

Tenttiaika on 3 tuntia 15 minuuttia. Vastaa kaikkiin tehtäviin ja perustele vastaukset tarkasti. Palauta tehtävät sähköpostitse osoitteeseen `iatorm@utu.fi`. Jokaisesta tehtävästä saa enintään 6 pistettä; läpi pääsee 9 pisteellä ja arvostaan 5 vaaditaan 20 pistettä. Etätentissä saa käyttää kurssimateriaalia, omia muistiinpanoja ja nettiä. Toisten ihmisten apu on kielletty.

1. Suoran  $L_t$  yhtälö on  $tx + y = 9$  ja suora  $K_t$  kulkee pisteiden  $(2, t)$  ja  $(t, 0)$  kautta. Millä parametrin  $t \in \mathbb{R}$  arvoilla suorat leikkaavat yhdessä pisteessä? Määritä myös leikkauspiste näillä arvoilla.

**Ratkaisu.** Suoralle  $K_t$  saadaan yhtälö  $tx + (t - 2)y = t^2$  (monisteen sivulta 2). Jos leikkauspiste on  $\vec{v}_t = (x, y)$  niin

$$\begin{aligned} & \begin{cases} tx + y = 9 \\ tx + (t - 2)y = t^2 \end{cases} \\ \implies & 9 - y = t^2 - (t - 2)y \\ \implies & y = \frac{9 - t^2}{3 - t} = 3 + t \end{aligned}$$

kun  $t \neq 3$ . Silloin yhtälöstä  $tx + y = 9$  ratkaistaan  $x = (6 - t)/t$  kun  $t \neq 0$ . Saadaan siis  $\vec{v}_t = ((6 - t)/t, 3 + t)$ .

Tarkistetaan vielä erikseen tapaukset  $t = 3$  ja  $t = 0$ . Kun  $t = 3$ , suorien yhtälöt ovat

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

joten  $L_3 = K_3$  eikä leikkauspiste ole yksikäsitteinen. Kun  $t = 0$ , yhtälöt ovat

$$\begin{cases} y = 9 \\ y = -9/2 \end{cases}$$

joten suorat  $L_0$  ja  $K_0$  ovat yhdensuuntaisia eivätkä leikkaa toisiaan.

2. Yhtälö  $xy + 3y^2 - 3 = 0$  määrittää hyperbelin  $H$ .
- (a) Määritä sen asymptoottisuorat.
  - (b) Kierretään hyperbeliä  $H$  origon ympäri  $45$  astetta vastapäivään. Määritä näin muodostuvan hyperbelin yhtälö.

**Ratkaisu.**

- (a) Mukaillaan Esimerkkiä 2.3.1. Sijoitetaan tuntemattoman asymptootin yhtälö  $y = kx + h$ , kerätään  $x$ :n potenssit ja jaetaan  $x$ :llä:

$$\begin{aligned} & x(kx + h) + 3(kx + h)^2 - 3 = 0 \\ & (3k^2 + k)x^2 + (6k + 1)hx + 3h^2 - 3 = 0 \\ & (3k^2 + k)x + (6k + 1)h + (3h^2 - 3)/x = 0 \end{aligned}$$

Kahden ensimmäisen termin kertoimien tulee olla nollia, eli

$$\begin{cases} 3k^2 + k = 0 \\ (6k + 1)h = 0 \end{cases}$$

Ensimmäisestä ratkaistaan  $k = 0$  tai  $k = -1/3$ . Kummassakin tapauksessa toinen yhtälö antaa  $h = 0$ . Siispä asymptoottisuorat ovat  $y = 0$  ja  $y = -x/3$ .

- (b) Mukaillaan esimerkkiä 2.2.1. Jos  $\vec{v} = (x, y)$  on kierretyn hyperbelin piste, niin  $A\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y, -x+y)$  on alkuperäisen hyperbelin  $H$  piste, missä  $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  on matriisi 45 asteen kierrolle myötäpäivään. Siispä tämä piste toteuttaa yhtälön

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x+y)(-x+y) + \frac{3}{2}(-x+y)^2 - 3 &= 0 \\ \iff x^2 - 3xy + 2y^2 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Tämä jälkimmäinen on kierretyn hyperbelin yhtälö.

3. Olkoon  $\sigma_1 = \sigma_{\vec{v}, 45^\circ}$  kierto 45 astetta vastapäivään pisteen  $\vec{v} = (2, 0)$  ympäri ja  $\sigma_2 = \sigma_{\vec{w}, 45^\circ}$  kierto 45 astetta vastapäivään pisteen  $\vec{w} = (3, -1)$  ympäri. Etsi se  $3 \times 3$ -matriisi, joka esittää yhdistettyä kuvausta  $\sigma_2\sigma_1$ .

**Ratkaisu.** Lasketaan ensin kummankin kierron  $3 \times 3$ -matriisi. 45 asteen kierron  $2 \times 2$ -matriisi on  $A_{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ . Käytetään monisteen kaavaa (3.42), ja sitä varten lasketaan

$$\begin{aligned} (I - A_{45^\circ})\vec{v} &= \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1 - \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \\ (I - A_{45^\circ})\vec{w} &= \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1 - \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Näiden avulla saadaan  $3 \times 3$ -matriisit

$$\begin{aligned} S_{\vec{v}, 45^\circ} &= \begin{pmatrix} A_{45^\circ} & (I - A_{45^\circ})\vec{v} \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ S_{\vec{w}, 45^\circ} &= \begin{pmatrix} A_{45^\circ} & (I - A_{45^\circ})\vec{w} \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 3 - 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Yhdistetyn kuvauksen matriisi on näiden tulo:

$$S_{\vec{w}, 45^\circ} S_{\vec{v}, 45^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 - \sqrt{2} \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Kiinnitetään  $a, b, c, t \in \mathbb{R}$ . Olkoon  $\rho_L$  peilaus suoran  $L$  suhteen, jonka yhtälö on  $y = x + t$ . Olkoon  $K$  suora, jonka yhtälö on  $ax + by + c = 0$ . Etsi kuvasuoralle  $\rho_L(K) = \{\rho_L(\vec{v}) \mid \vec{v} \in K\}$  esitys yhtälömuodossa.

**Ratkaisu.** Määritetään ensin peilauksen  $3 \times 3$ -matriisi. Suora  $L$  muodostaa x-akselin kanssa  $45^\circ$  asteen kulman, ja sen pisteistä lähimpänä origoa on  $\vec{d} = (-t/2, t/2)$ . Monisteen kaavan (3.48) mukaan sen  $3 \times 3$ -matriisi on

$$R_L = \begin{pmatrix} B_{2 \cdot 45^\circ} & 2\vec{d} \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -t \\ 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Olkoon  $\vec{v} \in (x, y)$  kuvasuoran piste, jolloin  $\rho_L^{-1}(\vec{v}) = \rho_L(\vec{v})$  on alkuperäisen suoran  $K$  piste. Lasketaan

$$\begin{pmatrix} \rho_L(\vec{v}) \\ 1 \end{pmatrix} = R_L \begin{pmatrix} \vec{v} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -t \\ 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - t \\ x + t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pisteen  $\rho_L(\vec{v}) = (y - t, x + t) \in K$  tulee toteuttaa suoran  $K$  yhtälö, eli

$$\begin{aligned} a(y - t) + b(x + t) + c &= 0 \\ \iff ay + bx - at + bt + c &= 0 \end{aligned}$$

Jälkimmäinen yhtälö siis määrittää kuvasuoran  $\rho_L(K)$ .