

# Analyysi II

Eksponenttifunktion määrittelemine sarjana

Kurssilla Analyysi I potenssin  $a^b$ ,  $a$  ja  $b$  reaalityyji,  $a > 0$  määrittely yleisesti ja erikoistapauksena funktion  $e^x$  täsmällinen määrittely oli työläs prosessi (kirjan 6. luku). Se oli ongelmaton, kun eksponentti  $b$  oli kokonaisluku. Rationaalilukueksponentin käsittelemiseksi tarvittiin sopivien juurten olemassaolo. Käsitteen laajentaminen kaikille reaalilukueksponenteille  $b$  edellytti useita raja-arvotarkasteluja, yksikäsitteisyyspäätelyitä jne.

Korjaamme nyt asian osoittamalla, että potenssisarjalla

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

on kaikki ne ominaisuudet, joita silloin näimme funktiolla  $e^x$  olevan. Sen jälkeen voimmekin määritellä uudelleen

$$e^x = E(x).$$

Tämä määritelmä on yleistyskelpoisempi kuin Luvussa 6 käytetty. Sitä voidaan käyttää mm. määrittelemään  $e^A$ , missä  $A$  on neliömatriisi, tai  $e^z$ , missä  $z$  on kompleksiluku. Yleisempi potenssin käsite palautuu tähän

## 0.1 Eksponenttifunktio sarjana

Tutkimme siis intensiivisesti sarjaa

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

**Esimerkki 0.1.** Olkoon  $x \in \mathbb{R}$  jokin reaalinen parametri. Osoita suhdetestin avulla, että sarja  $E(x)$  suppenee itseisesti.

**Ratkaisu.** Sarjan yleinen termin on  $a_n = x^n/n!$ . Tällöin

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right|.$$

Koska tämä  $\rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , niin väite seuraa.

Esimerkissä 0.1 jo näimme, että  $E(x)$  suppenee itseisesti kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Merkitään yleistä termiä  $w_n(x) = x^n/n!$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Jos  $a > 0$ , niin  $w_n(a) \geq |w_n(x)|$  kaikilla  $x \in I_a = [-a, a]$ . Koska sarja  $E(a)$  suppenee, niin Weierstrassin M-testin nojalla sarja  $E(x)$  suppenee tasaisesti välillä  $I_a$ . Näin ollen summafunktio  $E(x)$  on jatkuva koko  $\mathbb{R}$ :ssä.

Derivoimalla huomaamme, että  $w'_0(x) = 0$  ja  $w'_n(x) = n(x^{n-1}/n!) = w_{n-1}(x)$ . Näin ollen termeittäin derivoimalla saatu sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} w'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{n-1}(x) = E(x),$$

mikä suppenee aiemmin nähdyn perusteella tasaisesti välillä  $I_a$ . Näin ollen (vrt. kirjan Lause 15.3.13 ja vastaava teoria luentodioista) funktio  $E(x)$  on derivoituva jokaisella välillä  $I_a$  (toisin sanoen kaikkialla) ja se on itsensä derivaatta:

$$E'(x) = E(x) \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Koska lisäksi selvästi  $E(0) = 1$ , alkaa näyttää vahvasti siltä, että funktio  $E(x)$  jakaa useita ominaisuuksia funktion  $e^x$  kanssa.

Tiedämme jo jatkuvuuden ja derivoituvuuden sekä sen, että kyseinen funktio on oma derivaattansa. Muita ominaisuuksia varten johdetaan ensin seuraava tulos.

