

Vektorilaskenta, Käyräintegraaliharjoitustyö

Jokainen tehtävä on 10 pisteen arvoinen. Ratkaise niin monta kuin haluat, ja lähetä vastauksesi tavalliseen tapaan luennoitsijalle. Sisällytä laskuihin sopivasti välivaiheita. Jotkin tehtävät muodostavat ryhmiä, koska ne käsittelevät samaa objektia.

Tehtävä 1. Laske käyräintegraali

$$\int_{\gamma} (5xy - 6x^2) dx + (3y - x) dy,$$

missä γ on tasokäyrä $\gamma(t) = (t, t^3), t \in [1, 2]$.

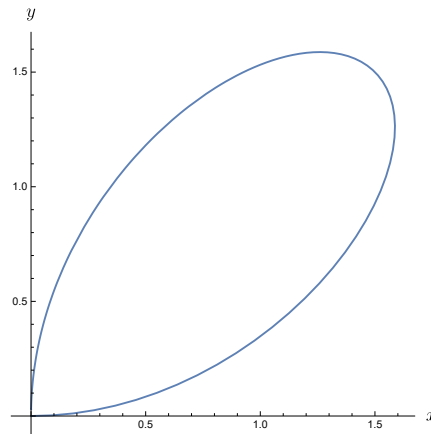
Tehtävä 2. Tutkitaan parametrisoitua käyrää

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Osoita, että käyrän pisteet toteuttavat yhtälön

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

Kyseistä käyrää kutsutaan Kartesiuksen lehdeksi (eng. Folium of Descartes), ja se esiintyi monisteen Kuvassa 4.3. sivulla 101. Vakuuta itsesi siitä, että kun $t \in (0, \infty)$ niin (x, y) piirtää Kartesiuksen lehden 1. neljänneksessä olevan silmukan. Esimerkiksi voit laskea raja-arvon $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t))$.

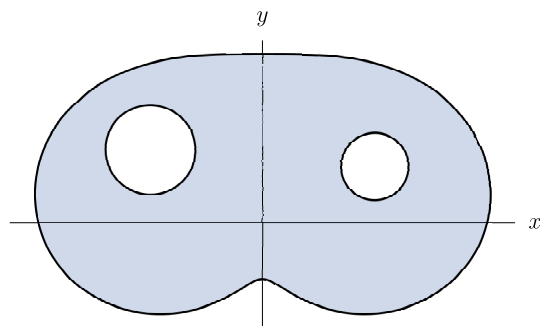


Tehtävä 3. Laske Kartesiuksen lehden silmukan A pinta-ala monisteen sivun 144 käyräintegraalina

$$m(A) = \frac{1}{2} \int_{\partial A} x dy - y dx$$

käyttäen edellisen tehtävän parametrisointia reunakäyrälle. Muista integroimiskaava $\int f' f^n = \frac{1}{n+1} f^{n+1}$.

Tehtävä 4. Millaisen muodon Greenin lause tasossa saa alla olevan kuvan alueelle ja sen reunalle? Perustele tulos palauttamalla se yhden reunakäyrän rajaaman alueen tapaukseen lisäämällä reunaan sopiva määrä palasia, joita kuljetaan edestakaisin.



