ALGEBRA Dem. II 24.1 2012

1 Olkoon $\mathrm{End}(M) = \{h \mid h\colon M \to M \text{ on homomorfismi}\}$ Abelin ryhmän M **endomorfismien joukko**.

(a) Osoita, että $\mathrm{End}(M)$ on rengas operaatioihin $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ja $(fg)(x) = f(g(x))$ nähden.

(b) Olkoon R rengas, ja $\varphi\colon R \to \mathrm{End}(M)$ rengashomomorfismi. Merkitään $\varphi(a) = \varphi_a \in \mathrm{End}(M)$, kun $a \in R$. Osoita, että M on R-moduli, kun modulikertolasku määritellään oheisesti:

$$a \circ x = \varphi_a(x) \quad (a \in R,\, x \in M)\,.$$

2 Olkoon M R-moduli, missä R on rengas. Oletetaan, että N ja N' ovat sen alimoduleja siten, että myös $N \cup N'$ on alimoduli. Osoita, että $N \subseteq N'$ tai $N' \subseteq N$.

3 Sanotaan, että R-moduli M on **yksinkertainen**, jos $M \neq \{0\}$ ja sillä ei ole muita alimoduleja kuin $\{0\}$ ja M. Olkoot M ja M' yksinkertaisia R-moduleja ja $f\colon M \to M'$ R-homomorfismi, jolle $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$. Osoita, että f on R-isomorfismi.

4 Olkoon R **vinokunta** (eli *jakorengas*, joka on kuten kunta mutta ei välttämättä kommutatiivinen; katso Algebran PK II, s.29). Olkoon M jokin R-moduli ja $B \subseteq M$ sen maksimaalinen lineaarisesti riippumaton osajoukko. Osoita, että B on modulin M kanta.

Huom. Wedderburnin lause sanoo, että jokainen äärellinen vinokunta on kunta. Yleisestikin vinokuntien moduleilla on paljolti samat ominaisuudet kuin vektoriavaruuksilla.

5 (*Schurin lemma*) Olkoon M yksinkertainen R-moduli. Osoita, että $\mathrm{End}_R(M)$ on vinokunta: sen alkioilla on multiplikatiivinen käänteisalkio.

6 Olkoon M R-moduli. Osoita, että M on äärellisesti generoitu, jos sillä on alimoduli N siten, että N ja M/N ovat molemmat äärellisesti generoituja.

7 Olkoot T ja N R-modulin M alimoduleja siten, että $T \subseteq N$. Osoita, että

$$(M/T)/(N/T) \simeq M/N.$$

8 Olkoon M annettu R-moduli ja N sen alimoduli. Osoita, että $M = N \oplus K$ jollain alimodulilla K jos ja vain jos on olemassa R-homomorfismi $f\colon M \to N$, jolle $f(x) = x$ kaikilla $x \in N$.