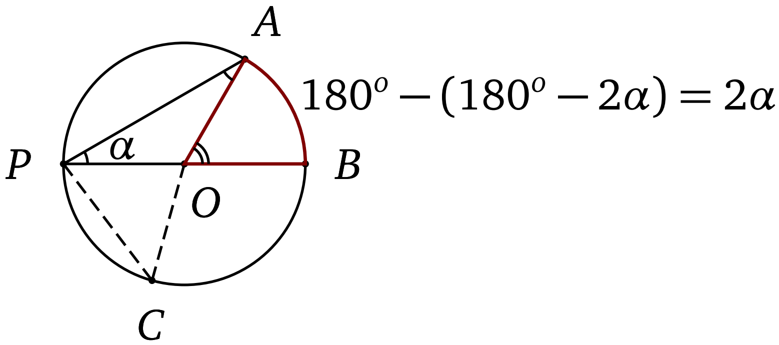
KONSYKLISYYS

LAUSE 2.18

Ympyrän kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta.

Todistus. (1) Oletetaan ensin, että kehäkulman $\alpha = \angle BPA$ toinen kylki halkaisija PB, jolloin $\triangle OAP$ on tasakylkinen.



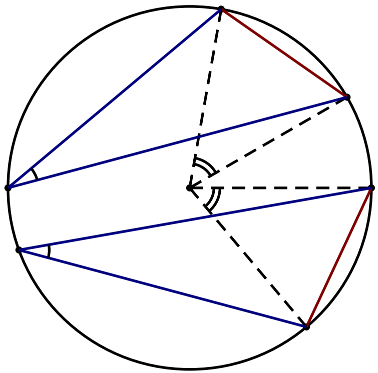
(2) Kehäkulma $\angle CPA$ voidaan esittää kahden apukulman summana (tai erotuksena), missä halkaisija on apukulman kylki. $\square$

LAUSE 2.19

Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.

Itseasiassa

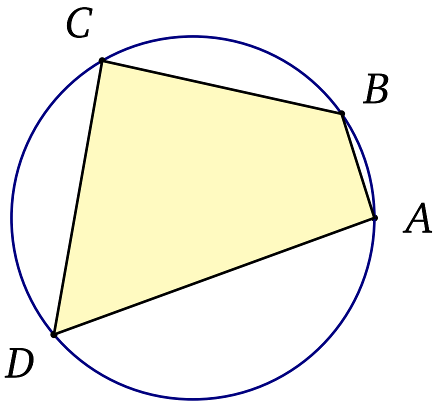
Samanpituisia kaaria vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.



Keskuskulmat ovat yhtä suuret (SSS) + Lause 2.18

YMPÄRI PIIRRETTY YMPYRÄ - KONSYKLISYYS

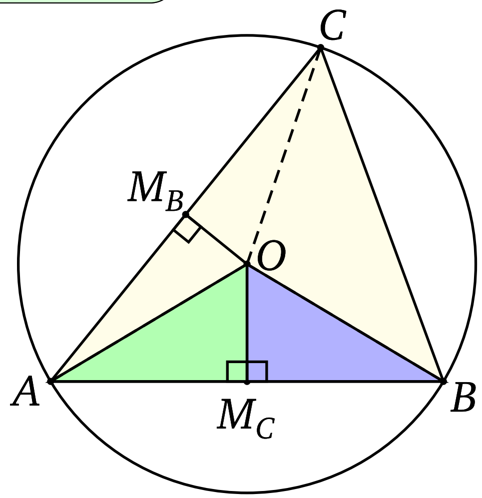
- Jos ympyrä ω kulkee monikulmion Γ kärkipisteiden kautta, on se monikulmion Γ ympäri piirretty ympyrä.
- Tällöin $\Gamma = \Diamond P_1 P_2 \ldots P_n$ on konsyklinen.
  Merkitään $\omega(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.



LAUSE 2.20

Jokainen kolmio $\triangle ABC$ on konsyklinen.

Todistus. Olkoon O sivujen AB ja AC keskinormaalien leikkauspiste.



Tällöin $\triangle AM_CO \overset{SKS}{\cong} \triangle BM_CO$. Siis $OA = OB$.

Samoin $OA = OC$, joten myös $OC = OB$.

Siis $\omega(O, OA) = \omega(A, B, C)$.

