



Vektorilaskenta 2020

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Luentomateriaalia monisteen 1. lukuun liittyen



Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Esimerkki 1A

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Vektoreista



Esimerkki 1A

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Esimerkki 1A

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

(Ei käsitelty luennoilla vuonna 2020) Tehtävä: Tiedetään, että $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on yksikkövektori. Johda yläraja lausekkeelle $2x + 3y + 6z$.

Ratkaisu 1: Tässä $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$, joten $|x| \leq 1$. Samoin nähdään, että $|y| \leq 1$ ja $|z| \leq 1$. Näin ollen kolmioepäyhtälön nojalla

$$|2x + 3y + 6z| \leq |2x| + |3y| + |6z| \leq 2 + 3 + 6 = 11.$$

Ratkaisu 2: Tiukempi yläraja saadaan huomaamalla, että $2x + 3y + 6z = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$ eli vektorin $\mathbf{x}$ ja vektorin $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$ sisätulo. Tässä

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7,$$

joten Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön nojalla $2x + 3y + 6z \leq 7$. Kun $\mathbf{x} = \frac{1}{7}(2, 3, 6)$, niin tässä on yhtäsuuruus, joten 7 on paras mahdollinen yläraja.



Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Esimerkki 1B.1

Esimerkki 1B.2

Esimerkki 1B.3

Nyrkkisääntö

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Topologiasta



Esimerkki 1B.1

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Esimerkki 1B.1

Esimerkki 1B.2

Esimerkki 1B.3

Nyrkkisääntö

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Ovatko seuraavat joukot avoimia? Ovatko ne suljettuja?

$$J_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1, 0 < x < 1\}.$$

Ratkaisu: Tämä joukko on avoin. Jos $P = (x, y) \in J_1$ on piste ko. neliön sisälle, niin määritellään

$$r = \frac{1}{2} \min\{x, 1 - x, y, 1 - y\}.$$

Eli r on puolet etäisyydestä lähimpään neliön "seinään". Tällöin $B(P, r)$ on kokonaan joukossa J_1 , eli P on sisäpiste. Joukko J_1 ei ole suljettu, sillä $(0, 0) \notin J_1$, mutta mikä tahansa origokeskinen ympyrälevy sisältää joukon J_1 pisteitä. Origon ei siis ole komplementin sisäpiste, eikä komplementti näin ole avoin.



Esimerkki 1B.2

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Esimerkki 1B.1

Esimerkki 1B.2

Esimerkki 1B.3

Nyrkkisääntö

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

$$J_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 < x < 1\}.$$

Ratkaisu: Joukko J_2 ei ole avoin. Piste $P = (1/2, 1) \in J_2$, mutta jokainen P_2 -keskinen palloympäristö sisältää pisteitä, joiden y -koordinaatti on > 1 . Näin ollen P_2 ei ole joukon J_2 sisäpiste.

Joukko J_2 ei ole myöskään suljettu. Piste $Q = (1, 1/2) \notin J_2$, mutta jokainen Q -keskinen palloympäristö sisältää pisteitä, joiden x -koordinaatti $\in (0, 1)$ ja y -koordinaatti $= 1/2$ (jolloin kyseinen piste $\in J_2$). Näin ollen Q ei ole komplementin $\mathbb{R}^2 \setminus J_2$ sisäpiste.



Esimerkki 1B.3

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Esimerkki 1B.1

Esimerkki 1B.2

Esimerkki 1B.3

Nyrkkisääntö

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

$$J_3 = \emptyset.$$

Ratkaisu: J_3 on avoin. Koska siihen ei kuulu yhtään pistettä, sen jokainen piste on triviaalisti sen sisäpiste.

Joukko J_3 on myös suljettu. Sen komplementti on koko $\mathbb{R}^2$.

