PUOLIRYHMÄT Dem. II 23.3. 2017

$\boxed{1}$ Osoita, että puoliryhmän $(\mathbb{N}_+, +)$ jokainen alipuoliryhmä on äärellisesti generoitu.

Ratkaisu. Olkoon n puoliryhmän S pienin alkio, ja

$$s_i = \min\{k \mid k \equiv i \bmod n\} \quad \text{(jos olemassa)}.$$

Tällöin $\{s_1, \dots, s_{n-1}, n\}$ generoi puoliryhmän S: kun $s \in S$, niin $s \equiv s_i \bmod n$ jollain $i \leq n$ ja siten $s = s_i + kn$ jollain $k \geq 0$.

$\boxed{2}$ Puoliryhmä S on **periodinen**, jos kaikilla $x \in S$ syklinen alipuoliryhmä $[x]_S$ on äärellinen. Osoita, että

$$S = \{\alpha \in T_{\mathbb{N}} \mid \text{kuvajoukko } \alpha(\mathbb{N}) \text{ on äärellinen}\}$$

on *ääretön* periodinen puoliryhmä.

Ratkaisu. Selvästi S on ääretön puoliryhmä.

Kun $\alpha \in S$, niin $\mathbb{N} \supseteq \alpha(\mathbb{N}) \supseteq \alpha^2(\mathbb{N}) \supseteq \dots$ Siten on olemassa potenssi n, jolla $\alpha^{n+1}(\mathbb{N}) = \alpha^n(\mathbb{N})$, koska kuvajoukot ovat äärellisiä. Siis α on bijektio joukossa $\alpha^n(\mathbb{N})$.
Tarkastellaan sitten yhdisteitä α^k. Nämä ovat luonnollisesti äärellisen joukon $\alpha^n(\mathbb{N})$ bijektioita, joten on olemassa $k \geq 2$, jolle $\alpha^k = \alpha$ joukossa $\alpha^n(\mathbb{N})$. Nyt kaikilla $m \geq n$,

$$\alpha^{m+k} = \alpha^m \alpha^k = \alpha^m \alpha = \alpha^{m+1}$$

ja siten $|\alpha]_S$ on äärellinen.

$\boxed{3}$ Osoita, että puoliryhmän idempotentit eivät välttämättä muodosta alipuoliryhmää.

Ratkaisu. Puoliryhmässä T_3,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

missä vasemman puolen kuvaukset ovat idempotentteja mutta niiden yhdiste ei ole.

$\boxed{4}$ Olkoon T_n joukon $X = \{1, 2, \dots, n\} (n \geq 2)$ täysi transformaatiopuoliryhmä, ja olkoon $A \subseteq T_n$ sen jokin generoijajoukko: $[A] = T_n$. Osoita väitteet (a)–(c).

(a) Joukossa A olevat permutaatiot generoivat symmetrisen ryhmän S_X (eli kaikki joukon X permutaatiot).

(b) Joukossa A on alkio α, jonka kuvajoukko toteuttaa ehdon $|\alpha(X)| = n - 1$.

Ratkaisu. (a) Jos $\alpha, \beta \in T_n$, niin

$$|\beta\alpha(X)| \leq \min\{|\alpha(X)|, |\beta(X)|\}. \qquad (*)$$

Siis jotta kaikki permutaatiot saadaan generoiduksi, tarvitaan permutaatioiden ($\alpha(X) = X$) generoijajoukko.

(b) Permutaatioiden yhdisteet ovat permutaatioita, ja T_n sisältää kuvauksen, jolle $|\alpha(X)| = n-1$. Sen generoimiseen tarvitaan samankokoinen kuvaus epäyhtälön (*) mukaan.

$\boxed{5}$ Olkoon $I_X \leq T_X$ kaikkien *injektiivisten* kuvausten $X \to X$ muodostama puoliryhmä. Osoita, että puoliryhmällä S on uskollinen esitys $\varphi : S \hookrightarrow I_X$ jollain X jos ja vain jos S on vasemmalta supistuva ja E_S on tyhjä tai koostuu S:n ykkösalkiosta.

Ratkaisu. ($\Rightarrow$) Olkoon $\varphi : S \to I_X$ upotus. Jos on olemassa $e \in E_S$, niin $\varphi(e) \in E_{I_X}$ ja välttämättä $\varphi(e) = \iota$. Tällöin e on ykkösalkio:

$$\varphi(ex) = \varphi(e)\varphi(x) = \varphi(x) \implies ex = x \text{ ja samoin } xe = x\,.$$

Merkitään $\varphi(z) = \varphi_z \in I_X$ kaikille $z \in S$. Oletetaan, että $xa = xb$, missä $a, b, x \in S$. Nyt kaikilla $y \in X$,

$$\begin{aligned}
&\varphi_{xa}(y) = \varphi_{xb}(y) \\
\implies\ &\varphi_x\varphi_a(y) = \varphi_x\varphi_b(y) \\
\implies\ &\varphi_x(\varphi_a(y)) = \varphi_x(\varphi_b(y)) \\
\implies\ &\varphi_a(y) = \varphi_b(y) \qquad \text{(injektiivisyys)} \\
\implies\ &\varphi_a = \varphi_b \qquad \text{(koska kaikilla } y\text{)} \\
\implies\ &a = b \qquad \text{(uskollisuus).}
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Määritellään φ kuten monisteessa: $\varphi_a(x) = ax$. Riittää osoittaa injektiivisyys. Oletetaan, että $\varphi_a(x) = \varphi_a(y)$ kun $x, y \in S^1$.

(1) Jos $x, y \in S$, niin $ax = ay$, joten supistamisen avulla, $x = y$.

(2) Jos $x = 1$ ja $y \in S$, niin $a = ay$ ja siten $ay^2 = ay$ ja supistamisen avulla saadaan $y^2 = y$, joten $y \in E_S$, js siten $y = 1$.

$\boxed{6}$ Olkoon $\delta \subseteq S \times S$ ekvivalenssirelaatio puoliryhmässä S. Osoita, että

$$\delta^\flat = \{(x, y) \mid \forall u, v \in S^1 : \ (uxv, uyv) \in \delta\}$$

on suurin kongruenssi, jolle $\delta^\flat \subseteq \delta$.

Ratkaisu. (1) $\delta^\flat$ on kongruenssi : selvä.

(2) $\delta^\flat \subseteq \delta$: $(x, y) = (1 \cdot x \cdot 1, 1 \cdot y \cdot 1)$.

(3) Suurin: Oletetaan että $\rho \subseteq \delta$, missä $\rho \in \mathrm{Con}(S)$. Nyt

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \rho &\implies \forall u, v \in S^1 : \ (uxv, uyv) \in \rho \\
&\implies \forall u, v \in S^1 : \ (uxv, uyv) \in \delta \implies (x, y) \in \delta^\flat.
\end{aligned}$$