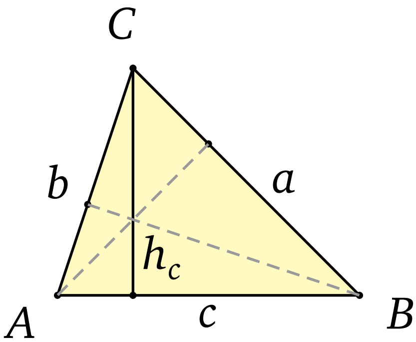
MONIKULMIOIDEN ALOISTA

Kun $\Delta = \triangle ABC$, merkitään

$$h_a = AH_A$$
$$h_b = BH_B$$
$$h_c = CH_C$$



- Alat ovat yleisesti vaikeita: mitallisuus.
- Monikulmioiden ala palautuu kolmioiden aloihin:

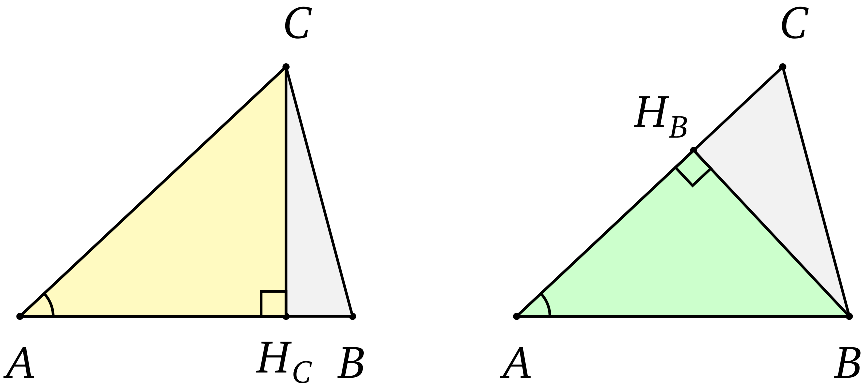
$$\boxed{\text{ala}(\Delta) = \frac{1}{2} a h_a}$$

Tämä on riippumatonta kärkikulman valinnasta.

TODISTUS: Lause 3.8

$$ah_a = bh_b = ch_c$$

$$\triangle AH_C C \overset{(KK)}{\sim} \triangle AH_B B$$



Siis:

$$\frac{AC}{CH_C} = \frac{AB}{BH_B} \qquad \text{eli} \qquad bh_b = ah_a$$

ESIMERKKI 3.5

Jos $\Delta \sim \Delta'$ ja

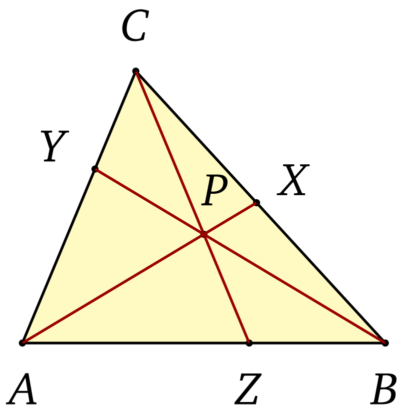
$$\lambda = \frac{AB}{A'B'}$$

niin $\boxed{\mathrm{ala}(\Delta) = \lambda^2 \mathrm{ala}(\Delta)}$

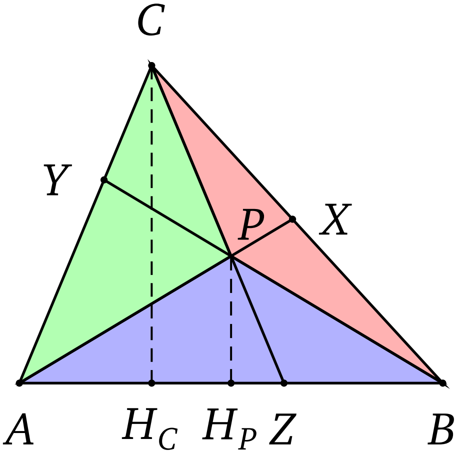
ESIMERKKI 3.6

Olkoon P kolmion $\Delta = \triangle ABC$ sisäpiste, ja X, Y, Z sivuilla kuten kuvassa. Tällöin

$$\frac{PX}{AX} + \frac{PY}{BY} + \frac{PZ}{CZ} = 1$$



TODISTUS



$$\begin{aligned}\text{ala}(\Delta) = {} & \text{ala}(\triangle ABP) \\ & + \text{ala}(\triangle ACP) \\ & + \text{ala}(\triangle BCP)\end{aligned}$$

missä

$$\frac{\text{ala}(\triangle ABP)}{\text{ala}(\Delta)} = \frac{PH_P}{CH_C} = \frac{PZ}{CZ}$$

ja samoin muut.

