

# KONVOLUUTIOKOODIT

## Ex tempore - demot 27.01.

**Tehtävä 1** Selitä, miksi monisteen Tehtävän 1.5. generaattorimatriisi

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1+D \\ 0 & 1 & 0 & 1+D^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1+D+D^2 \end{pmatrix}$$

on basic. Etsi jokin kanoninen generaattorimatriisi tälle koodille. Vinkki: Tehtävän 1.5 perusteella  $\text{intdeg } G = 2$ , joten riittää pudottaa ulkoinen aste samaksi. Monisteen Example 1.7:n tuloksen nojalla, tähän päästään tekemällä vaakarivimuunnoksia kunnes korkea-asteisten termien indikaattorimatriisi on täysiasteinen.

**Ratkaisu.** Kyseinen matriisi on basic, koska kolmen ensimmäisen sarakkeen muodostama alideterminantti  $= 1$ . Näin ollen kaikkien alideterminanttien  $\text{synt} = 1$ , Theorem 1.2. kohta (2).

Näimme Tehtävässä 1.5. että ko. matriisin sisäinen aste on kaksi. Lisäämällä 1. ja 2. vaakarivi kolmanteen saadaan matriisi

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1+D \\ 0 & 1 & 0 & 1+D^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

jonka ulkoinen aste on kolme. Lisäämällä vielä ensimmäinen vaakarivi toiseen kerrottuna  $D$ :llä, päästään silläkin rivillä eroon toisen asteen termeistä

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1+D \\ D & 1 & 0 & 1+D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tämän matriisin ulkoinen aste on kaksi. Käytetyntyyppiset vaakarivimuunnokset eivät muuta sisäistä astetta (monisteen Lemma 1.2. A-kohta), eivätkä basic-ominaisuutta, joten tämä matriisi on sekä basic että reduced (Theorem 1.3. kohta (1) tai (2)).

Tehdyt vaakarivioperaatiot keksittiin siitä, että alkuperäisessä matriisissa kunkin vaakarivin korkea-asteisin termi esiintyi ainoastaan viimeisessä sarakkeessa, joten oli luonnollista yrittää pudottaa niiden astetta vaakarivioperaatioilla. Vrt. Theorem 1.3. implikaation *Reduced*  $\Rightarrow$  (1) todistus.

**Tehtävä 2** Monisteen Example 1.5:n matriisista  $G_2$  tiedämme, ettei se ole basic. Näin ollen on olemassa ei-polynomiaalinen syöte  $\mathbf{u}(D) \in \mathbf{F}(D)^2$ , jota vastaava koodisana  $\mathbf{x}(D) = \mathbf{u}(D)G_2$  on polynomiaalinen. Määrittää jokin tällainen  $\mathbf{u}(D)$ . Vinkki: Ko. polynomin toinen invariantti tekijä on  $1 + D + D^2$ , ja se tulee esiintymään nimittäjässä. Jos  $\Gamma := PG_2Q$  on kyseisen matriisin Smithin normaalimuoto, niin  $PG_2 = \Gamma Q^{-1}$ . Jakamalla tämän matriisiyhtälön toinen rivi invariantilla tekijällä  $d_2(D)$  saadaan oikealla puolelle polynomimatriisi, ja vasemmalle etsitty input. Huomautus: Koska syöte on rationaalinen mutta ei polynomiaalinen, siinä on äärettömän monta bittiä. Jos vastaavan koodisanan äärellisen monta ykköstä muuttuvat kanavavirheiden seurauksena nolliksi, niin syötteen tuloksija tekee virheen äärettömän monen syötteen bitin kohdalla. Tästä syystä tällaisia generaattorimatriiseja kutsutaan *katastrofaaliseksi*. Niitä ei koskaan käytetä.

