ALGEBRA Dem. III 1.2 2010

1 Tarkastellaan kokonaisaluetta $D = \mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$. Etsi sen yksiköt, ja osoita, että alkio $\alpha = 1 + \sqrt{-7}$ on jaoton

2 Osoita, että Gaussin kokonaisluvun $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ normi on parillinen jos ja vain jos $1 + i$ jakaa luvun α. Erityisesti $1 - i$ on jaollinen luvulla $1 + i$.

3 Olkoon $p \in \mathbb{P}$ alkuluku. Osoita, että p on jaollinen Gaussin renkaassa $\mathbb{Z}[i]$ jos ja vain jos p on kahden neliön summa ($p = a^2 + b^2$, missä $a, b \in \mathbb{N}$).

Muistanette, että kommutatiivisen renkaan R ihanne I on **alkuihanne**, jos se toteuttaa ehdon: jos $ab \in I$ niin $a \in I$ tai $b \in I$ (tai molemmat). Kokonaisalue D on **pääihannealue** eli **PID**, jos sen kaikki ihanteet ovat pääihanteita: $I = \langle a \rangle$ jollain $a \in I$.

4 (a) Olkoon D PID, ja P sen epätriviaali alkuihanne. Osoita, että P on maksimaalinen ihanne (eli jos I on ihanne ja $P \subsetneq I$, niin $I = D$).

(b) Olkoon R kommutatiivinen rengas, jolle polynomirengas $R[x]$ on PID. Osoita, että R on kunta.

5 Olkoon $n > 1$ pariton kokonaisluku, jolle $p^2 \nmid n$ kun $p \in \mathbb{P}$. Osoita, että $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ ei ole UFD.

6 Todista Huomautus 2.2: *Jokainen Eukleideen alue on PID*.

7 Olkoon D PID. Osoita, että ihanne $I \neq 0$ on maksimaalinen jos ja vain jos $I = \langle p \rangle$ jollekin jaottomalle alkiolle p.

8 Olkoon D PID.
(a) Osoita, että jokainen jaoton alkio $p \in D$ on vahvasti jaoton eli alkualkio.
(b) Osoita, että D toteuttaa ihanteiden nousevan ketjuehdon eli jokainen ihanteiden jono $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ on äärellinen.
(c) Todista Huomautus 2.3: *Jokainen PID on UFD.*
Ohje. Olkoon B niiden alkioiden $a \neq 0$, $a \nsim 1$ joukko, joilla *ei ole esitystä jaottomien alkioiden tulona*. Osoita, että $B = \emptyset$ käyttäen kohtaa (b).