



Luentomuistiinpanoja luvusta 2



Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Esimerkki 2A.1

Esimerkki 2A.2

Esimerkki 2A.3

Esimerkki 2A.4

Esimerkki 2A.5

Esimerkki 2A.6

Esimerkki 2A.7

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjüsääntö

Osittaisderivaatat ja tangentit



Esimerkki 2A.1

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Esimerkki 2A.1

Esimerkki 2A.2

Esimerkki 2A.3

Esimerkki 2A.4

Esimerkki 2A.5

Esimerkki 2A.6

Esimerkki 2A.7

Monisteen
esimerkki

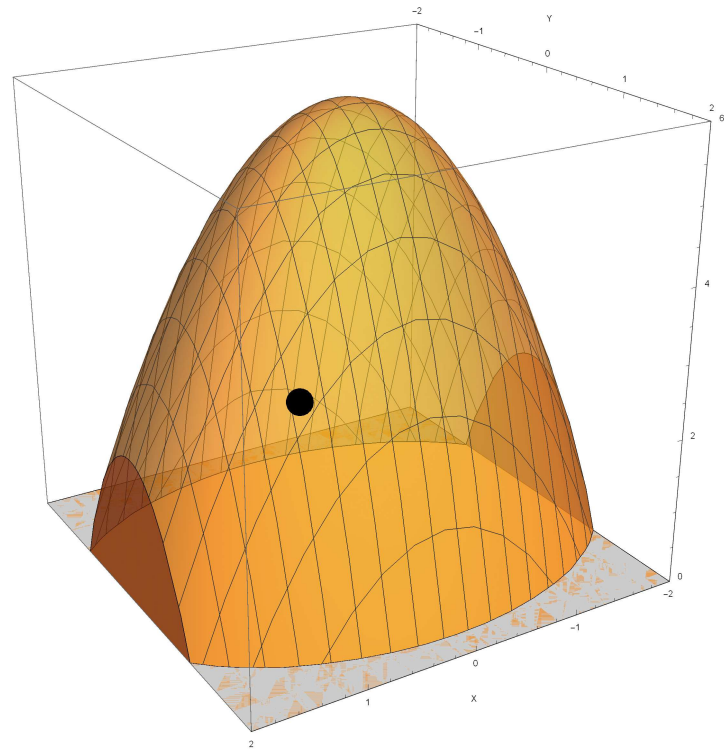
Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Tutkitaan funktion

$$f(x, y) = 6 - x^2 - 2y^2$$

kuvaajaa pisteen $P = (1, 1, f(1, 1) = (1, 1, 3)$ läheisyydessä.





Esimerkki 2A.2

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Esimerkki 2A.1

Esimerkki 2A.2

Esimerkki 2A.3

Esimerkki 2A.4

Esimerkki 2A.5

Esimerkki 2A.6

Esimerkki 2A.7

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Funktion f osittaisderivaatat ovat

$$f_x(x, y) = -2x,$$

$$f_y(x, y) = -4y,$$

joten osittaisderivaatat tutkittavassa pisteessä ovat

$$f_x(1, 1) = -2 \quad \text{ja} \quad f_y(1, 1) = -4.$$

Leikkaamme kuvaajaa tasolla $y = 1$. Kyseisellä tasolla olevan tangenttisuoran kulmakerroin on $f_x(1, 1) = -2$, joten sen parametrimuotoinen yhtälö on

$$x = 1 + h_1, \quad y = 1, \quad z = 3 - 2h_1.$$

Parametrina $h_1 = x - 1$ on x -koordinaatin ero vertailupisteeseen.