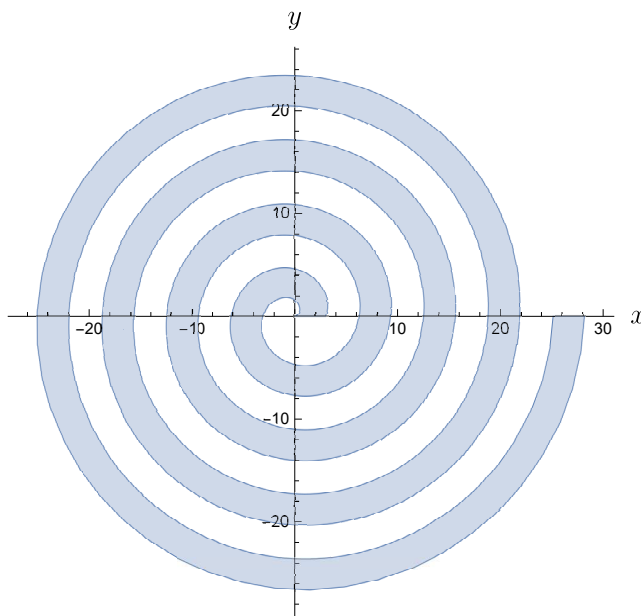
Tehtävä 5. Tarkista, että kenttä

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, 2y \sin x - 4, 3xz^2 + 2)$$

toteuttaa Poincarén lemman ehdot koko avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Etsi sille jokin potentiaali. Laske lopuksi käyräintegraali

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r},$$

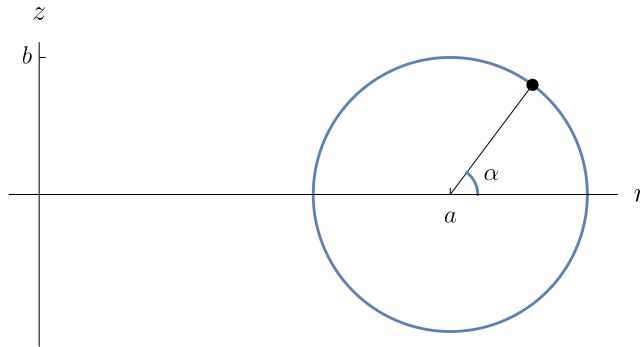
missä $\gamma(t) = (t + \cos t, e^t, t + \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



Tehtävä 6. Yllä kuvattu hyttyskarkottimen mieleen tuova tason alue A ei selvästikään ole tähtimäinen. Oletetaan, että vektorikenttä $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ toteuttaa Poincarén Lemman oletukset alueessa A . Miten Liämauslemman (monisteen Lemma 5.38) avulla nähdään, että kentällä $\mathbf{f}$ on potentiaali alueessa A ? Vinkki: Liämauslemmaa voi soveltaa monta kertaa, yksi mutka kerrallaan, kunhan sen ehdot ovat voimassa kussakin vaiheessa.

Oheisen kuvan ympyrällä, jonka säde on b ja keskipiste $(a, 0)$ on parametrisointi

$$r(\alpha) = a + b \cos \alpha, \quad z(\alpha) = b \sin \alpha.$$



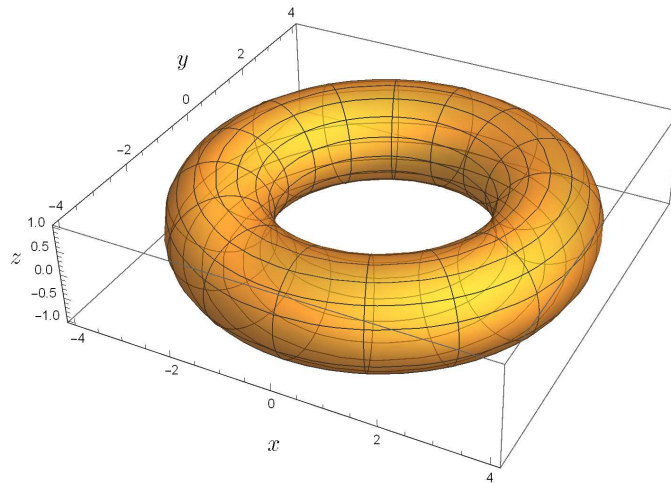
Tässä α on kuvan kulma, ja se saa arvot $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Oletamme, että $0 < b < a$.