**Lemma 0.2.** (Eksponenttifunktion identiteetti) Kaikilla reaalityyjuilla  $x, y$  on voimassa

$$E(x)E(y) = E(x+y).$$

**Todistus.** Sarjat  $E(x)$  ja  $E(y)$  suppenevat itseisesti, joten binomikaavaa kriittisessä kohdassa käyttäen niiden Cauchyn tuloksi tulee

$$\begin{aligned}
E(x)E(y) &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} \frac{y^{k-i}}{(k-i)!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^k \frac{1}{k!} \frac{k!}{i!(k-i)!} x^i y^{k-i} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i y^{k-i} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = E(x+y).
\end{aligned}$$

□

Valitsemalla tässä  $y = -x$  saamme seurauksena, että kaikilla  $x \in \mathbb{R}$  on voimassa yhtälö

$$E(x)E(-x) = E(x-x) = E(0) = 1.$$

Näin ollen jokaiselle  $x \in \mathbb{R}$  on voimassa  $E(x) \neq 0$ , sillä muutoin olisikin  $E(x)E(-x) = 0 \cdot E(-x) = 0 \neq 1$ . Edelleen voimme päätellä, että  $\forall x \in \mathbb{R} : E(x) > 0$ . Jos nimittäin jossakin pisteessä  $x_0$  olisikin  $E(x_0) < 0$ , niin funktion  $E(x)$  jatkuvuuden, havainnon  $E(0) = 1$  ja Bolzanon lauseen nojalla lukujen 0 ja  $x_0$  välissä olisi funktion  $E(x)$  nollakohta. Näimme juuri, ettei nollakohtia voi olla, joten päädyimme ristiriitaan.

Jos  $x > 0$ , niin jokainen termeistä  $w_n(x)$  on positiivinen. Näin ollen sarjan  $E(x)$  osasummien jono on tällöin kasvava. Erityisesti siis

$$x > 0 \Rightarrow E(x) > w_0(x) + w_1(x) = 1 + x.$$

Tästä näemme, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E(x) = \infty,$$

eli jatkuvan funktion väliarvolauseen perusteella funktio  $E(x)$  saa kaikki arvot  $y \in [1, \infty)$ , kun  $x \geq 0$ . Toisaalta  $E(-x) = 1/E(x)$ , joten

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} E(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{E(x)} = 0.$$

Näin ollen funktio  $E(x)$  saa kaikki arvot  $y \in (0, 1]$ , kun  $x \leq 0$ . Koska  $E'(x) = E(x) > 0$ , funktio  $E(x)$  on kaikkialla aidosti kasvava. Näin ollen se on bijektio  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto E(x)$ . Erityisesti sillä on bijektiivinen käänteiskuvaus  $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Esitämme yhteenvedon havainnoistamme seuraavassa.

**Lause 0.3.** *Sarja*

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

määrittelee bijektiivisen, aidosti kasvavan funktion  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , jolle  $E(0) = 1$ . Funktio  $E(x)$  on kaikkialla derivoituva, ja  $\forall x \in \mathbb{R} : E'(x) = E(x)$ . Funktiolla  $E(x)$  on käänteisfunktio  $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Kaikilla  $x, y \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}_+$  on voimassa identiteetit

$$E(x)E(y) = E(x+y), \quad L(uv) = L(u) + L(v).$$

Lisäksi myös funktio  $L(x)$  on derivoituva, ja  $\forall x > 0 : L'(x) = 1/x$ .

**Todistus.** Ainoastaan funktiota  $L(x)$  koskevia väitteitä ei vielä todistettu. Sen derivoituvuus ja derivaatan lauseke seuraavat yleisestä käänteisfunktioiden derivoituvuutta koskevista tuloksista (Analyysi I). Olkoon siis  $u > 0$ . Valitaan  $x \in \mathbb{R}$  siten, että  $E(x) = u$ . Tällöin  $E'(x) = E(x) \neq 0$ , joten käänteisfunktio  $L(x)$  on derivoituva pisteessä  $u$ , ja derivaatta on

$$L'(u) = L'(E(x)) = 1/E'(x) = 1/E(x) = 1/u.$$

Jos luvut  $u$  ja  $v$  ovat positiivisia, niin  $u = E(x)$  ja  $v = E(y)$  joillakin (yksikäsitteisillä) muuttujien  $x, y \in \mathbb{R}$  valinnoilla. Tällöin  $uv = E(x)E(y) = E(x+y)$ , joten käänteisfunktio-ominaisuuden nojalla

