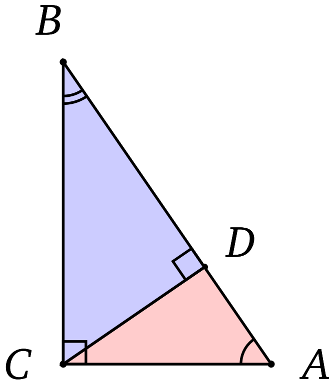
LAUSE 2.15: PYTHAGORAS

Olkoon $\triangle ABC$ suorakulmainen, $\angle C = 90^o$. Tällöin

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$



Olkoon CD korkeusjana ($D = H_C$).

$$\triangle ACD \overset{\text{KK}}{\sim} \triangle ABC \overset{\text{KK}}{\sim} \triangle CBD.$$

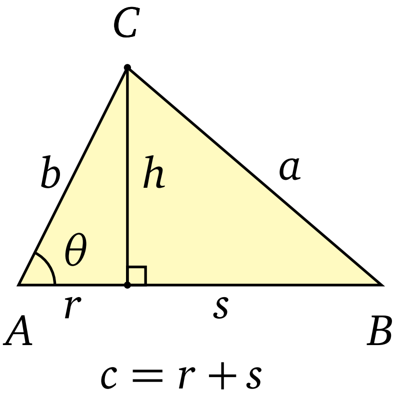
Siis

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \quad \text{ja} \quad \frac{DB}{CB} = \frac{CB}{AB}.$$

Siten

$$AB = AD + DB = \frac{AC^2 + CB^2}{AB}. \quad \square$$

SEURAUS: KOSINISÄÄNTÖ



$$b^2 - r^2 = h^2 = a^2 - s^2$$

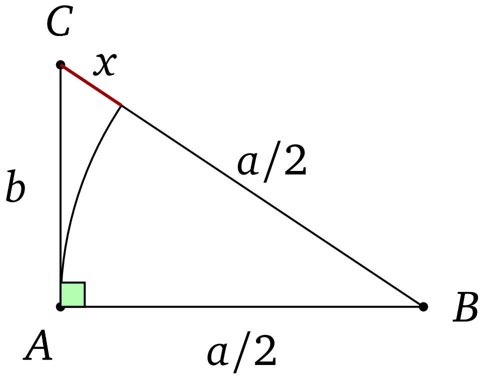
Siis $a^2 = b^2 + c^2 - 2rc$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta}$$

missä $\cos\theta = r/b$.

RENÉ DESCARTES (1596-1650) JA TOISEN ASTEEN YHTÄLÖIDEN RATKAISUT

$$x^2 + ax - b^2 = 0 \quad (a > 0)$$



$$(x + a/2)^2 = (a/2)^2 + b^2$$

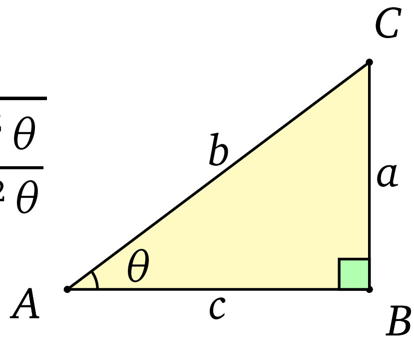
eli

$$x^2 + ax - b^2 = 0$$

TRIGONOMETRIAA

Trigonometrian avulla: Ensinnä $\cos\theta = c/b$ ja siten

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = \sqrt{1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}}$$



Korottamalla toiseen saadaan Pythagoraan kaava.

Tarvitaan vain

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

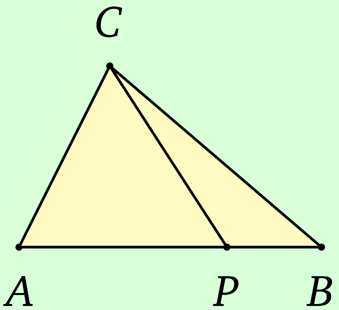
LAUSE 2.16: Pythagoraan lause kääntäen

Tämä jää harjoitukseksi: Palautuu Pythagoraan lauseeseen.