**Ratkaisu.** Kyseinen matriisi on

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1+D+D^2 & 1+D^2 & 1+D \\ 1+D & 0 & 1 & D \end{pmatrix}.$$

Kalvoilla *Esimerkki 1G.1-2* näimme, että 1. rivin lisääminen toiseen kerrottuna polynomilla  $1 + D$  johti vaakariviin, jolla invariantti tekijä  $1 + D + D^2$  on yhteisenä tekijänä. Tätä tilannetta vastaa syöte  $\mathbf{u}(D) = (1 + D, 1)$  ja siis koodisana

$$\mathbf{x}(D) = \mathbf{u}(D)G_2 = (0, 1 + D^3, D + D^2 + D^3, 1 + D + D^2) = (1 + D + D^2)(0, 1 + D, D, 1).$$

Näin ollen syöte

$$\mathbf{u}(D) = \left( \frac{1+D}{1+D+D^2}, \frac{1}{1+D+D^2} \right)$$

vastaa äärellispainoista koodisanaa

$$\mathbf{x}(D) = \left( \frac{1+D}{1+D+D^2}, \frac{1}{1+D+D^2} \right) G_2 = (0, 1+D, D, 1).$$

Näimme kurssin alussa, että syötteen komponentit ovat ääretöntä painoa olevia potenssisarjoja.

**Tehtävä 3** Käytetään Tehtävän 1.12. generaattorimatriisiin  $G(D) = (1+D+D^4, 1+D^2+D^3+D^4)$  määrittämään koodia  $\mathcal{C}$ . Sitä käytettäessä vastaanottaja sai viestin

$$(\dots + D^{n-2} + D^{n-1} + D^n, \dots + D^n),$$

missä kolme pistettä tarkoittavat sitä, että vastaanottaja ei kuullut ajan hetkillä  $\leq n-3$  lähetettyjä bittijä. Päättele, että vastaanotetuistakin biteistä ainakin yksi on virheellinen. Vinkki: Yksi tapa on käyttää torstaina löydettyä oikeanpuoleista käänteismatriisia  $H(D) = \begin{pmatrix} D \\ 1+D \end{pmatrix}$  ja kanonisen generaattorimatriisin ominaisuuksia. Suora vastaoletus toimii sekin.

**Ratkaisu.** Vastaanotettu viesti siis päättyy hetkellä  $n$  ja kolmen viimeisen aikayksikön aikana koodisanasta nähtiin bitit

$$\mathbf{y}(D) = \dots + D^{n-2}(1, 0) + D^{n-1}(1, 0) + D^n(1, 1).$$

Näimme Tehtävässä 1.12., että matriisilla  $G(D)$  oikeanpuoleinen käänteismatriisi  $H(D) = \begin{pmatrix} D \\ 1+D \end{pmatrix}$ . Jos  $\mathbf{y}(D) = u(D)G(D)$  on virheetön koodisana, niin

$$\begin{aligned} u(D) &= u(D)G(D)H(D) = \mathbf{y}(D)H(D) \\ &= D(\dots_1 + D^{n-2} + D^{n-1} + D^n) + (1+D)(\dots_2 + D^n) \\ &= D(\dots_1) + (1+D)(\dots_2) + D^{n-1} + D^n(1+1) + D^{n+1}(1+1) \\ &= D(\dots_1) + (1+D)(\dots_2) + D^{n-1}. \end{aligned}$$

Tässä  $\dots_1$  ja  $\dots_2$  sisälsivät vain termejä  $D^j, j \leq n-3$ , joten niiden kontribuutio syötteeseen  $u(D)$  sisältää vain termejä, joiden aste  $\leq n-2$ . Näin ollen termi  $D^{n-1}$  jää henkiin, ja  $u(n-1) = 1$ .

Mutta kyseinen matriisi on reduced, joten sillä on predictable degree -ominaisuus. Jos  $\deg u(D) = n-1$ , on siis oltava  $\deg \mathbf{x}(D) = (n-1) + 4 = n+3$ , mikä on ristiriita.

Muitakin tapoja päätyä ristiriitaan löytyy. Halusin esittää tämän ratkaisun oikeanpuoleisen käänteismatriisin käyttöharjoituksena.