$$L(uv) = L(E(x+y)) = x+y = L(u) + L(v).$$

□

**Lause 0.4.** *Lauseessa 0.3 luetellut ominaisuudet määräävät funktion  $E(x)$  yksikäsitteisesti.*

**Todistus.** Oletetaan, että  $F(x)$  olisi jokin toinen funktio, joka toteuttaa ehdot  $F(0) = 1$  ja  $F(x) = F'(x)$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Tällöin osamäärän derivoimissäännön mukaan kaikilla  $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{F(x)}{E(x)} \right) = \frac{F'(x)E(x) - F(x)E'(x)}{E(x)^2} = \frac{F(x)E(x) - F(x)E(x)}{E(x)^2} = 0.$$

Integraalilaskennan peruslauseen mukaan tällöin funktio  $F(x)/E(x)$  on vakio  $C$ . Koska  $F(0)/E(0) = 1$ , niin  $C = 1$ . Siis  $F(x) = E(x)$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . □

**Määritelmä 0.5.** Määritellään eksponenttifunktio  $e^x$  ja sen käänteisfunktio  $\ln y$  kaikille  $x \in \mathbb{R}, y > 0$  asettamalla

$$e^x = E(x) \quad \text{ja} \quad \ln y = L(y).$$

Jos  $a > 0, a \neq 1$  määritellään

$$a^x = E(xL(a)) \quad \text{ja} \quad \log_a(y) = \frac{L(y)}{L(a)}.$$

Kuorrutuksena todistamme varmuuden vuoksi vielä seuraavan yksityiskohdan.

**Lause 0.6.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = E(1) = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

**Todistus.** Binomikaavan avulla näemme, että kun  $n > k > 0$

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!n^i} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-i+1)}{i!n^i} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-i+1)}{n^i} \\ &\geq \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-i+1)}{n^i}. \end{aligned}$$

Kiinnitetään hetkeksi  $k$  ja annetaan luvun  $n$  kasvaa rajatta. Tällöin kaikilla  $i = 0, 1, 2, \dots, k$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{n^i} = \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-i+1}{n} \rightarrow 1,$$

kun  $n \rightarrow \infty$ . Siirtymällä raja-arvoihin saadaan sitten epäyhtälö

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^k w_i(1).$$

Tämä epäyhtälö on voimassa olipa parametrilla  $k$  mikä positiivinen kokonaislukuarvo tahansa. Antamalla sitten  $k \rightarrow \infty$  saadaan raja-arvona tulos

$$e \geq \sum_{i=0}^{\infty} w_i(1) = E(1).$$

Toisaalta katkaisemalla positiivitermisen sarjan  $E(1/n)$  kahden termin jälkeen näemme, että kaikille  $n \in \mathbb{Z}_+$  on voimassa

$$E(1/n) \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

Korottamalla tämä yhtälö puolittain  $n$ :nteen potenssiin ja soveltamalla identiteettiä  $E(x)^n = E(nx)$  (todistus harjoitustehtävänä) saadaan

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq E(1/n)^n = E(n \cdot (1/n)) = E(1).$$

Ottamalla tässä puolittain raja-arvo  $n \rightarrow \infty$  saadaan käänteinen epäyhtälö

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq E(1).$$

Molemmat epäyhtälöt voivat olla samanaikaisesti voimassa vain, jos  $E(1) = e$ . □

## 0.2 Potenssin käsite

Kun  $a > 0$  on mielivaltainen kantaluku, haluamme potenssin  $a^b$  noudattavan tuttuja potenssiopin laskulakeja. Koulukursseilla logaritmien ja potenssien yhteydessä johdettiin kaava (mikä johti mm. menetelmään vaihtaa logaritmin kantaluku)

$$a^b = e^{b \ln a}.$$

Tämä sopii "hyvin" yleisen potenssin määritelmäksi.