Esimerkki 2A.3

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Esimerkki 2A.1

Esimerkki 2A.2

Esimerkki 2A.3

Esimerkki 2A.4

Esimerkki 2A.5

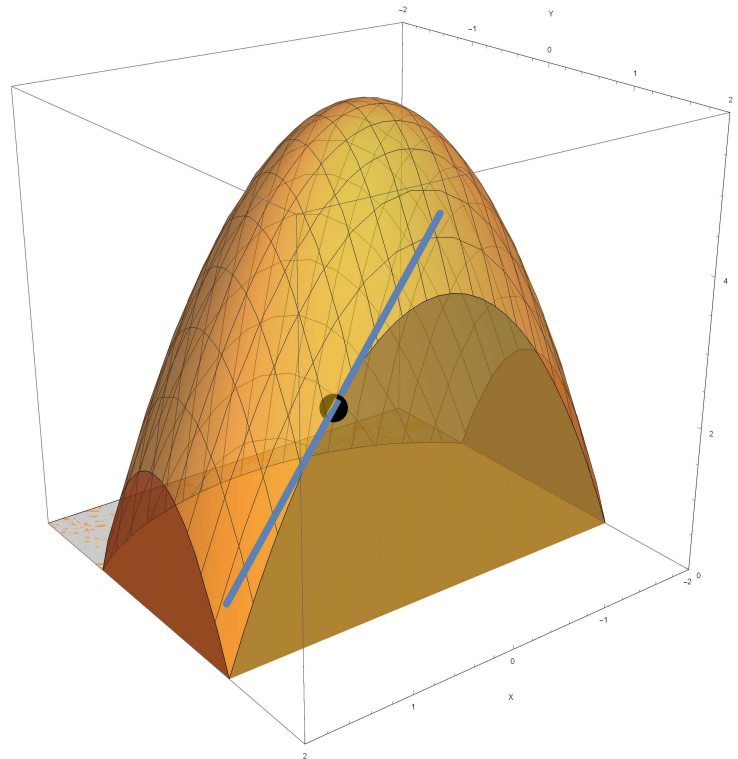
Esimerkki 2A.6

Esimerkki 2A.7

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjüsääntö



Tämä tangentsuora on oheisessa kuvassa. Näkyvyyden parantamiseksi kuvaajapinnasta on jätetty pois aluetta $y > 1$ vastaava osa.



Esimerkki 2A.4

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Esimerkki 2A.1

Esimerkki 2A.2

Esimerkki 2A.3

Esimerkki 2A.4

Esimerkki 2A.5

Esimerkki 2A.6

Esimerkki 2A.7

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Leikkaamme sitten kuvaajaa tasolla $x = 1$. Tällä tasolla tangentsuoran kulmakerroin on $f_y(1, 1) = -4$, joten sen parametrimuotoinen yhtälö on

$$x = 1, \quad y = 1 + h_2, \quad z = 3 - 4h_2.$$

Parametrina $h_2 = y - 1$ on nyt y -koordinaatin ero vertailupisteeseen.

Esimerkki 2A.5

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Esimerkki 2A.1

Esimerkki 2A.2

Esimerkki 2A.3

Esimerkki 2A.4

Esimerkki 2A.5

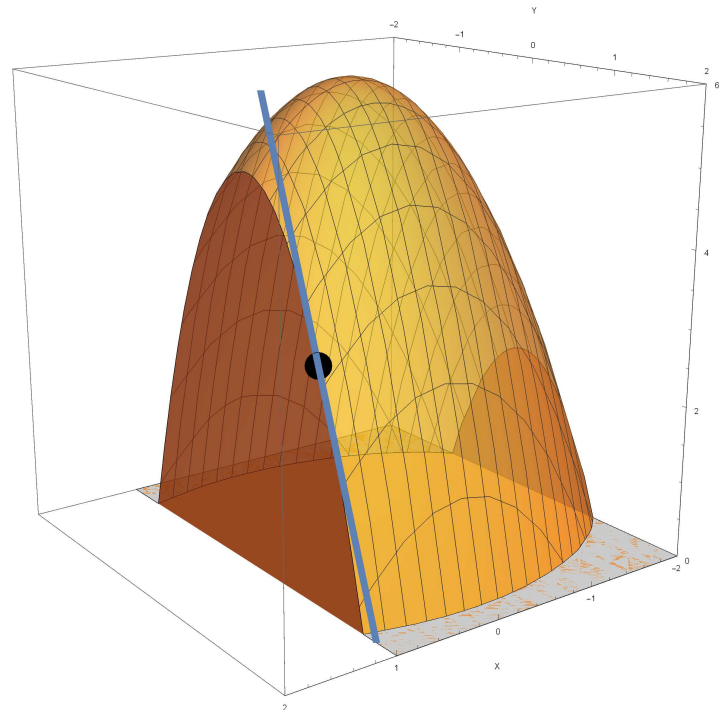
Esimerkki 2A.6

Esimerkki 2A.7

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjüsääntö



Tämä tangentsuora on oheisessa kuvassa. Näkyvyyden parantamiseksi kuvaajapinnasta on jätetty pois aluetta $x > 1$ vastaava osa.