Jos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, niin $B(\mathbf{x}, 1)$ sisältyy (triviaalisti) tasoon $\mathbb{R}^2$. Näin ollen $\mathbf{x}$ on joukon $\mathbb{R}^2$ sisäpiste. Koska $\mathbf{x}$ on mielivaltainen, niin $\mathbb{R}^2$ on avoin. Näin ollen $\mathbb{R}^2$ on avoin, ja J_3 siten suljettu.



Nyrkkisääntö

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Esimerkki 1B.1

Esimerkki 1B.2

Esimerkki 1B.3

Nyrkkisääntö

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

- Avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukko on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kaikki reunapisteensä.
- Avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukko on avoin, jos ja vain jos se ei sisällä ainuttakaan reunapisteistään.
- Jos joukko sisältää vain osan reunapisteistään, niin se ei ole avoin eikä suljettu.
- Kun joukko kuvataan "ameebana" (piirtämällä sille reuna), niin joukon reunapisteet ovat juurikin reunalla. Patologisia tilanteita esiintyy edistyneemmillä matematiikan kursseilla, muttei juurikaan sovelluksissa (ainakaan tällä kurssilla).



Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

**Funktioiden
kuvaajista**

Yleistä 1

Yleistä 2

Kuvaaja 1

Kuvaaja 2

Esimerkki 1C

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Funktioiden kuvaajista



Yleistä 1

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Yleistä 1

Yleistä 2

Kuvaaja 1

Kuvaaja 2

Esimerkki 1C

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

- Kursseilla Analyysi I ja II(A) käsiteltiin yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisia funktioita. Analyysin työkaluja käytettiin usein niiden kuvaajien tutkimiseen.
- Jos $f : A \rightarrow B$ on tällainen funktio, niin tyypillisesti A ja B ovat reaalilukuvälejä, ja kuvaaja G_f on tason pistejoukko

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

- Vektorilaskennan kurssilla joko A tai B tai molemmat ovat korkeampiulotteisia. Jos $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ja $B \subseteq \mathbb{R}^n$, niin kuvaaja $G_f \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$.



Yleistä 2

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Yleistä 1

Yleistä 2

Kuvaaja 1

Kuvaaja 2

Esimerkki 1C

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

- Vaikeuksia tulee siitä, että kun $n + m > 3$ mielikuvituksemme ei enää riitä hahmottamaan kuvaaja. Esimerkeissä usein $n + m \leq 3$ tai ainakin $n \leq 3, m \leq 3$. Tapauksessa $n = m = 2$ funktiota voidaan yrittää hahmottaa vektorikenttänä (vrt. monisteen Kuva 1.9.)
- Vaikeutta tulee myös siitä, että törmäämme sovelluksissa yksinkertaista moniulotteista väliä mutkikkaampiin lähtöjoukkoihin $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ks. monisteen Kuva 1.8. Törmäämme tähän uudestaan integraalilaskennan osassa.



