ALGEBRA Dem. V 14.2. 2012

1 Olkoon K kunta, jossa on vähintään 3 alkiota. Osoita, että $\sum_{a \in K} a = 0$.

2 (a) Kuuluuko $\sqrt{2}$ kuntaan $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$?
(b) Onko $\mathbb{Q}(i\sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i)$?

3 Todista esimerkin 4.1.1 toteamus: $[L : K] = 1 \iff L = K$.

4 (Artinin lemma) Olkoot $f_1, f_2, \ldots, f_m \colon G \to K^*$ eri homomorfismeja ryhmältä G kunnan K multiplikatiiviseen ryhmään $H = K \setminus \{0\}$. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H$. Osoita, että on olemassa $g \in G$, jolle $a_1 f_1(g) + \cdots + a_m f_m(g) \neq 0$.

5 Määrää alkion $\alpha = i + \sqrt{2}$ minimaalipolynomi yli kunnan $\mathbb{Q}$.

6 Olkoon L/K algebrallinen kuntalaajennus, ja R kunnan L alirengas, jolle $K \subseteq R$. Osoita, että R on kunta.