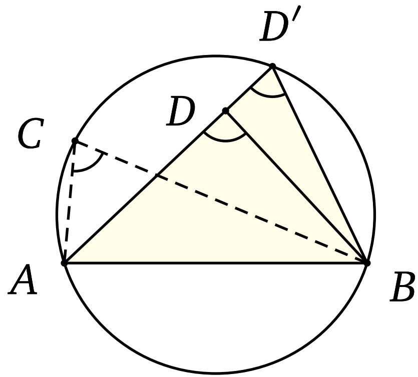
$\square$

Ympyrän $\omega(A, B, C)$ keskipiste O on sivujen keskinormaalien leikkauspiste.

Pienti aputulos: LAUSE 2.21

Olkoot pisteet C ja D samalla puolen suoraa $\ell(A,B)$. Tällöin $\angle ACB = \angle ADB$ jos ja vain jos $D \in \omega(A,B,C)$.

Todistus. Olkoon $D' \in \omega(A,B,C)$ suoralla $\ell(A,D)$. Lause 1.10(2): $D = D'$, josta väite seuraa, sillä D' ja C vastaavat samaa kaarta AB. $\square$



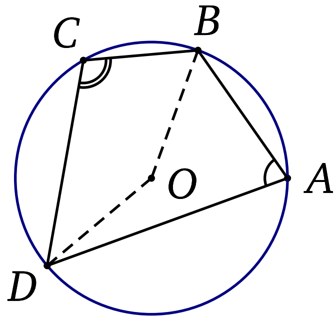
Tämä on nyt selvä – **LAUSE 2.22**:

Ympyrän kehän piste näkee halkaisijan 90 asteen kulmassa.

LAUSE 2.23

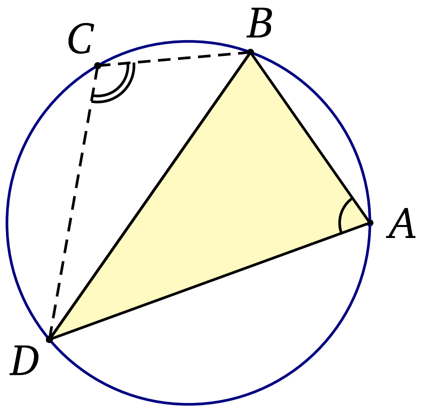
Nelikulmio $\Diamond ABCD$ on konsyklinen jos ja vain jos vastakkaisten kulmien summa on 180^o.

Todistus. Nelikulmion kulmien summa on 360^o. (Jaa kahteen kolmioon.) Täten $\angle A + \angle C = 180^o \iff \angle B + \angle D = 180^o$.



($\Rightarrow$) Kehä- ja keskuskulmia koskevan tuoksen mukaan $\angle A + \angle C = 180^o$.

(⇐) Piirretään ympyrä $\omega(A,B,D)$. Tällöin jänne BD näkyy vastakkaiselta kaarelta kulmassa $180^o - \angle A = \angle C$.
Lauseen 2.21 mukaan myös C on kaarella. □



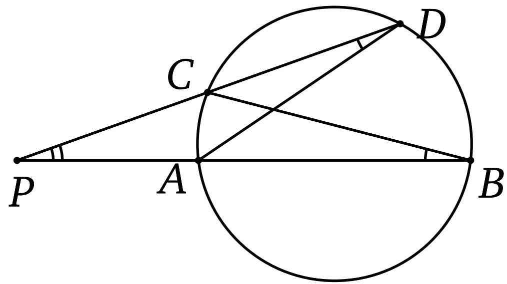
PISTEEN POTENSSI: LAUSE 2.24

Olkoot ω ympyrä sekä $\ell(P,A,B)$ ja $\ell(P,C,D)$ suoria, missä $A,B,C,D \in \omega$. Tällöin

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD\,.$$

Vakio $PA \cdot PB$ on pisteen P potenssi ympyrän ω suhteen.

Todistus. Tässä $\triangle APD \overset{KK}{\sim} \triangle CPB$. $\square$

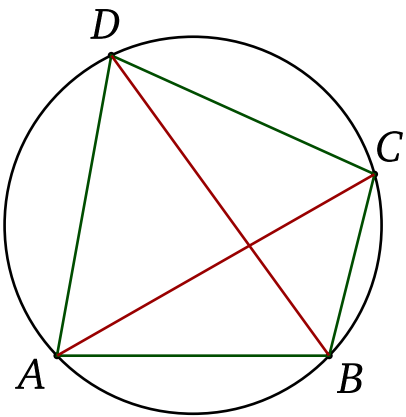


Huomattakoon, että jos E on tangenttipiste (eli $E = C = D$ ja $\ell(P,E) \perp \ell(O,E)$), niin tulos on yhä voimassa. Niinpä pisteen potenssi on PE^2.