Kuvaaja 1

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Yleistä 1

Yleistä 2

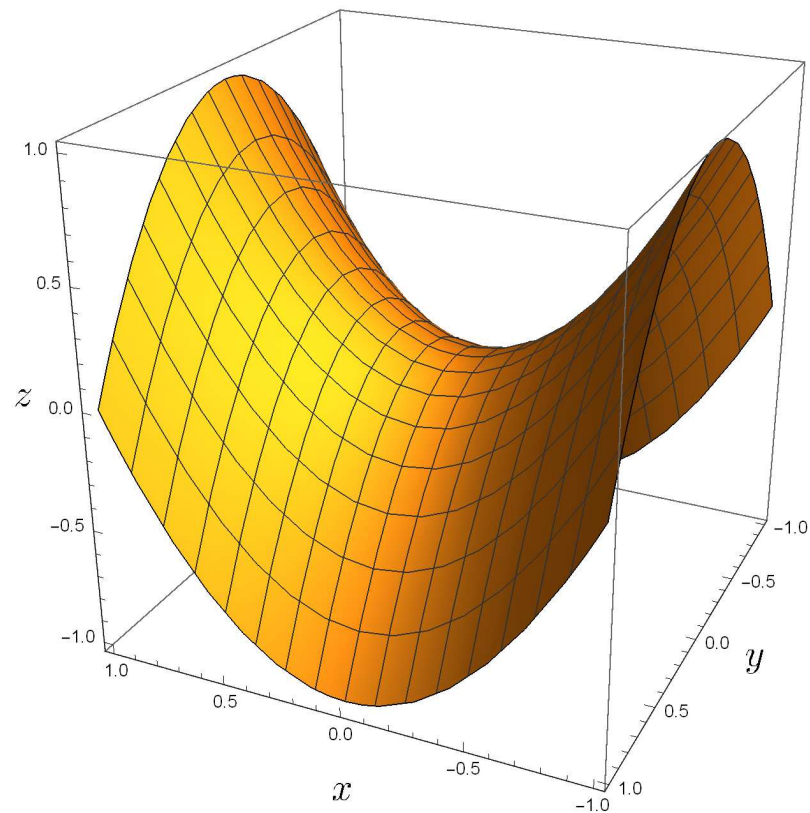
Kuvaaja 1

Kuvaaja 2

Esimerkki 1C

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ kuvaaja alueessa
 $A = (-1, 1) \times (-1, 1)$.





Kuvaaja 2

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Yleistä 1

Yleistä 2

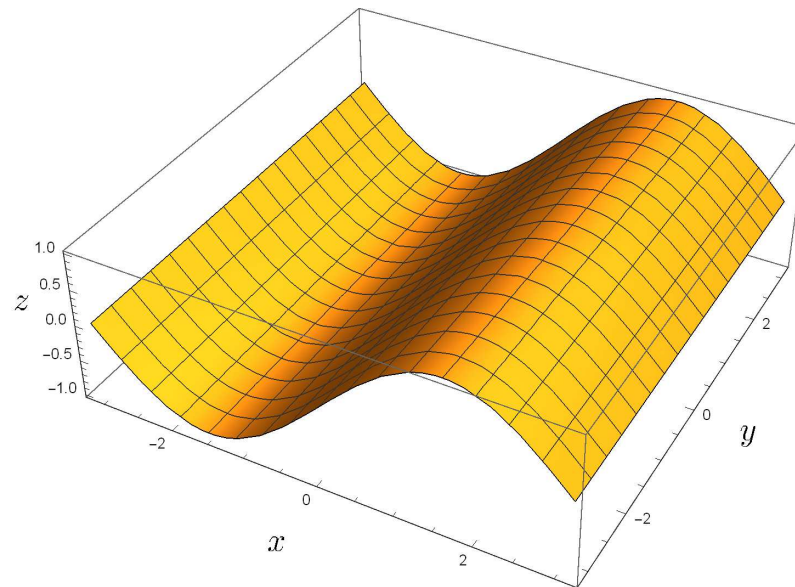
Kuvaaja 1

Kuvaaja 2

Esimerkki 1C

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Funktion $f(x, y) = \sin x$ kuvaaja alueessa
 $A = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$.





