$ (sillä r on suurin alkuluvuista, $k_r \equiv 1 \pmod{r}$ ja $k_r \neq 1$), niin $k_r = pq$. Myös $k_q \geq r$ (sillä $k_q > p$) ja $k_p \geq q$.

Kahdella Sylowin ryhmällä on triviaali leikkaus (kun niiden kertaluvut ovat alkulukuja; samoja tai eri alkulukuja). Siten

$$|G| \geq 1 + pq(r-1) + r(q-1) + q(p-1) = 1 + pqr + rq - r - q > pqr,$$

mikä on ristiriita.

6 Osoita, että symmetrisellä ryhmällä S_5 on ainakin 6 kertalukua 5 olevaa aliryhmää.

Ratkaisu. Nyt $|S_5| = 5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, joten Sylowin 5-aliryhmän kertaluku on $5 = 5^1$. Sylowin lauseen mukaan $k_5 = 1 + 5r \mid 24$, eli joko $k_5 = 1$ tai $k_5 = 6$. Kuitenkin $k_5 > 1$, sillä (12345) ja (21345) generoivat kaksi kertalukua 5 olevaa aliryhmää, joten $k_5 = 6$.

7 Olkoot p ja q eri ryhmän G kertaluvun n alkulukutekijöitä, joille $k_p = 1$ ja $k_q = 1$. Osoita, että Sylowin p-aliryhmän P ja Sylowin q-aliryhmän Q alkiot kommutoivat keskenään.

Ratkaisu. Nyt $P \trianglelefteq G$ ja $Q \trianglelefteq G$. Kun $a \in P$ ja $b \in Q$, niin

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1} = (aba^{-1})b^{-1} = a(ba^{-1}b^{-1}) \in P \cap Q\,.$$

Lagrangen lauseen nojalla $P \cap Q = \{1\}$, joten $ab = ba$.

8 Osoita, että kertalukua 175 olevalla ryhmällä on kertalukua 5 ja kertalukua 7 olevat normaalit aliryhmät.

Ratkaisu. Ensinnä Sylowin mukaan $k_7 = 1 + 7r \mid 5^2$ ja siis $k_7 = 1$, sillä $175 = 5^2 \cdot 7$. Nyt $P_7 \cong C_7$ on syklinen ja siten Abelin ryhmä, ja se on normaali aliryhmä, koska $k_7 = 1$.

Sylow: $k_5 = 1 + 5r \mid 7$ eli $k_5 = 1$. Nyt $|P_5| = 25$, ja tehtävän XII(3) mukaan P_5 on Abelin ryhmä (kertaluku muotoa p^2). Edeltävän tehtävän nojalla aliryhmien P_5 ja P_7 alkiot kommutoivat, ja siten G on Abelin ryhmä. Sillä on kertalukua 5 oleva alkio, ja aliryhmä C_5, joka on siis G:n normaali aliryhmä (Abelin takia).