GEOMETRIA (5 op)

Tero Harju

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Turun Yliopisto harju@utu.fi

http://users.utu.fi/harju/ → geometria

Harjoitustehtävät ja esitykset (pdf)
+ muuta kurssiin liittyvää aineistoa.

Ilmoittaudu: Opsu

"Geometrian kurssi on olennainen tuleville koulunopettajille."
Committee on the Undergraduate Program in Mathematics
2015 (U.S.A.)

"Pythagoras keksi kolmion. Ilman häntä ei olisi mitään keinoa biljardin aloittamiseen." Philomena Cunk / Diane Morgan

TASOGEOMETRIA

Geometrinen todistus on puhtaan päättelyn malli.

Todistuksen merkitystä painotetaan!
Päättely on tärkeää.

Lähestymistapa:

Havainnollinen geometrinen päättely.

- Ei laskennollisia apuneuvoja analyysistä tai lineaarialgebrasta ($\rightsquigarrow$ analyyttinen geometria).
- Vältellään raja-arvolaskentaa, trigonometriaa, ja jopa vektorilaskentaa.

TÄHTÄIN

- Suunniteltu opettajiksi aikoville.
  Kattaa toki laajemman alueen, ja saa kelvata muillekin.
- Geometristen käsitteiden hahmotus yhdistettynä *probleemanratkaisuun*:

  hahmota, ratkaise, todista

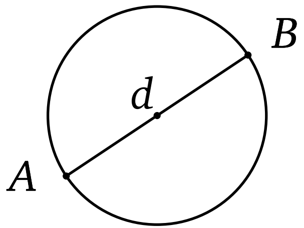
- Johdatus moderniin geometriaan
  - transformaatiot eli liike tasossa (a'la Felix Klein)
  - diskreetti geometria (→ algoritmit)

Euklidinen taso on
ainutlaatuinen!

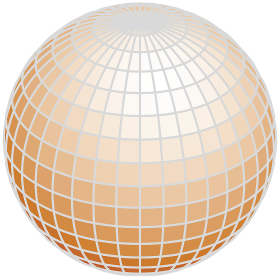
Ympyrän piirin pituuden C suhde
halkaisijan pituuteen d

$$\frac{C}{d} = \pi \quad (= 3,14159\ldots)$$

on *vakio*, eli riippumaton ympyrästä.



Epäeuklidisissa geometrioissa, kuten pallon
pinta, tätä vakiota ei ole:
suhde C/d riippuu ympyrästä!



TÄSSÄPÄ PULMA!

Vakio π esiintyy lukuisissa kaavoissa, joilla ei liene suoraa yhteyttä tasogeometriaan.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots \qquad \text{(Leibniz/Gregory)}$$

$$\pi = \sqrt{6\,\zeta(2)} \qquad (\zeta \text{ on Riemannin zeta-funktio})$$

$$\pi = \int_0^1 \frac{16(x-1)}{x^4 - 2x^3 + 4x - 4} dx$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \qquad \text{(Heisenberg)}$$

ON SE MUUTENKIN OUTOA!

Paralleelipostulaatti (Lause 1.2)

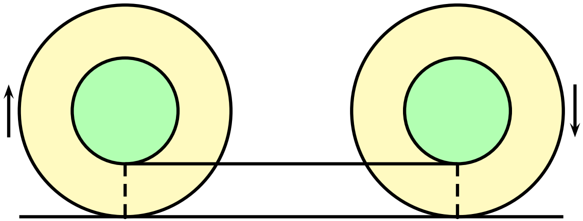
> Pisteen P kautta kulkee tarkalleen yksi annetun suoran suuntainen suora.

Ekvivalentti:

> On olemassa yhdenmuotoiset kolmiot, jotka eivät ole yhtenevät.

ESIMERKKI: KÄYRÄN PITUUS?

Aristoteles (384-322 eaa): *käyrän pituutta ei voi verrata janan pituuteen.* Ajatus oli vallalla vielä 1600-luvulla.



$2\pi r$

- Pienen ympyrän piirin pituus on sama kuin suuren?
- Mitä on käyrän pituus? Tai kuvion ala?

KÄYRÄN PITUUS, KUVION ALA, ...

- Ympyrän $x^2 + y^2 = r^2$ ala:

$$\iint_{x^2+y^2 \le r} 1 \, dxdy = \int_0^r \int_0^{2\pi} s \, d\theta ds = \int_0^r 2\pi s \, ds = \pi r^2$$

- Todistus a'la Arkhimedes (287-212 eaa): π on vakio. Vaatii raja-arvon käsitteen (ja yhdenmuotoisuuden).
- Arkhimedes ymmärsi että lausekkeissa $2\pi r$ ja πr^2 on sama vakio π.

KURSSIN RAKENNE JA YHTEYDET

1. Lähtökohdat $\leftrightsquigarrow$ aksiomatiikka (logiikka)

2-3. Klassinen geometria: pohjautuu kolmioihin

$$\text{kolmiot} \;\mapsto\; \text{monikulmiot} \;\rightsquigarrow\; \text{käyrät}$$

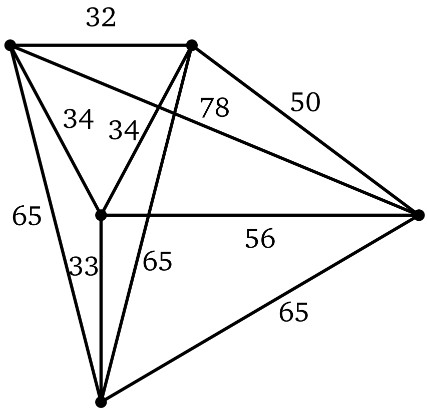
$\rightsquigarrow$ laskennollinen geometria
$\rightsquigarrow$ diskreetti geometria
$\rightsquigarrow$ graafiteoria ja topologia

4-5. Liike tasossa: moderni lähestymistapa

$\rightsquigarrow$ tietokonegrafiikka
$\rightsquigarrow$ ryhmäteoria ja matriisilaskenta
$\rightsquigarrow$ kristallografinen symmetria

VIIHTEELLINEN DISKREETTI ESIMERKKI

$\mathscr{P}$ pistejoukko: pisteiden etäisyydet ovat kokonaislukuja ja mitkään 3 pistettä eivät ole samalla suoralla.