Esimerkki 1C

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Yleistä 1

Yleistä 2

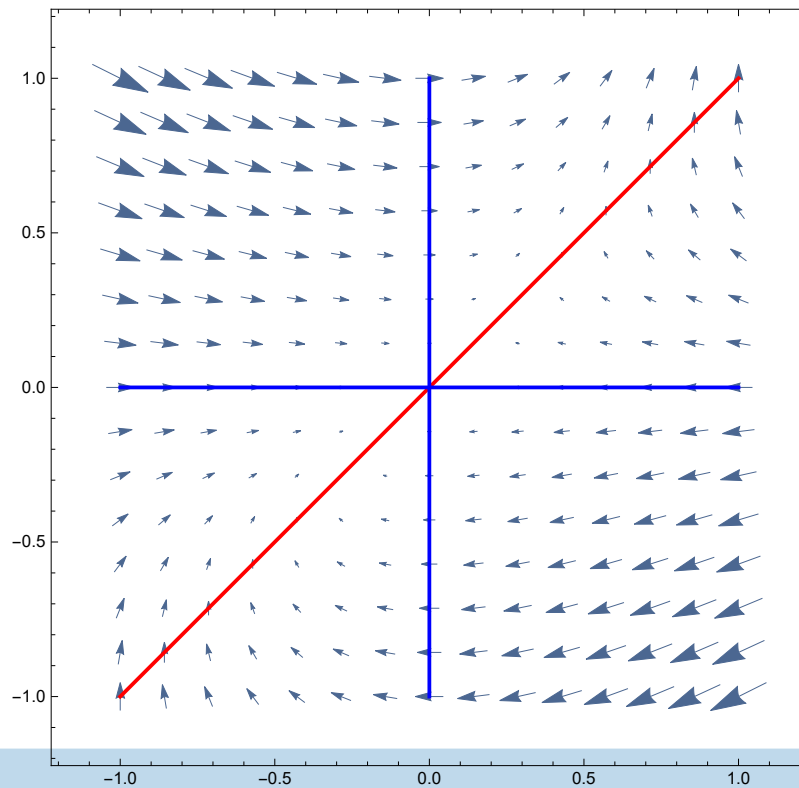
Kuvaaja 1

Kuvaaja 2

Esimerkki 1C

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Ohessa monisteen Kuvan 1.9. vektorikenttä $(y - x, xy)$, jossa on punaisella merkitty suora $y = x$, jolla kentän 1. komponentti häviää (jolloin kenttä on pystysuora), ja sinisellä koordinaattiakselit, joilla 2. komponentti häviää (ja kenttä on vaakasuora).





Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

**Vektorifunktion
jatkuvuudesta**

Esimerkki 1D.1

Esimerkki 1D.2

Esimerkki 1E.1

Esimerkki 1E.2

Esimerkki 1F.1

Esimerkki 1F.2

Esimerkki 1G

Esimerkki 1H.1

Esimerkki 1H.2

Esimerkki 1H.3

Esimerkki 1H.4

Vektorifunktion jatkuvuudesta



Esimerkki 1D.1

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Esimerkki 1D.1

Esimerkki 1D.2

Esimerkki 1E.1

Esimerkki 1E.2

Esimerkki 1F.1

Esimerkki 1F.2

Esimerkki 1G

Esimerkki 1H.1

Esimerkki 1H.2

Esimerkki 1H.3

Esimerkki 1H.4

Tehtävä: Osoita määritelmään tukeutuen, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy$ on jatkuva pisteessä $P = (1, 1)$.

Ratkaisu: Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Laskemalla nähdään, että $f(P) = 1$. Haluamme siis arvioida ylöspäin erotusta

$$|f(x, y) - f(P)| = |xy - 1|,$$

kun (x, y) lähestyy pistettä P . Tätä varten kirjoitamme erotuksen muodossa, jossa esiintyvät vastinkoordinaattien erotukset $x - 1$ ja $y - 1$:

$$xy - 1 = xy - x + x - 1 = x(y - 1) + (x - 1). \quad (*)$$

Tässä δ :n valinnalla voimme kontrolloida erotuksia $x - 1$ ja $y - 1$. Jäljellä on tekijä x .