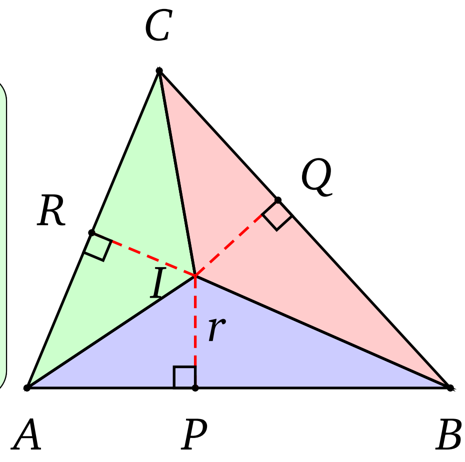
$$1 = \frac{\text{ala}(\Delta)}{\text{ala}(\Delta)} = \frac{\text{ala}(\triangle ABP)}{\text{ala}(\Delta)} + \frac{\text{ala}(\triangle ACP)}{\text{ala}(\Delta)} + \frac{\text{ala}(\triangle BCP)}{\text{ala}(\Delta)}$$

$$= \frac{PZ}{CZ} + \frac{PY}{BY} + \frac{PX}{AX}$$

UUSI ESIMERKKI (1)

Olkoon r kolmion Δ sisään piirretyn ympyrän säde, ja a, b, c sen sivujen pituudet. Tällöin

$$\text{ala}(\Delta) = \frac{r(a+b+c)}{2}$$



Sillä

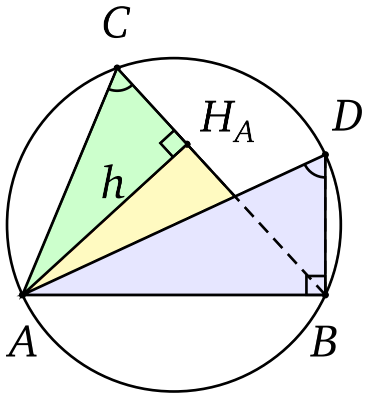
$$\begin{aligned}\text{ala}(\Delta) &= \text{ala}(\triangle AIC) + \text{ala}(\triangle BIC) + \text{ala}(\triangle AIB) \\ &= \frac{1}{2}AC \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}AB \cdot r = rp\end{aligned}$$

missä $p = (a+b+c)/2$ on puolet piirin pituudesta.

UUSI ESIMERKKI (2)

Olkoon R kolmion Δ ympäri piirretyn ympyrän säde, ja a, b, c sen sivujen pituudet. Silloin

$$\text{ala}(\Delta) = \frac{abc}{4R}$$



Olkoon AD kolmion $\Delta = \triangle ABC$ ympäri piirretyn ympyrän halkaisija. Tässä $\triangle AH_AC \sim \triangle ABD$ (KK) ja siten

$$\frac{AH_A}{AC} = \frac{AB}{AD} \quad \text{eli} \quad h = \frac{bc}{2R}$$

Siis

$$\text{ala}(\Delta) = \frac{1}{2}ah = \frac{abc}{4R}$$

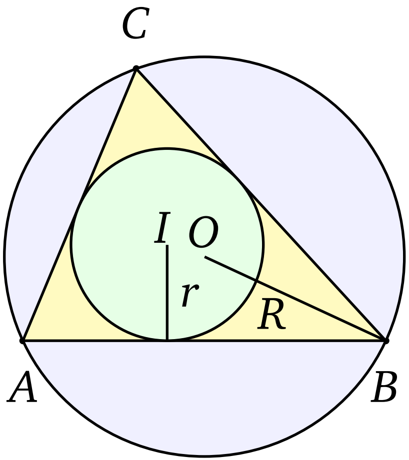
SEURAUS

Kun edelliset tulokset yhdistetään

$$\text{ala}(\Delta) = \frac{abc}{4R} = \frac{r(a+b+c)}{2}$$

yhdistetään, saadaan vaikuttava tulos

$$\boxed{\frac{abc}{a+b+c} = 2rR}$$



LAUSE 3.9: Heronin kaava

Olkoon $p = (a+b+c)/2$ puolet piirin pituudesta. Tällöin

$$\mathrm{ala}(\Delta) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Todistus jää harjoitukseksi.