Annamme tämän ympyrän pyörähtää z -akselin ympäri. Tällöin saamme munkkirinkilää muistuttavan ns. *toruspinnan*, jonka pisteet voidaan parametrisoida α :n ja toisen kulmamuuttujan $\phi \in [0, 2\pi]$ avulla käyttäen yllä annettua r :n lauseketta:

$$(x, y, z) = T(\alpha, \phi) = (a + b \cos \alpha) \cos \phi, (a + b \cos \alpha) \sin \phi, b \sin \alpha).$$

Vertaa tätä vaikka pallokoordinaatteja (r, θ, ϕ) vastaavien karteesisten koordinaattien (x, y, z) lausekkeiden johtoon luennoilla. Erona on, että tällä kertaa pyörähtävä käyrä on koko ympyrä eikä puoliympyrä, joten "koordinaatti" α saa arvoja 2π :n mittaiselta väliltä.

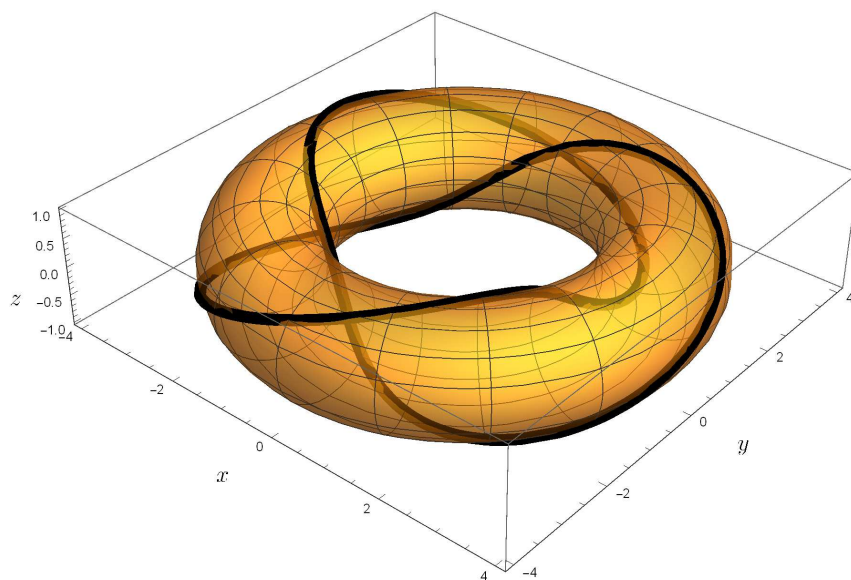
Alla kuva toruspinnasta, kun $a = 3$ ja $b = 1$.



Tehtävä 7. Vakuuta itsesi siitä, että jos parametri t saa arvot $0 \leq t \leq 2\pi$, niin käyrä

$$\gamma(t) = T(3t, 2t)$$

piirtää toruspinnalle alla olevan kuvan ns. trefoil-käyrän, joka kiertää munkkirinkilän reiän ympäri kahdesti kiertäen samalla "taivutetun putken" ympäri kolme täyttä kierrosta. Laske tätä trefoil-käyrän parametrisointia vastaava tangenttivektori $\gamma'(t)$ ja sievennä sen pituuden neliötä $||\gamma'(t)||^2$ niin paljon kuin osaat. Mikä integraali laskee trefoil-käyrän pituuden? Varoitus: Älä yritä laskea kyseistä integraalia. Minä en osannut, eikä osannut Mathematicakaan. Se saattaa olla ns. elliptinen integraali, mutta Mathematica ei osannut kirjoittaa sitä edes elliptisten integraalien avulla, joten en ole varma.



Tehtävä 8. Olkoon γ edellisen tehtävän trefoil-käyrä. Laske kentän

$$\mathbf{f} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

integraali yli trefoil-käyrän.

Trefoil-käyrä putkahtaa esiin topologiassa eräänä yksinkertaisimmista solmuista. Se esiintyy myös fyysikassa kenttien topologiaa tutkittaessa. Eräs turkulainen fysiikan artikkeli teemasta:

<https://arxiv.org/pdf/hep-th/9811053.pdf>

Erilainen kuva trefoil-käyrästä toruksen ympärillä on sivuaineanalyysin monisteen kansikuvana.