Esimerkki 1D.2

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Esimerkki 1D.1

Esimerkki 1D.2

Esimerkki 1E.1

Esimerkki 1E.2

Esimerkki 1F.1

Esimerkki 1F.2

Esimerkki 1G

Esimerkki 1H.1

Esimerkki 1H.2

Esimerkki 1H.3

Esimerkki 1H.4

Jos vaaditaan, että $|x - 1| < 1$, niin tällöin $0 < x < 2$, ja siis erityisesti $|x| < 2$. Tämä motivoi valinnan

$$\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}.$$

Jos nyt $\|(x, y) - (1, 1)\| < \delta$, niin tällöin automaattisesti epäyhtälöt $|x - 1| < \delta$ ja $|y - 1| < \delta$ ovat molemmat voimassa. Erityisesti siis $|x| < 2$, jolloin yhtälön (*) ja kolmioepäyhtälön seurauksena saamme

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 1| &= |xy - 1| \\ &< |x| \cdot |y - 1| + |x - 1| \\ &< 2\delta + \delta = 3\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Koska ε oli mielivaltainen, väite on todistettu.



Esimerkki 1E.1

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Esimerkki 1D.1

Esimerkki 1D.2

Esimerkki 1E.1

Esimerkki 1E.2

Esimerkki 1F.1

Esimerkki 1F.2

Esimerkki 1G

Esimerkki 1H.1

Esimerkki 1H.2

Esimerkki 1H.3

Esimerkki 1H.4

Käytämme kuitenkin hiukan aikaa seuraavan moniulotteisuuden esille tuoman pulman pohtimiseen. Päinvastoin kuin 1-ulotteisessa maailmassa muuttuja (x_1, x_2) voi lähestyä maalipistettään (a_1, a_2) äärettömän monesta eri suunnasta, eikä vain vasemmalta ($\lim_{x \rightarrow a-}$) tai oikealta ($\lim_{x \rightarrow a+}$). Törmäämme samaan pulmaan myöhemmin ääriarvoja pohtiessamme.

Tehtävä: Osoita, että funktiolla

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

ei ole raja-arvoa origossa.



Esimerkki 1E.2

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Esimerkki 1D.1

Esimerkki 1D.2

Esimerkki 1E.1

Esimerkki 1E.2

Esimerkki 1F.1

Esimerkki 1F.2

Esimerkki 1G

Esimerkki 1H.1

Esimerkki 1H.2

Esimerkki 1H.3

Esimerkki 1H.4

Ratkaisu: Jos $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ pitkin x -akselia, niin tällöin $y = 0$ ja $f(x, y) = f(x, 0) = 0$. Siis

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0.$$

Samoin $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$. Mutta jos lähestymmekin origoa pitkin suoraa $x = y$, niin merkitään $x = t = y$ ja näemme, että

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}.$$

Koska lähestyttävä luku riippuu lähestymissuunnasta, ei funktiolla ole raja-arvoa. Helposti näemme, että $f(t, 2t) \rightarrow 2/5$ kun $t \rightarrow 0$. Itse asiassa mikä tahansa $A \in [-1/2, 1/2]$ esiintyy tällaisen säteittäisen lähestymisen raja-arvona. Vrt. monisteen Kuva 1.10.



Esimerkki 1F.1

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Esimerkki 1D.1

Esimerkki 1D.2

Esimerkki 1E.1

Esimerkki 1E.2

Esimerkki 1F.1

Esimerkki 1F.2

Esimerkki 1G

Esimerkki 1H.1

Esimerkki 1H.2

Esimerkki 1H.3

Esimerkki 1H.4

(Ei käsitelty luennoilla vuonna 2020) Osoitetaan, että funktio $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ on jatkuva määrittelyjoukkonsa pisteessä $P = (1, 0)$.

Ratkaisu: Jotta funktio f olisi määritelty, on oltava $1 - (x^2 + y^2) \geq 0$. Näin ollen sen määrittelyjoukko on yksikköympyrälevy

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Selvästi $P \in A$, ja $f(P) = 0$.

Funktion f arvot ovat aina ei-negatiivisia, joten $f(x, y)$ poikkeaa luvusta $f(P)$ alle ε in jos ja vain jos $f(x, y) < \varepsilon$.

Selvästi $f(x, y) < \varepsilon$ sjsk $0 \leq 1 - (x^2 + y^2) < \varepsilon^2$. Näin ollen $|f(x, y) - f(P)| < \varepsilon$ aina, kun $1 - \varepsilon^2 < x^2 + y^2 \leq 1$.