Esimerkki 2A.6

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Esimerkki 2A.1

Esimerkki 2A.2

Esimerkki 2A.3

Esimerkki 2A.4

Esimerkki 2A.5

Esimerkki 2A.6

Esimerkki 2A.7

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjüsääntö

Koska funktio f on differentioituva (osittaisderivaatat ovat kaikkialla jatkuvia, jolloin Lause 2.10 puree), sille saadaan tangenttitaso. Se on taso, joka sisältää yllä löydettyt koordinaattitasojen suuntaiset tangenttisuorat. Sille saadaan parametrisointi

$$x = 1 + h_1, \quad y = 1 + h_2, \quad z = 3 - 2h_1 - 4h_2.$$

Tässä $Df(1, 1)(h_1, h_2) = -2h_1 - 4h_2$ on funktion f derivaatta pisteessä $(1, 1)$. Eliminoimalla h_1 ja h_2 saadaan tangenttitason yhtälöksi

$$z = 9 - 2x - 4y.$$

Esimerkki 2A.7

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Esimerkki 2A.1

Esimerkki 2A.2

Esimerkki 2A.3

Esimerkki 2A.4

Esimerkki 2A.5

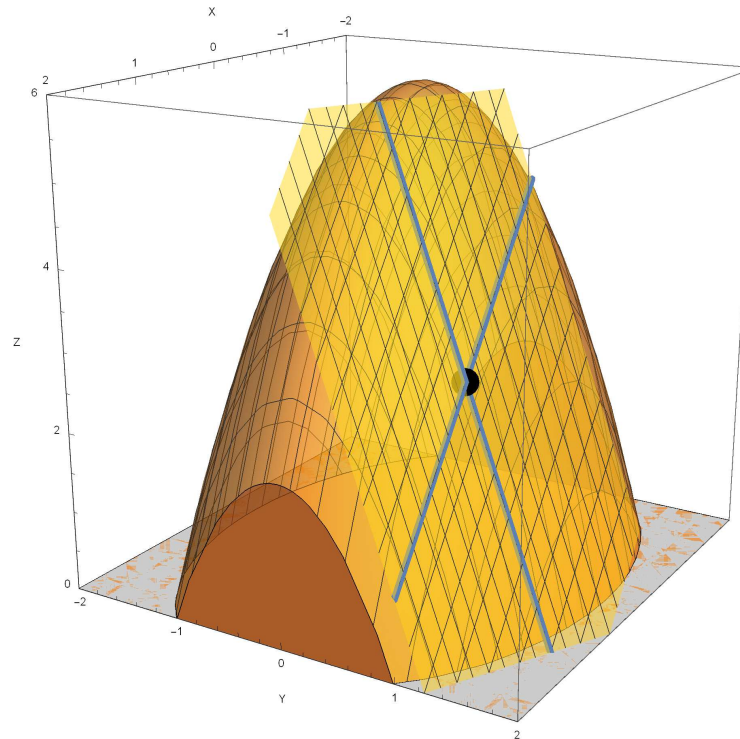
Esimerkki 2A.6

Esimerkki 2A.7

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjüsääntö



Tässä osittaisderivaattoja vastaavat poikkileikkaustasojen tangenttisuorat sekä koko tangenttitaso.



Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

**Monisteen
esimerkki**

Esimerkki 2B.1

Esimerkki 2B.2

Esimerkki 2B.3

Esimerkki 2B.4

Esimerkki 2B.5

Esimerkki 2B.6

Esimerkki 2B.7

Esimerkki 2B.8

Esimerkki 2B.9

Esimerkki 2B.10

Esimerkki 2B.11

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Monisteen esimerkki



Esimerkki 2B.1

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Esimerkki 2B.1

Esimerkki 2B.2

Esimerkki 2B.3

Esimerkki 2B.4

Esimerkki 2B.5

Esimerkki 2B.6

Esimerkki 2B.7

Esimerkki 2B.8

Esimerkki 2B.9

Esimerkki 2B.10

Esimerkki 2B.11

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Tutkitaan monisteen Esimerkin 2.20 kukkulaa

$$f(x, y) = 1/(1 + x^2 + xy + y^2).$$

Yleisenä huomiona todetaan, että nimittäjässä esiintyvä neliömuoto $x^2 + xy + y^2$ saa vain ei-negatiivisia arvoja, sillä neliöksi täydentämällä

$$x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2.$$

Tässä lisäksi $x + y/2 = 0$ ja $y = 0$ häviävät samanaikaisesti vain origossa. Näin ollen f :n arvot ovat välillä $(0, 1]$, ja suurin arvo $f(0, 0) = 1$ saavutetaan vain origossa.



