PUOLIRYHMÄT Dem. VI 20.4. 2017

1 Olkoon S säännöllinen puoliryhmä. Osoita, että se on käänteispuoliryhmä jos ja vain jos jokaisella $e \in E_S$ on yksikäsitteinen käänteisalkio.

Ratkaisu. Toiseen suuntaan tulos on triviaali.

Oletetaan, että

$$a = axa = aya$$
$$x = xax \text{ ja } y = yay$$

Nyt $ax \in E_S$ ja $ax = ayax = ax(ay)ax$. Samoin $ay \in E_S$ ja $ay = axay = ay(ax)ay$. Näistä saadaan, että $ax = ay$.

Samoin saadaan $xa = xy$, ja vielä $y = yay = xax = x$. Siis $x = y$.

2 Olkoon S käänteispuoliryhmä. Osoita

$$e, f \in E_S \implies Se \cap Sf = Sef\ .$$

Ratkaisu. Ensinnä $x \in Se \iff x = xe$ (sillä $x = ye = yee = xe$). Siis

$$x \in Se \cap Sf \implies xe = xf \implies x = xef \in Sef\ .$$

Toisinpäin, koska S on käänteinen, $Sef = Sfe$, missä $Sef \subseteq Sf$ ja $Sfe \subseteq Se$.

3 Olkoon S käänteispuoliryhmä. Osoita, että $x \leq y \implies x = ye$ jollain $e \in E_S$.

Ratkaisu. Ensinnäkin $yey^{-1} \in E_S$, sillä idempotentit kommutoivat: $yey^{-1}yey^{-1} = yy^{-1}yeey^{-1} = yey^{-1}$.

Jos $x \leq y$, niin on $f \in E_S$, jolla $x = fy$. Nyt $x = fyy^{-1}y = yy^{-1}fy$, missä $y^{-1}fy \in E_S$.

4 Puoliryhmän S osajoukko U on **unitaarinen**, jos

$$u, ux \in U \implies x \in U \qquad \text{ja} \qquad u, xu \in U \implies x \in U\ .$$

Edelleen, S on E-**unitaarinen**, jos E_S on unitaarinen. Osoita, että S on E-unitaarinen jos ja vain jos kaikilla $x \in S$ ja $e \in E_S$,

$$xe = e \implies x \in E_S.$$

Ratkaisu. Toiseen suuntaan asia on selvä.

Oletetaan sitten, että oikeanpuoleinen ehto on voimassa. Olkoot $x, xe \in E_S$ ja merkitään $f = exe$, jolloinka $f \in E_S$. Vielä, koska S on käänteinen ja siten idempotentit kommutoivat,

$$xf = xexe = xe = xee = exe = f\ ,$$

ja siten $xf = f \in E_S$. Ehdon mukaan $x \in E_S$.

Samoin $e, ex \in E$ implikoi, että $x \in E_S$.

$\boxed{5}$ Olkoon x käänteispuoliryhmän S alkio. Määritellään kuvaus δ_x ehdosta

$$\delta_x(e) = x^{-1}ex$$

kaikille $e \in E_S$. Osoita, että δ_x on isomorfismi $E_S xx^{-1} \to E_S x^{-1}x$.

Ratkaisu. Olkoon $e \in Exx^{-1}$. Kuvaus δ on oikein määritelty:

$$\delta_x(e) = x^{-1}ex = x^{-1}ex \cdot x^{-1}x \in E_S x^{-1}x\,.$$

Injektiivisyys: Olkoon $e \in E_S xx^{-1}$, ja $g \in E_S : e = gxx^{-1}$. Myös $exx^{-1} = gxx^{-1}xx^{-1} = gxx^{-1} = e$. Täten $e = exx^{-1}$. Vielä $e = exx^{-1} = xx^{-1}e$, koska idempotentit kommutoivat. Siis

$$\begin{aligned}\delta_x(e) = \delta_x(f) &\implies x^{-1}ex = x^{-1}fx \\ &\implies e = xx^{-1}exx^{-1} = xx^{-1}fxx^{-1} = f \implies e = f\,.\end{aligned}$$

Surjektiivisuus: Olkoon $e \in E_S x^{-1}x$. Tällöin $e = x^{-1}xex^{-1}x$ kuten edellä. Siten $e = \delta_x(xex^{-1})$, missä $xex^{-1} = xex^{-1}xx^{-1} \in E_S xx^{-1}$.
δ_x on homomorfismi: Olkoot $e, f \in Exx^{-1}$. Tällöin

$$\delta_x(ef) = x^{-1}efx = x^{-1}xx^{-1}efx = x^{-1}exx^{-1}fx = \delta_x(e)\delta_x(f)\,.$$

$\boxed{6}$ Puoliryhmä S on **fundamentaalinen**, jos (sivun 54) suurin idempotentit erottava kongruenssi μ_S on identiteettirelaatio: $\mu_S = \iota$, eli

$$(\forall e \in E_S : x^{-1}ex = y^{-1}ey) \implies x = y\,.$$

Osoita, että jos S on käänteispuoliryhmä, niin S/μ_S on fundamentaalinen.

Ratkaisu. Merkitään $\mu = \mu_S$. Nyt jokainen tekijäpuoliryhmän S/μ idempotentti on muotoa $e\mu$, missä $e \in E_S$. Saadaan

$$\begin{aligned}&\forall e \in E_S : (x\mu)^{-1}e\mu(x\mu) = (y\mu)^{-1}e\mu(y\mu) \\ \implies &\forall e \in E_S : (x^{-1}ex)\mu = (y^{-1}ey)\mu \\ \implies &\forall e \in E_S : x^{-1}ex = y^{-1}ey \\ \implies &x\mu y \ \text{ eli } \ x\mu = y\mu\,.\end{aligned}$$

Näin ollen S/μ on fundamentaalinen.