ALGEBRA Dem. IV 9.2 2012

7

1 Olkoon K kunta. Olkoon R niiden polynomien $f(x) \in K[x]$ joukko, joiden lineaarinen kerroin on nolla ($f(x) = a_0 + a_2x^2 + \cdots$). Osoita, että R on rengas, mutta se ei ole UFD.

2 (a) Olkoon $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polynomi, missä $a_n, a_0 \neq 0$. Osoita, että jos sillä on rationaalinen nollakohta a, niin $a = k/m$, missä $k|a_0$ ja $m|a_n$.

(b) Osoita, että jos a on pääpolynomin $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ nollakohta, niin $a \in \mathbb{Z}$.

3 Tarkastele seuraavien polynomien jaollisuutta renkaassa $\mathbb{Q}[x]$.
(a) $f(x) = x^6 + 30x^5 - 15x^3 + 6x - 120$
(b) $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 3$

4 Osoita, että polynomi $f(x) = x^5 - kx - 1 \in \mathbb{Z}[x]$ on jaoton kun $k \neq -1, 0, 2$.

5 Olkoon $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ reaalikertoiminen polynomi. Osoita, että jos $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ on sen nollakohta, niin samoin on sen kompleksikonjugaatti $\bar{\alpha} = a - bi$.

6 Tarkastellaan polynomirengasta $R = \mathbb{Z}[x]$. Osoita, että $I = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(0) = 0\}$ on renkaan R alkuihanne, joka ei ole maksimaalinen ihanne.

7 Todista paljon käytetty kriteeri: Olkoon K kunta. Tällöin $f(x) \in K[x]$ on jaoton jos ja vain jos $f(x + a)$ on jaoton kullakin $a \in K$.

8 (a) Olkoon $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, missä alkuluku p ei jaa johtavaa kerrointa a_n. Osoita, että jos polynomi $f(x)$ on jaoton yli kunnan $\mathbb{Z}_p$, niin se on jaoton yli kunnan $\mathbb{Q}$.

(b) Olkoon $f(x) = x^4 + x^3 - x + 1$. Onko se jaoton renkaassa (i) $\mathbb{Z}_2[x]$, (ii) $\mathbb{Z}_3[x]$, (iii) $\mathbb{Z}[X]$.

Esim. Polynomi $f(x) = 7x^3 + 12x^2 + 3x + 45$ on jaoton yli kunnan $\mathbb{Q}$, sillä kun sitä tarkastellaan yli kunnan $\mathbb{Z}_2$, saadaan $g(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, joka on jaoton.