Esimerkki 1F.2

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Esimerkki 1D.1

Esimerkki 1D.2

Esimerkki 1E.1

Esimerkki 1E.2

Esimerkki 1F.1

Esimerkki 1F.2

Esimerkki 1G

Esimerkki 1H.1

Esimerkki 1H.2

Esimerkki 1H.3

Esimerkki 1H.4

Valitaan $\delta = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Tällöin $\delta > 0$. Jos $d((x, y), P) < \delta$, JA $(x, y) \in A$, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \|(x, y)\| &= d((x, y), (0, 0)) \geq d((0, 0), P) - d((x, y), P) \\ &\geq 1 - \delta = \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Koska $(x, y) \in A$, niin myös $\|(x, y)\| \leq 1$. Näin ollen $f(x, y) < \varepsilon$. MOT.



Esimerkki 1G

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Esimerkki 1D.1

Esimerkki 1D.2

Esimerkki 1E.1

Esimerkki 1E.2

Esimerkki 1F.1

Esimerkki 1F.2

Esimerkki 1G

Esimerkki 1H.1

Esimerkki 1H.2

Esimerkki 1H.3

Esimerkki 1H.4

Monisteen Lause 1.20. antaa meillä helpon työkalun todeta joukko avoimeksi (Lause 1.21 antaa vastaavan työkalun joukon toteamiseksi suljetuksi). Esimerkiksi funktio $f(x, y) = x^3 + y^2$ on alkeisfunktiona jatkuva koko $\mathbb{R}^2$:ssa. Toisaalta väli $U = (-\infty, 2)$ on selvästi avaruuden $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ avoin joukko. Näin ollen Lauseen 1.20 nojalla sen alkukuva

$$f^{-1}(U) = \{(x, y) \mid x^3 + y^2 < 2\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^2$ avoin joukko.

Samalla tavalla näemme, että minkä tahansa vain kaikkialla määriteltyjä alkeisfunktioita sisältävän *aidon* epäyhtälön ratkaisujoukko on välttämättä avoin.



Esimerkki 1H.1

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Esimerkki 1D.1

Esimerkki 1D.2

Esimerkki 1E.1

Esimerkki 1E.2

Esimerkki 1F.1

Esimerkki 1F.2

Esimerkki 1G

Esimerkki 1H.1

Esimerkki 1H.2

Esimerkki 1H.3

Esimerkki 1H.4

Tehtävä: Osoitetaan, että joukko

$$J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -2 \text{ ja } y < 2 - x^2\}$$

on avoin.

Ratkaisu: Joukon J määrittelyssä esiintyy kaksi ehtoa, joten on luontevaa tarkastella niitä erikseen, ja määritellään joukot

$$J_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -2\}, \quad J_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 2 - x^2\},$$

jolloin $J = J_1 \cap J_2$. Lemman 1.9. nojalla riittää osoittaa, että J_1 ja J_2 kumpikin ovat avoimia.



Esimerkki 1H.2

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Esimerkki 1D.1

Esimerkki 1D.2

Esimerkki 1E.1

Esimerkki 1E.2

Esimerkki 1F.1

Esimerkki 1F.2

Esimerkki 1G

Esimerkki 1H.1

Esimerkki 1H.2

Esimerkki 1H.3

Esimerkki 1H.4

Funktiot $f(x, y) = y$ ja $g(x, y) = x^2 + y$ ovat molemmat jatkuvia koko tasossa $A = \mathbb{R}^2$. Koska avoimet välit $U_1 = (-2, \infty)$ ja $U_2 = (-\infty, 2)$ ovat avaruuden $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ avoimia joukkoja, monisteen Lauseen 1.20 nojalla niiden alkukuvat

$$J_1 = f^{-1}(U_1) \quad \text{ja} \quad J_2 = g^{-1}(U_2)$$

ovat avoimia. Väite on näin todistettu.



