

KONVOLUUTIOKOODIT

Demonstraatiotehtävät I

1. Monisteen harjoitustehtävä 0.1. (sivulla 3)
2. Laske polynomien $1 + D^6$ ja $1 + D^2 + D^3 + D^5$ syt.
3. Esitä rationaalifunktio

$$\frac{1}{1 + D + D^2}$$

formaalina potenssisarjana $\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n \in \mathbf{F}_2[[D]]$. Vinkki: Alla olevan perusteella kyseisen potenssisarjan kertoimet muodostavat jaksollisen jonon. Jakso on sangen lyhyt, ja löytyy etsimällä sellainen pieni luku m , että $1 + D^m$ on jaollinen polynomilla $1 + D + D^2$. Lisätehtävänä voi miettiä, miksi kertoimet a_n saadaan Fibonaccin lukujonosta $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, redusoimalla ne modulo 2.

4. Oletetaan, että $p(D) \in \mathbf{F}[D] \setminus \mathbf{F}$ on polynomi, jonka vakiokerroin on 1. Osoita, että on olemassa sellainen luonnollinen luku $m > 0$, että $p(D) \mid 1 + D^m$. Vinkki: Jäännösluokkarenkaassa $\mathbf{F}[D]/\langle p(D) \rangle$ on äärellisen monta alkia, joten löytyy sellaiset eksponentit $0 \leq r < s$ joille $D^s \equiv D^r \pmod{p(D)}$.
5. Oletetaan, että $p(D) \in \mathbf{F}[D] \setminus \mathbf{F}$ on polynomi, jonka vakiokerroin on 1. Osoita, että formaalissa potenssisarjarenkaassa $\mathbf{F}[[D]]$ käänteisalkio

$$1/p(D) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i D^i$$

on jaksollinen potenssisarja, eli on olemassa sellainen luonnollinen luku m , että $a_{i+m} = a_i$ kaikille $i \in \mathbf{N}$. Osoita myös, että jaksollinen potenssisarja on aina rationaalifunktio $p(D)/q(D) \in \mathbf{F}(D)$. Vinkki: Käytä edellisen tehtävän tulosta, ja imitoi koulusta tuttua päättelyä, jossa osoitetaan, että jaksollinen desimaaliluku on rationaaliluku.