ALGEBRA Dem. VIII 20.3. 2012

1 Olkoon $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ astetta m oleva jaoton polynomi.
(a) Osoita, että $f(\alpha) = 0$ jollain $\alpha \in \mathbb{F}_{q^m}$.
(b) Osoita (tarkasti), että polynomin $f(x)$ nollakohdat ovat $\alpha, \alpha^q, \alpha^{q^2}, \ldots, \alpha^{q^{m-1}} \in \mathbb{F}_{q^m}$ ja että ne ovat yksinkertaiset . (Vertaa lauseeseen 6.2.)

2 Todista tarkemmin esimerkin 6.2.3 väite:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q) = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{m-1}\}, \text{ missä } \tau_i(\alpha) = \alpha^{q^i}.$$

3 Etsi polynomin $f(x) = x^5 - 2$ hajoamiskunnan Galois'n ryhmän kertaluku yli kunnan $\mathbb{Q}$.

4 Etsi polynomin $f(x) = x^4 - 1$ (hajoamiskunnan) Galois'n ryhmä yli kunnan $\mathbb{F}_7$.

5 Olkoon K kunta, joka sisältää polynomin $x^n - 1$ nollakohdat. Olkoot $a \in K^*$ ja $L = K_f$ polynomin $f(x) = x^n - a \in K[x]$ hajoamiskunta. Osoita, että $G(L/K)$ on Abelin ryhmä.

6 Olkoon $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$. Osoita, että K on kunnan $\mathbb{Q}$ Galois'n laajennus, ja että sen Galois'n ryhmä on isomorfinen suoran tulon $C_2 \times C_2 \times C_2$ kanssa.