Esimerkki 2B.2

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Esimerkki 2B.1

Esimerkki 2B.2

Esimerkki 2B.3

Esimerkki 2B.4

Esimerkki 2B.5

Esimerkki 2B.6

Esimerkki 2B.7

Esimerkki 2B.8

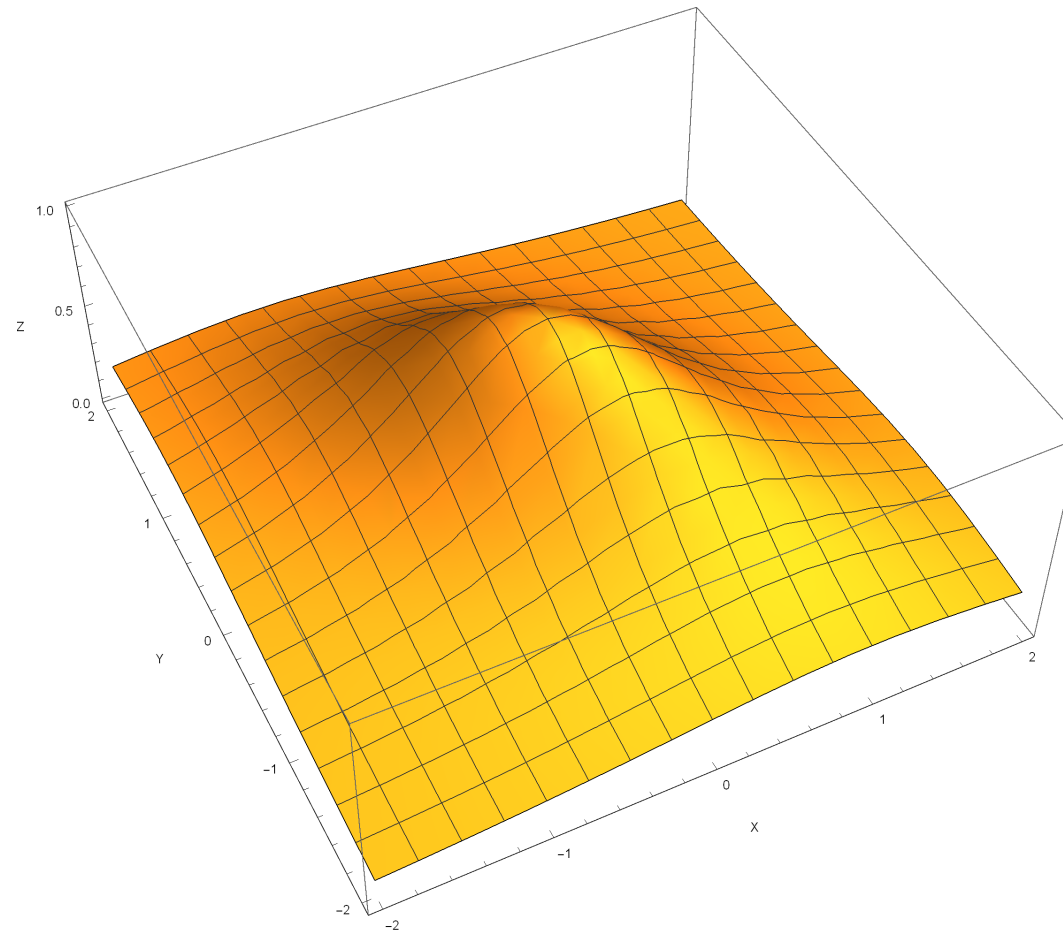
Esimerkki 2B.9

Esimerkki 2B.10

Esimerkki 2B.11

Napakoordinaatit

Ketjüsääntö





Esimerkki 2B.3

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Esimerkki 2B.1

Esimerkki 2B.2

Esimerkki 2B.3

Esimerkki 2B.4

Esimerkki 2B.5

Esimerkki 2B.6

Esimerkki 2B.7

Esimerkki 2B.8

Esimerkki 2B.9

Esimerkki 2B.10

Esimerkki 2B.11

Napakoordinaatit

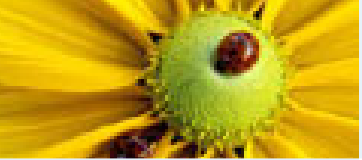
Ketjusääntö

Osittaisderivoimalla nähdään, että funktion f gradientti on

$$\nabla f(x, y) = -\frac{1}{(1 + x^2 + xy + y^2)^2} (2x + y, x + 2y).$$

Seuraavalla kalvolla uudestaan gradienttia vastaava vektorikenttä sekä funktion f tasa-arvokäyrästö (=kukkulan kartan korkeuskäyrät).

Huomaa, että gradienttikenttä on kaikkialla kohtisuorassa tasa-arvokäyriä vastaan.



