FAGNANON LAUSE 4.22

Seuraavassa $a = \ell(B, C)$, $b = \ell(A, C)$ ja $c = \ell(A, B)$. Lauseen 4.21 mukaan sivusuorien suhteen otettujen peilausten yhdiste

$$\alpha = \rho_c \rho_b \rho_a$$

on siirtopeilaus.

Tarkastellaan teräväkulmaista $\Delta = \triangle ABC$.

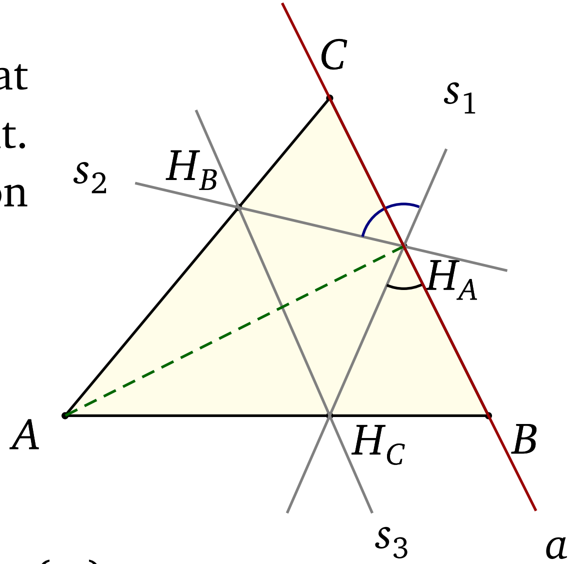
Siirtopeilauksen $\alpha = \rho_c \rho_b \rho_a$ akselina on ortokolmion Δ_O sivu ja sen pituus on kolmion Δ_O piirin pituus.

TODISTUS

Olkoot $s_1 = \ell(H_A, H_C)$, $s_2 = \ell(H_A, H_B)$, $s_3 = \ell(H_B, H_C)$ ortokolmion Δ_O sivusuorat.

Esimerkki 3.3: kolmion Δ korkeusjanat ovat ortokolmion Δ_O kulmien puolittajat. Siis $\angle H_C H_A B = \angle C H_A H_B$, jolloin sivu a on suorien s_1 ja s_2 kulmanpuolittaja. Siis

$$\rho_a(s_1) = s_2.$$



Samoin $\rho_b(s_2) = s_3$ ja $\rho_c(s_3) = s_1$.
Siis

$$\alpha(s_1) = \rho_c \rho_b \rho_a(s_1) = \rho_c \rho_b(s_2) = \rho_c(s_3) = s_1$$

ja sivusuora s_1 on siirtopeilauksen akseli.

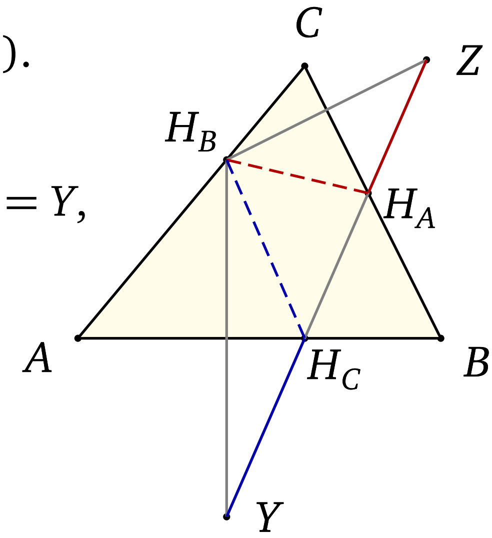
PITUUS

Merkitään $Z = \rho_a(H_B)$ (se on akselilla s_1).
Tällöin $H_B = \rho_a(Z)$ ja $\rho_b(H_B) = H_B$:

$$\alpha(Z) = \rho_c\rho_b\rho_a(Z) = \rho_c\rho_b(H_B) = \rho_c(H_B) = Y,$$

missä $Y \in s_1$ (koska α kuvaa akselinsa itselleen).

Nythän siirtopeilauksen α pituus ZY on ortokolmion piirin pituus.



PIIRI: LAUSE 4.23

Kolmio $\triangle DEF$ on kolmion $\triangle ABC$ sisäkolmio, jos sen kärjet ovat kolmion $\Delta = \triangle ABC$ eri sivuilla.