Anning & Erdös (1945) / Harborth (1970):

$\mathscr{P}$ on aina äärellinen.

On olemassa 6-pisteinen $\mathscr{P}$

Onko olemassa ratkaisua, jossa on 7 pistettä?

Kreisel & Kurz (2007): No, on!

Suurin pisteiden välinen etäisyys:
22 270!

‘Viihdyttävä’ tarkoittaa matematiikassa,
että viikon päästä alkaa mennä hermot.

LYHYESTI AKSIOMATIIKASTA

Eukleides (300 eaa):

- 5 aksioomaa
- 5 peruskäsitettä, joita ei määritellä.

1. Kahta pistettä yhdistää aina yksikäsitteinen jana.
2. Janaa voidaan jatkaa kumpaakin suuntaan.
3. On olemassa yksikäsitteinen ympyrä, kun säde ja keskipiste ovat annettuina.
4. Suorat kulmat ovat keskenään yhtenevät.
5. Paralleeliaksiooma.

JOTAIN JÄI PAITSI

- Vielä renessanssin ajalla matematiikan kieli oli kuvailevaa.

  "Jos yhtä suurista vähennetään yhtä suuret, niin jäännökset ovat yhtä suuret."

- Matemaattiset notaatiot $(=, +, -, <, \ldots)$: Thomas Harriot 1560–1621

MODERNIT AKSIOMATIIKAT

- Hilbert (1899): 20 aksioomaa ja 6 käsitettä.
  Toisen kertaluvun logiikkaa.

- Tarski (1929): 11 aksioomaa ja vain 2 käsitettä.
  Ensimmäisen kertaluvun logiikkaa, mutta
  geometrian kannalta vaikeaa.

- Birkhoff (1932): metrinen geometria.
  Palauttaa käsittelyn (reaali)topologiaan.

- Bachmann (1959): ryhmäteoreettinen lähestyminen.
  Kuvaukset $\longrightarrow$ liike tasossa.

TÄSSÄ KURSSISSA:

Koulugeometria eroaa aksiomaattisesta vain olettamalla peruskäsitteiden merkityksen.

Intuitio ei saa korvata päättelyä!

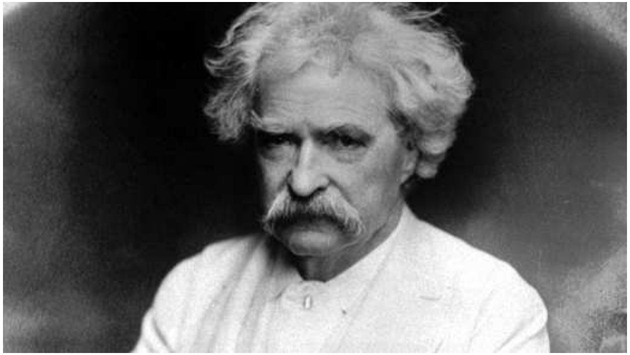
Jos se on ihme,
mikä tahansa vastaus riittää,
mutta jos se on fakta,
tarvitaan todistus.

– Mark Twain

Jos se on ihme,
mikä tahansa vastaus riittää,
mutta jos se on fakta,
tarvitaan todistus.

– Mark Twain

Tällä kurssilla ei saa vedota ihmeeseen!

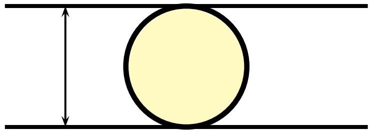


ESIMERKKI: kannet

Miksi katukaivojen kannet ovat ympyräisiä?
Mikseivät ole neliöitä tai kolmioita?

Onko muita kuvioita, jotka eivät tee kipeää,
eli eivät 'putoa itsensä läpi'?

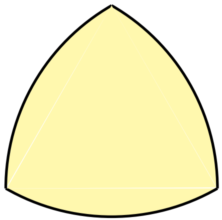
Ympyrällä on vakioleveys

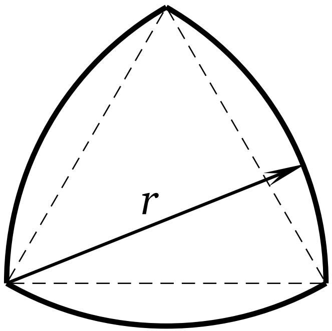


Ympyrä pyörii tasaisesti yhdensuuntaisten suorien välissä:
sivuamispisteiden etäisyys on vakio.

REULEAUX’N KOLMIO ON VAIHTOEHTO

Saadaan tasasivuisesta kolmiosta piirtämällä ympyränkaaret kärkipisteistä.





$r =$ sivun pituus

- Reuleaux’n kolmiolla on vakioleveys.
- Wankel moottori käyttää tätä muotoa.
- Sen avulla voidaan porata liki neliömäisiä reikiä – (U.S. Patentti 4074778)

Blaschke – Lebesgue:

Tiettyä vakioleveyttä olevista konvekseista käyristä

- ympyrä sulkee suurimman alueen
- Reuleaux'n kolmio pienimmän alueen.