Jos kolmiossa $\triangle ABC$ on $AB^2 = AC^2 + BC^2$, niin $\angle C = 90^o$.

MATTHEW STEWART (1746) – LAUSE 2.17

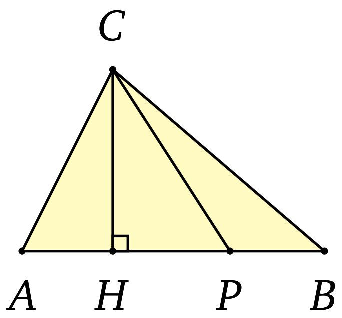
“Some General Theorems of Considerable Use
in the Higher Parts of Mathematics"



$$
\begin{aligned}
&CA^2 \cdot BP + \\
&CB^2 \cdot PA + \\
&CP^2 \cdot AB + \\
&AB \cdot BP \cdot PA \\
&= 0
\end{aligned}
$$

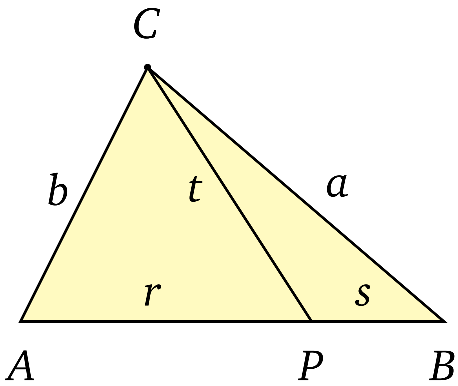
Harjoitustehtävä: Tulos pätee kun $C \in \ell(A, B)$.

TODISTUS



$$
\begin{array}{cll}
 & CA^2 \cdot BP + CB^2 \cdot PA + CP^2 \cdot AB + AB \cdot BP \cdot PA = & \\
 & AH^2 \cdot BP & + \quad HC^2 \cdot BP \\
+ & BH^2 \cdot PA & + \quad HC^2 \cdot PA \\
+ & PH^2 \cdot AB & + \quad HC^2 \cdot AB \\
+ & AB \cdot BP \cdot PA & \\
= & 0 & + \quad 0
\end{array}
$$

TOISIN ILMAISTUNA

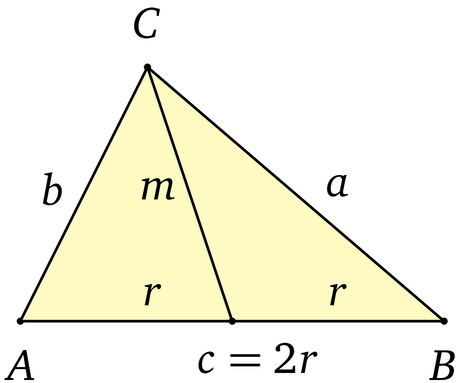


$$c = r + s \; (= AB)$$

$$\boxed{c(t^2 + rs) = sa^2 + rb^2}$$

ESIMERKKI 2.7: MEDIAANIN PITUUS

$$m = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2}$$



ESIMERKKI 2.8: KULMANPUOLITTAJAN PITUUS

$$p = \sqrt{ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)}$$

Tätä varten kulmanpuolittajalause kertoo suhteen $r/s = b/a$. Koska vielä $r+s=c$, niin jolloin r ja s voidaan lausua sivujen pituuksien avulla.

ESIMERKKI: KORKEUSJANAN PITUUS

Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen.
Todettiin kosinisäännön yhteydessä, että

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2rc$$
$$\text{eli } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma.$$

Siis suorakulmaisessa tapauksessa

$$\boxed{r = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \quad \text{ja} \quad s = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}}$$

Korkeusjanan pituus saadaan sivujen pituuksien avulla Stewartin kaavasta.

Hurjahkon laskemisen jälkeen

$$\boxed{h = \frac{1}{c}\sqrt{4p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

missä

$$p = (a+b+c)/2.$$

Tästä saadaan Heronin kaava (katso: kolmion ala).