Esimerkki 2B.4

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Esimerkki 2B.1

Esimerkki 2B.2

Esimerkki 2B.3

Esimerkki 2B.4

Esimerkki 2B.5

Esimerkki 2B.6

Esimerkki 2B.7

Esimerkki 2B.8

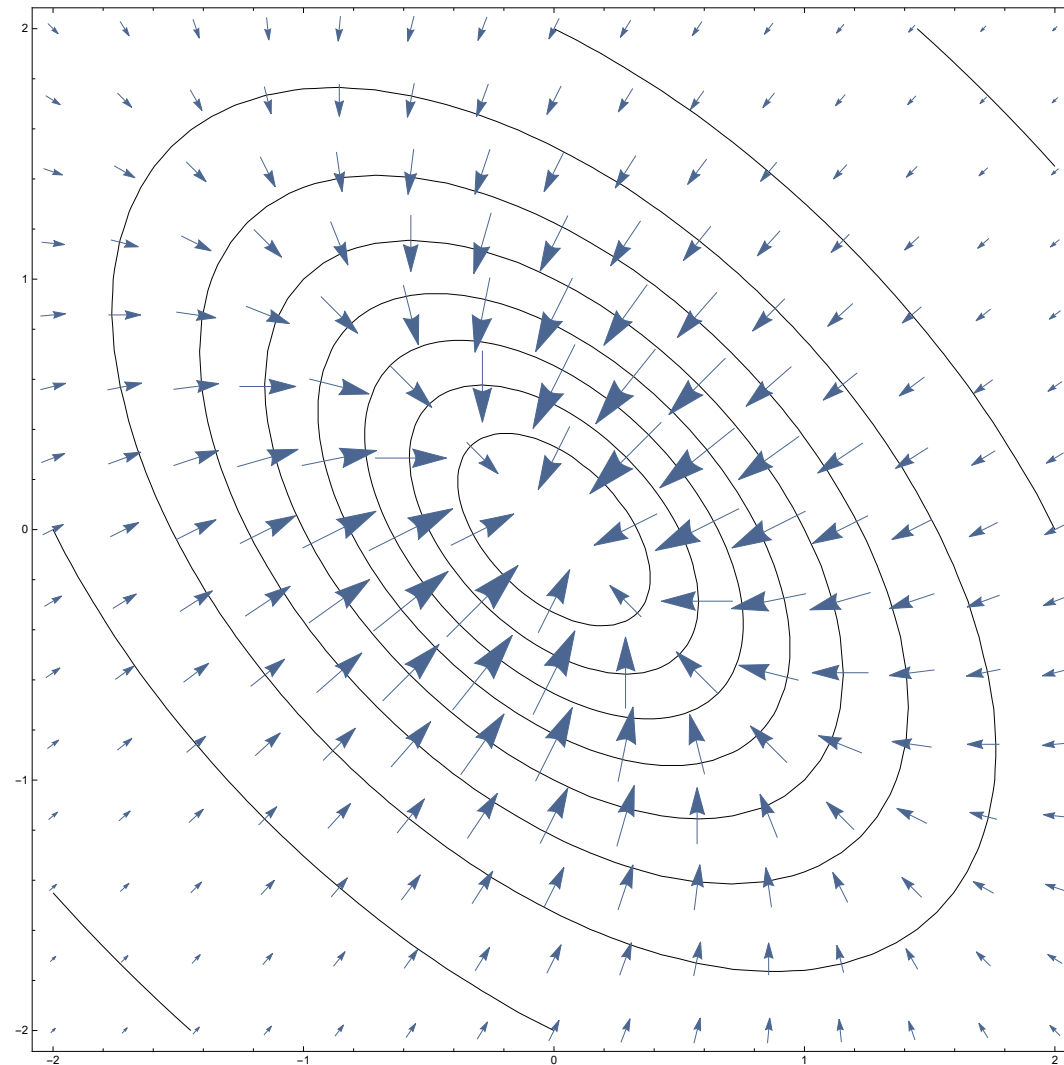
Esimerkki 2B.9

Esimerkki 2B.10

Esimerkki 2B.11

Napakoordinaatit

Ketjusääntö





Esimerkki 2B.5

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Esimerkki 2B.1

Esimerkki 2B.2

Esimerkki 2B.3

Esimerkki 2B.4

Esimerkki 2B.5

Esimerkki 2B.6

Esimerkki 2B.7

Esimerkki 2B.8

Esimerkki 2B.9

Esimerkki 2B.10

Esimerkki 2B.11

Napakoordinaatit

Ketjüsääntö

Tehtävä 1: Kukkulalla on suunnistaja pisteessä $P = (1; -0,3)$. Hän liikkuu kompassisuuntaan 350° . Onko hän menossa ylämäkeen vai alamäkeen?

Ratkaisu: Kompassipohjoinen $0^\circ = 360^\circ$ on (näin ainakin ajattelin!) y -akselin suunnassa (suuntakulma 90°), ja x -akseli (suuntakulma 0°) puolestaan osoittaa itään, eli kompassisuuntaan 90° . Näin ollen suuntakulma 100° vastaa suunnistajan kompassisuuntaa. Suunnistajan suunnan antaa siis yksikkövektori

$$\mathbf{u} = (\cos 100^\circ, \sin 100^\circ) \approx (-0,174; 0,985).$$



Esimerkki 2B.6

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Esimerkki 2B.1

Esimerkki 2B.2

Esimerkki 2B.3

Esimerkki 2B.4

Esimerkki 2B.5

Esimerkki 2B.6

Esimerkki 2B.7

Esimerkki 2B.8

Esimerkki 2B.9

Esimerkki 2B.10

Esimerkki 2B.11

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Vastaus kysymykseen saadaan laskemalla suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{u}}f(P)$. Koska gradientti pisteessä P on

$$\nabla f(P) \approx (-0,531; -0,125)$$

saadaa suunnatuksi derivaataksi sisätulosta

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = (\mathbf{u}, \nabla f(P)) \approx -0,031.$$

Koska tämä on negatiivinen, voimme päätellä suunnistajan olevan menossa alamäkeen. Seuraavalla kalvolla suunnistajan sijainti on kuvattu punaisella täplällä ja hänen suuntansa vihreällä nuolella.