PTOLEMAIOS: LAUSE 2.24

Jos $\Diamond ABCD$ on konsyklinen nelikulmio, niin

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD\,.$$



TODISTUS

Etsitään $E \in BD$ niin, että $\angle DAE = \angle CAB$.

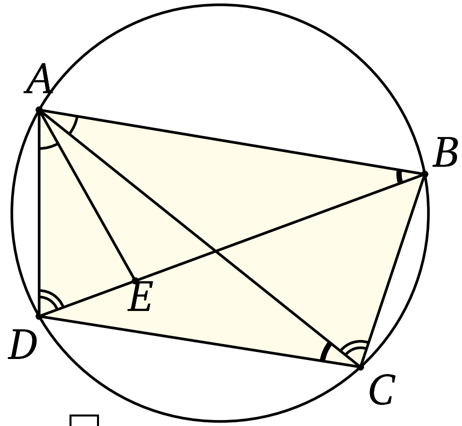
Tällöin $\triangle DAE \sim \triangle CAB$ ja $\triangle ADC \sim \triangle AEB$.

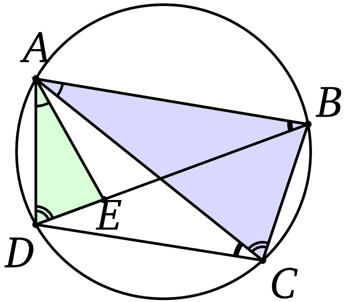
Siis

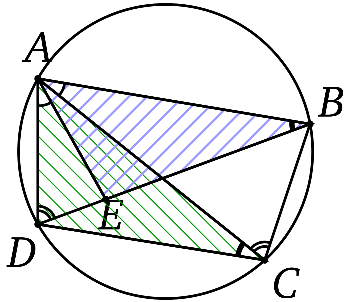
$$\frac{AD}{CA} = \frac{ED}{BC} \quad \text{ja} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DC}.$$

Yhdistämällä nämä saadaan väite,

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot (BE + ED) = AC \cdot BD. \qquad \square$$







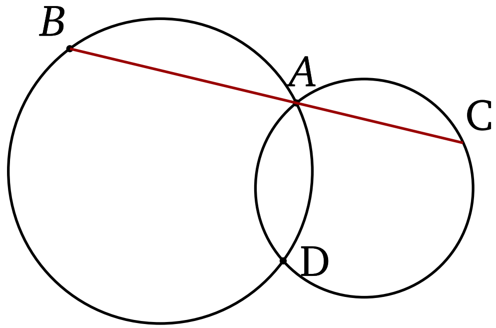
ESIMERKKI

Olkoot ω_1 ja ω_2 kaksi leikkaavaa ympyrää:

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A, D\}.$$

Miten piste $B \in \omega_1$ kaarelta AD tulee valita, jotta janan BC pituus olisi suurin?

(C on suoralla $\ell(B, A)$ ja ympyrällä ω_2.)

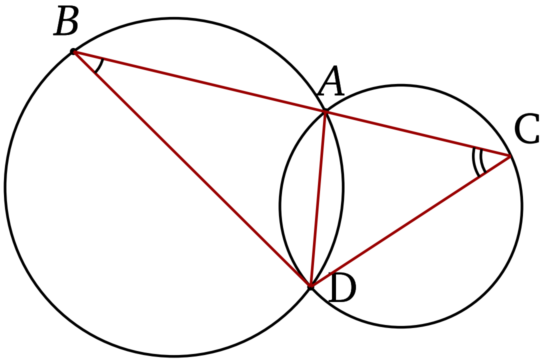


RATKAISU

Kulma $\angle B$ (samoin $\angle C$) on riippumaton pisteen B valinnasta, koska ne kaikki aukeavat samaan kaareen.

Siten kolmiot $\triangle BDC$ ovat kaikki yhdenmuotoisia keskenään.

Niinpä BC on pisin kun BD on pisin:



BD on ympyrän halkaisija.