13.3.

ALGEBRA Dem. VII ~~6.3.~~ 2012

1 Olkoot L/F ja F/K normaaleja kuntalaajennuksia. Onko laajennus L/K välttämättä normaali? (**Ohje.** $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.)

2 Onko seuraava kuntalaajennus normaali?
(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})/\mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})/\mathbb{Q}$ (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt[7]{5})/\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})$.

3 Olkoon $K = \mathbb{F}_3(i)$. Etsi polynomin $f(x) = x^3 + x + 1$ nollakohdat kunnassa K.

4 Etsi kunnan $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ kaikki automorfismit, eli isomorfismit $K \to K$.

5 Etsi toisen asteen jaoton pääpolynomi $f(x) \in \mathbb{F}_3[x]$. Esitä kunnan $\mathbb{F}_9$ alkiot sen avulla.

6 Olkoon $K = \mathbb{F}_{p^n}$ äärellinen kunta, jonka karakteristika p on pariton alkuluku. (**Neliöllinen** alkio on muotoa a^2.)

(a) Osoita, että kunnan K neliölliset alkiot ovat: 0 ja parilliset potenssit α^{2k}, missä α on kunnan K primitiivinen alkio.

(b) Osoita, että kunnassa K on kaksi neliöllistä alkiota a ja b, joiden summa ei ole neliö.