Esimerkki 2B.7

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Esimerkki 2B.1

Esimerkki 2B.2

Esimerkki 2B.3

Esimerkki 2B.4

Esimerkki 2B.5

Esimerkki 2B.6

Esimerkki 2B.7

Esimerkki 2B.8

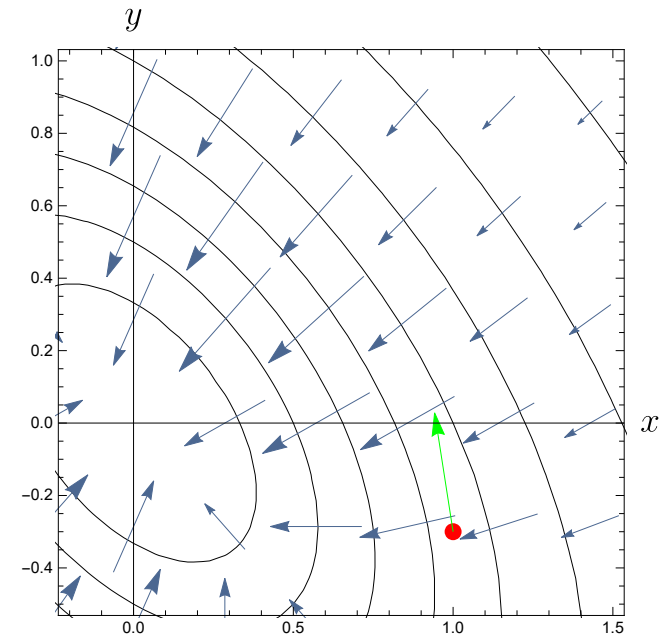
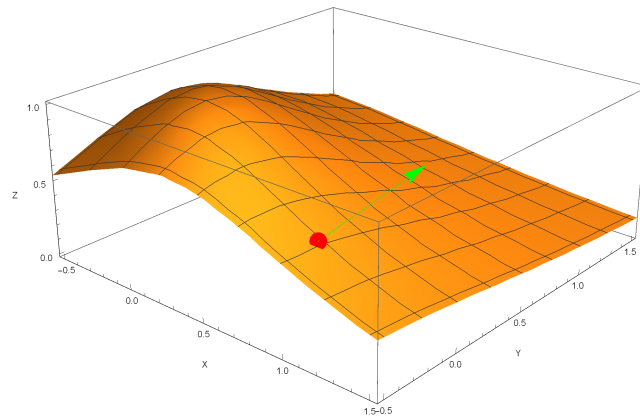
Esimerkki 2B.9

Esimerkki 2B.10

Esimerkki 2B.11

Napakoordinaatit

Ketjusääntö





Esimerkki 2B.8

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Esimerkki 2B.1

Esimerkki 2B.2

Esimerkki 2B.3

Esimerkki 2B.4

Esimerkki 2B.5

Esimerkki 2B.6

Esimerkki 2B.7

Esimerkki 2B.8

Esimerkki 2B.9

Esimerkki 2B.10

Esimerkki 2B.11

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Tehtävä 2: Kukulalla on pisteessä

$B = (1/4, -1/4, f(1/4, -1/4))$ bongari. Hän tarkkailee kukkulan huipulla olevaan pääseensä laskeutuvaa kotkaa. Kotka on juuri häipymässä bongarin näkyvistä. Näin käy (mieti tilannetta muistaen, että bongari on häviävän pieni kukkulaan verrattuna), kun kotka on kukkulan pisteeseen B piirretyllä tangenttitasolla. Kuinka korkealla pesänsä yläpuolella kotka on kyseisellä hetkellä?