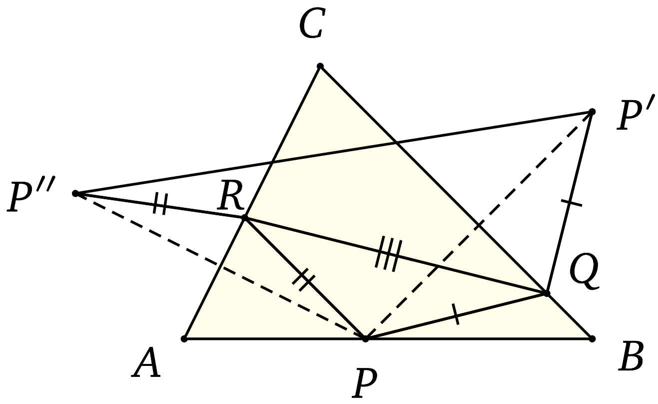
Ortokolmiolla Δ_O on pienin piiri teräväkulmaisen kolmion Δ sisäkolmioista.

TODISTUS

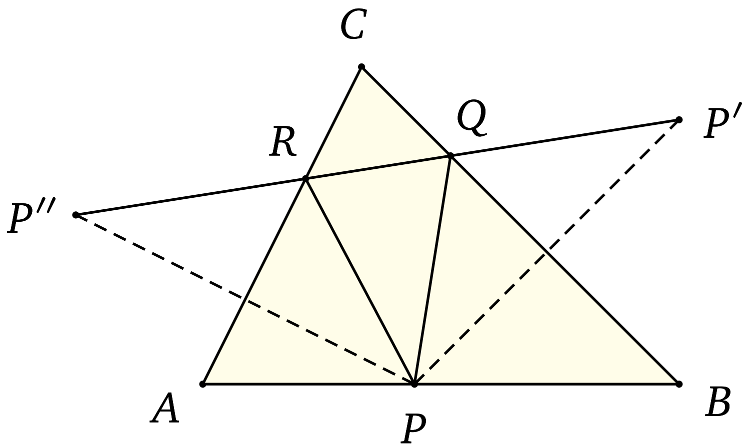
1. Ajatellaan ensin, että piste P on kiinnitetty sivulta AB. Merkitään

$$P' = P^{\rho_a} \quad \text{ja} \quad P'' = P^{\rho_b}.$$

Tällöin $PQ = QP'$ ja $RP = RP''$. Kolmion $\triangle PQR$ piirin pituus on reitin $P'QRP''$ pituus.
Tämä on pienin kun P', Q, R, P'' ovat kollineaariset, ja reitin pituus on $P'P''$.

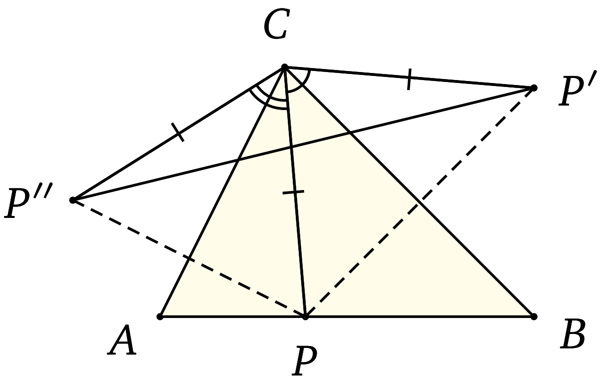


SIIS KUN P on KIINNITETTY



2. PISTEEN P PAIKKA

Koska $C^{\rho_a} = C$ ja $C^{\rho_b} = C$, niin $CP' = CP = CP''$.
Siten CA puolittaa kulman $\angle P''CP$ ja CB kulman $\angle PCP'$.
Siis $\angle P''CP' = 2 \cdot \angle C$ on pisteestä P riippumaton vakio.



Janan $P'P''$ pituus on pienimmillään kun $CP' = CP''$ on pienin, eli kun CP on lyhin, eli kun CP on korkeusjana: $P = H_C$.

Samoin täytyy olla, että sisäkolmion muutkin kärjet ovat korkeusjanojen kantapisteitä.