Esimerkki 1H.3

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Esimerkki 1D.1

Esimerkki 1D.2

Esimerkki 1E.1

Esimerkki 1E.2

Esimerkki 1F.1

Esimerkki 1F.2

Esimerkki 1G

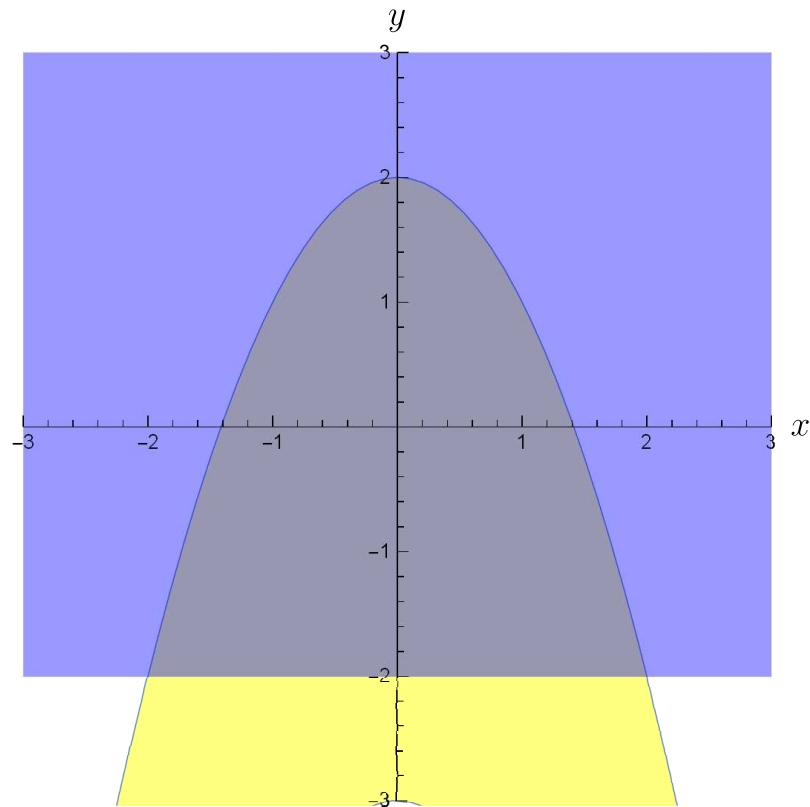
Esimerkki 1H.1

Esimerkki 1H.2

Esimerkki 1H.3

Esimerkki 1H.4

Oheisessa kuvassa mainitut joukot J_1 läpikuultavan sinertävänä, J_2 keltaisena.





Esimerkki 1H.4

Vektorilaskenta
2020

Vektoreista

Topologiasta

Funktioiden
kuvaajista

Vektorifunktion
jatkuvuudesta

Esimerkki 1D.1

Esimerkki 1D.2

Esimerkki 1E.1

Esimerkki 1E.2

Esimerkki 1F.1

Esimerkki 1F.2

Esimerkki 1G

Esimerkki 1H.1

Esimerkki 1H.2

Esimerkki 1H.3

Esimerkki 1H.4

Jos sitä vastoin sallimme määrittelevissä epäyhtälöissä yhtäsuuruuden, niin näemme vastaavasti Lauseen 1.21. avulla, että joukko

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -2 \text{ ja } y \leq 2 - x^2\}$$

on suljettu.

Kuvasta on ilmeistä, että joukon K pisteet ovat (suljetun) laatikon $[-2, 2] \times [-2, 2]$ sisällä. Näin ollen kaikille $(x, y) \in K$ on voimassa $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} < 3$. Tämä tarkoittaa sitä, että joukko K sisältyy palloon $B((0, 0); 3)$. Joukko K on siis myös rajoitettu, ja näin ollen K on kompakti.