**Määritelmä 0.7.** Olkoot  $a$  ja  $b$  reaalilukuja,  $a > 0$ . Otetaan käyttöön merkintä

$$a^b = E(bL(a)),$$

missä  $E$  ja  $L$  ovat edellisen pykälän funktiot.

**Esimerkki 0.8.** Jos tässä  $b = n$  onkin luonnollinen luku, niin osoita, että tämän määritelmän mukainen potenssi  $a^0 = 1$  ja jos  $n > 0$ , niin

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a,$$

missä oikealla puolella  $a$  esiintyy tulon tekijänä  $n$  kertaa.

**Ratkaisu.** Induktiolla  $n$ :n suhteen. Jos  $n = 0$ , niin

$$a^0 = E(0L(a)) = E(0) = 1.$$

Induktioaskel seuraa, kunhan perustelemme kaavan

$$a^{n+1} = a^n \cdot a$$

olevan voimassa kaikille  $n \in \mathbb{N}$ . Tämä seuraa puolestaan funktionaaliyhtälöstä, Lemma 0.2:

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= E((n+1)L(a)) \\ &= E(nL(a) + L(a)) \\ &= E(nL(a))E(L(a)) \\ &= a^n \cdot a. \end{aligned}$$

Aiemmin esiintyneen funktionaaliyhtälön seurauksen  $E(-x) = 1/E(x)$  avulla seuraa sitten, että tuttu kaava

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

on voimassa kaikille  $n \in \mathbb{N}$ . Näin ollen uusi potenssin käsitteemme yhtyy vanhaan aina, kun eksponentti on kokonaisluku.

Muita tuttuja potenssiopin kaavoja ovat

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c},$$

minkä todistuksen jätämme harjoitustehtäväksi.

Kaikille  $a_1 > 0, a_2 > 0$  ja  $b \in \mathbb{R}$  voimassa oleva kaava

$$(a_1 a_2)^b = a_1^b \cdot a_2^b$$

puolestaan seuraa laskusta

$$\begin{aligned} (a_1 a_2)^b &= E(bL(a_1 a_2)) \\ &= E(b(L(a_1) + L(a_2))) \\ &= E(bL(a_1) + bL(a_2)) \\ &= E(bL(a_1))E(bL(a_2)) \\ &= a_1^b a_2^b, \end{aligned}$$

missä funktionaaliyhtälöä (ja sen seurausta  $L(xy) = L(x) + L(y)$ ) käytettiin useissa vaiheissa.

Samoin *potenssin potenssia* koskeva kaava

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

seuraa laskusta

$$\begin{aligned} (a^b)^c &= E(cL(a^b)) \\ &= E(cL(E(bL(a)))) \\ &= E(c(bL(a))) \\ &= E((cb)L(a)) \\ &= a^{cb}, \end{aligned}$$

missä siirryttäessä toiselta riviltä kolmannelle käytettiin tietoa siitä, että  $E$  ja  $L$  ovat toistensa käänteisfunktioita,  $L(E(x)) = x$  kaikille  $x \in \mathbb{R}$ .

Tähän teemaan törmäät seuraavan kerran todennäköisimmin kurssilla *Funktioteoria*, kun potenssin käsite laajennetaan kompleksiluvuille. Se ei tule olemaan täysin ongelmaton muuta kuin juuri funktion  $E$  osalta (eli kantaluvulle  $e$ ). Syltityhtäaksi osoittautuu, että potenssin määritelmässä esiintyvä funktio  $L$  (eli

luonnollinen logaritmi) ei kompleksilukumuuttujille yleisty *yksikäsitteiseksi* funktioksi, vaan siellä sen arvoihin liittyy väistämättä monikäsitteisyyttä, josta ei täysin päästä eroon järkevillä rajauksillakaan. Tämä monikäsitteisyys esiintyy esimerkiksi tunnetussa "todistuksessa"

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1,$$

missä tarkkaavainen lukija huomaa potenssiopin kaavoja käytetyn sangen suruttomasti (olettaen  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ).