YHTEISOSITETTAVUUS

Monikulmion Γ ositus on äärellinen monikulmioiden joukko $\mathscr{A}$, joka peittää Γ:n ilman päällekkäisyyksiä (sivupisteitä lukuunottamatta):

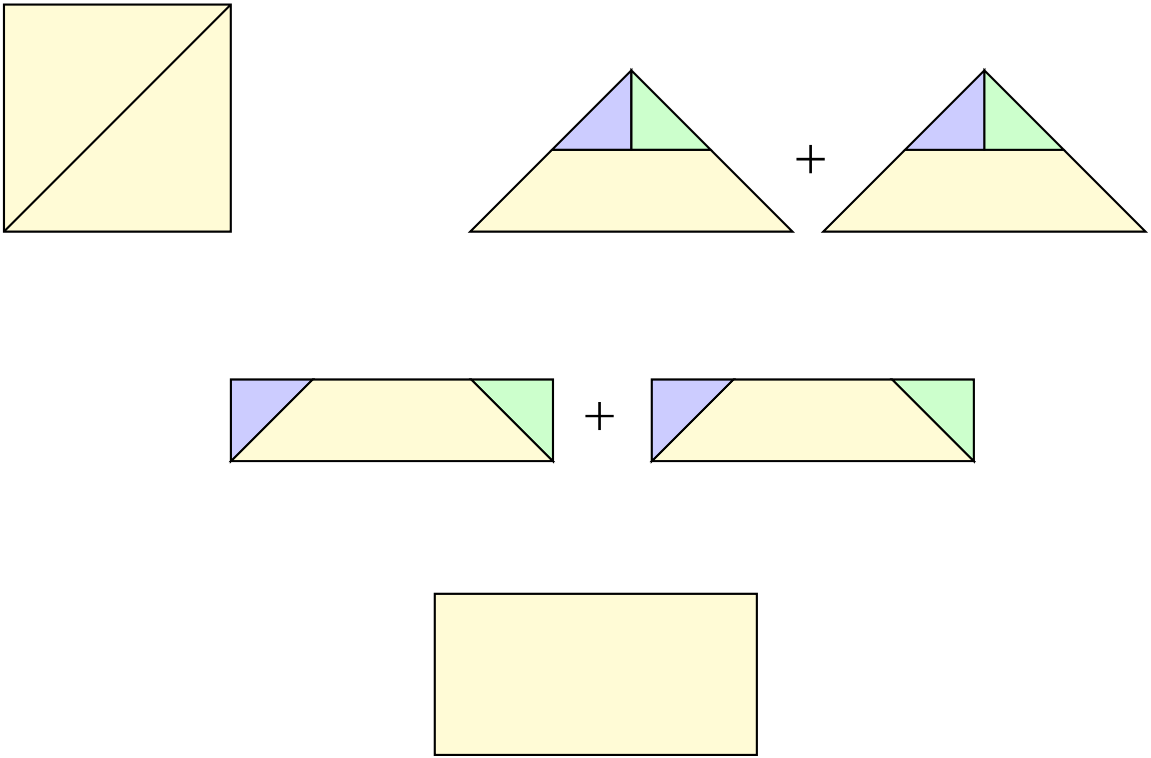
$$\mathscr{A} \curvearrowright \Gamma$$

Monikulmiot Γ_1 ja Γ_2 ovat yhteisositettavissa, jos niillä on sama ositus $\mathscr{A}$

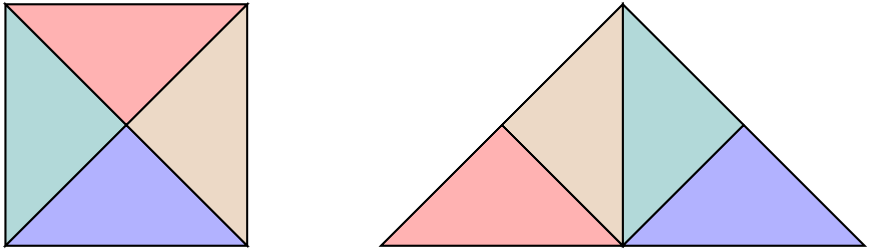
$$\Gamma_1 \curvearrowleft \mathscr{A} \curvearrowright \Gamma_2$$

Siis Γ_1 voidaan leikata osiin ja koota uudelleen monikulmioksi Γ_2.

ESIMERKKI 1



ESIMERKKI 2



LAUSE 3.10: Wallace-Bolyai-Gerwien

$$\boxed{\mathrm{ala}(\Gamma_1) = \mathrm{ala}(\Gamma_2) \quad \Longrightarrow \quad \Gamma_1 \curvearrowleft\!\curvearrowright \Gamma_2}$$

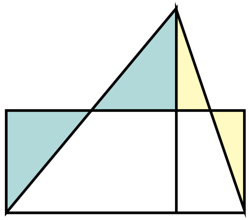
- Osoitetaan, että jokainen Γ on yhteisositettavissa suorakulmion Γ' kanssa, jonka korkeus on 1.
- Väite seuraa, koska jos $\mathrm{ala}(\Gamma_1) = \mathrm{ala}(\Gamma_2)$, niin $\Gamma_1' \cong \Gamma_2'$.

AJATUS

- Osita Γ lävistäjien avulla kolmioihin

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$$

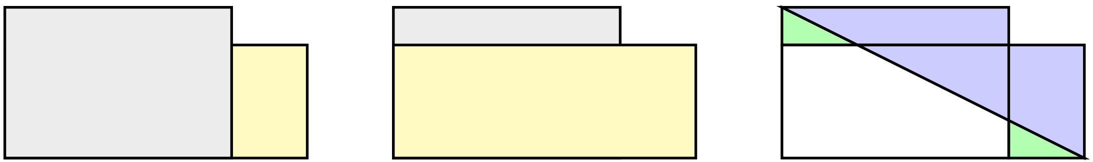
- Jokainen Δ_i ositetaan neljään osaan, ja koota uudelleen suorakulmioksi Γ_i kuten kuvassa.



SUORAKULMIOT

Olkoon sitten kaksi sama-alaista suorakulmiota, joiden korkeudet ovat a ja b, missä $b < a \leq 2b$.

Asetetaan nämä suorakulmiot kuten kuvassa. Todetaan, että ne ovat yhteisositettavissa.



- Toistamalla saadaan suorakulmio Γ_i', jonka korkeus on 1 ja $\Gamma_i \curvearrowleft\!\!\curvearrowright \Gamma_i'$.
- Γ ositettu kolmioiksi $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, ja ne suorakulmioiksi $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ ja ne suorakulmioiksi $\Gamma_1', \ldots, \Gamma_n'$ joiden korkeudet ovat 1.
- Liimataan $\Gamma_1', \ldots, \Gamma_n'$ nauhaksi:
  Saadaan yksi suorakulmio Γ', jonka korkeus on 1, eli

$$\Gamma \curvearrowleft\!\!\curvearrowright \Gamma' =$$ 

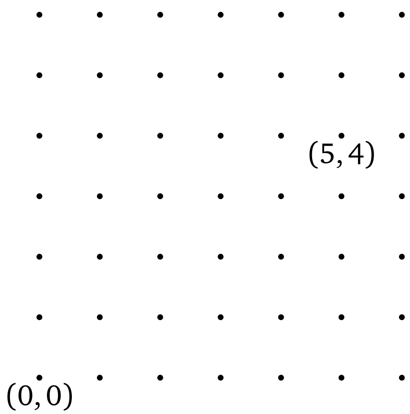
LAUSE 3.11: Monsky (1970)

Neliötä ei voida osittaa sama-alaisiin kolmioihin, joita on pariton lukumäärä.

Todistus on *poikkeuksellisen mukava*,
osin lukuteoreettinen: p-adiset luvut.

PICK JA HILAPISTEET

Konstruoidaan tasoon suorakulmainen koordinaatisto yksikköjanan avulla, jolloin pisteet voidaan esittää pareina $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eli hilapisteinä, missä r on x-koordinaatti ja s on y-koordinaatti.



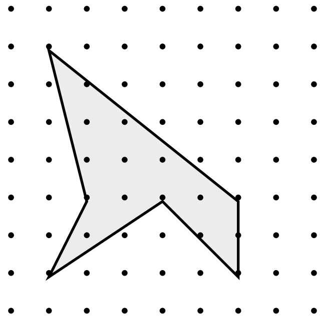
LAUSE 3.12: Pick (1899)

Olkoon Γ monikulmio, jonka kärkipisteet ovat hilapisteitä. Tällöin

$$\mathrm{ala}(\Gamma) = \frac{1}{2}p + q - 1,$$

missä

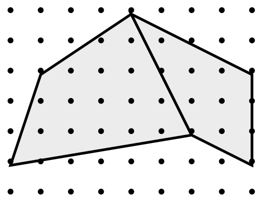
- p on sivuilla olevien hilapisteiden lukumäärä.
- q on sisällä olevien hilapisteiden lukumäärä.



$p = 8$
$q = 9$
ala 12

AJATUS

- Jos Pick on voimassa monikulmioille Γ_1 ja Γ_2, joilla on yhteinen sivu, pitää se paikkansa näiden yhdelmälle Γ.

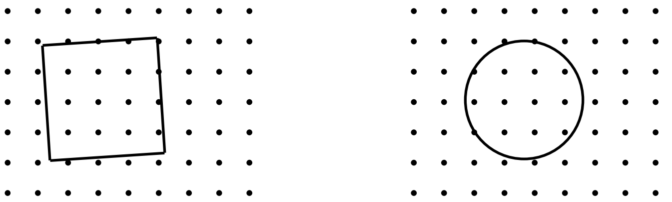


- Jokainen monikulmio voidaan jakaa kolmioihin, joten tapaukset palautuvat kolmioihin.
- Loppu on tapausanalyysiä.

Pickin lauseen mukaan primitiivisen kolmion, joilla ei ole sisäisiä hilapisteitä, ala on 1/2 (!).

Browkin ja Steinhaus:

- Kullekin $n \in \mathbb{N}$ on olemassa neliö, jonka sisällä on tarkalleen n hilapistettä.



- Kullekin $n \in \mathbb{N}$ on olemassa ympyrä, jonka sisällä on tarkalleen n hilapistettä.
- Schinzelin tulos on yllättävä:
  Kullekin $n \in \mathbb{N}$ on olemassa ympyrä, jonka kehällä on tarkalleen n hilapistettä.

PEITOT: Jung (1901)

- Olkoot $\mathscr{P} = \{P_1, P_2 \ldots, P_n\}$ tason pistejoukko ja

$$d = \max\{ P_iP_j \;:\; 0 \leq i, j \leq n \}$$

sen halkaisija.

- Ympyrä $\omega = \omega(O, r)$ peittää joukon $\mathscr{P}$, jos jokainen P_i on ω:n sisäpiste (tai kehäpiste).

- Pienintä peittävän ympyrän sädettä kutsutaan joukon $\mathscr{P}$ peittosäteeksi.

LAUSE: Jung (1901)

Olkoon d äärellisen pistejoukon $\mathscr{P}$ halkaisija, ja r sen peittosäde. Tällöin

$$\frac{1}{2}d \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{3}d\,.$$

Tätä ylärajaa ei voida parantaa:
jos $\mathscr{P}$ koostuu tasasivuisen kolmion kärkipisteistä, niin edeltävään epäyhtälöön saadaan yhtäsuuruus.