Esimerkki 2B.9

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Esimerkki 2B.1

Esimerkki 2B.2

Esimerkki 2B.3

Esimerkki 2B.4

Esimerkki 2B.5

Esimerkki 2B.6

Esimerkki 2B.7

Esimerkki 2B.8

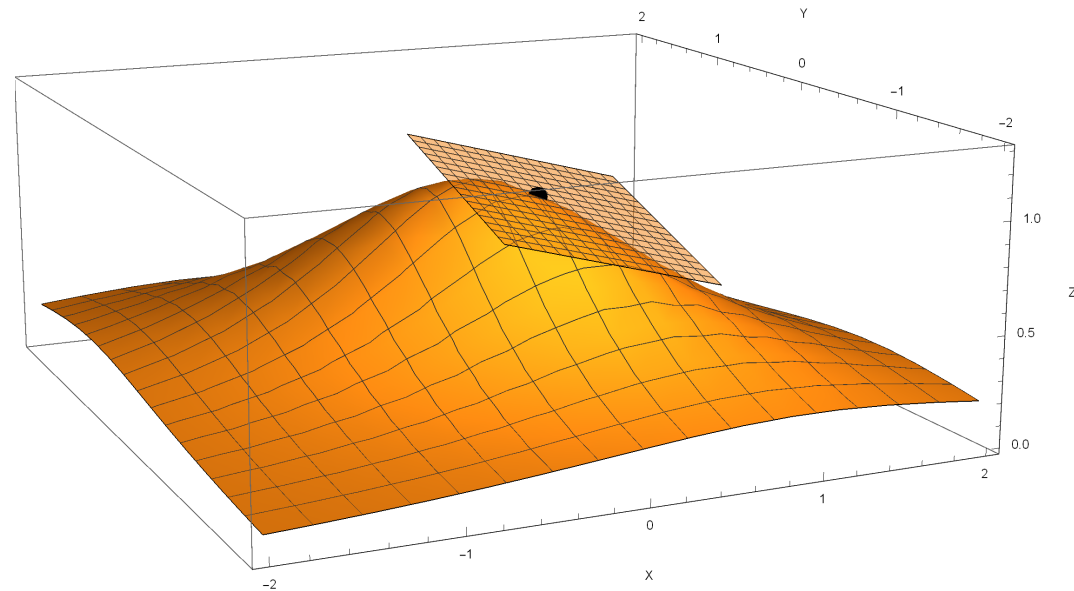
Esimerkki 2B.9

Esimerkki 2B.10

Esimerkki 2B.11

Napakoordinaatit

Ketjüsääntö



Bongari (musta täplä) ja hänen näkyvyyttään rajaava tangenttitaso.



Esimerkki 2B.10

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Esimerkki 2B.1

Esimerkki 2B.2

Esimerkki 2B.3

Esimerkki 2B.4

Esimerkki 2B.5

Esimerkki 2B.6

Esimerkki 2B.7

Esimerkki 2B.8

Esimerkki 2B.9

Esimerkki 2B.10

Esimerkki 2B.11

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Ratkaisu: Pisteessä $(1/4, -1/4)$ saadaan gradientiksi

$$\nabla f(1/4, -1/4) = \left(-\frac{64}{289}, \frac{64}{289}\right),$$

ja kukkulan korkeudeksi $z_0 = f(1/4, -1/4) = 16/17$. Näin ollen bongarin tangenttitason yhtälö on

$$z = \frac{16}{17} - \frac{64}{289}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{64}{289}\left(y + \frac{1}{4}\right).$$

Sijoittamalla tähän $x = y = 0$ nähdään, että huipun kohdalla tangenttitaso on korkeudella



Esimerkki 2B.11

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Esimerkki 2B.1

Esimerkki 2B.2

Esimerkki 2B.3

Esimerkki 2B.4

Esimerkki 2B.5

Esimerkki 2B.6

Esimerkki 2B.7

Esimerkki 2B.8

Esimerkki 2B.9

Esimerkki 2B.10

Esimerkki 2B.11

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

$$z = \frac{16}{17} + \frac{16 + 16}{289} = \frac{304}{289}.$$

Koska $z - 1 = 15/289 \approx 0,052$, saimme, että laskeutuessaan tangenttitason alapuolelle kotka on 52 metriä pesänsä yläpuolella.



Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Määritelmä
(1/3)

Määritelmä
(2/3)

Määritelmä
(3/3)

Esimerkki 2C.1

Esimerkki 2C.2

Esimerkki 2C.3

Esimerkki 2C.4

Esimerkki 2C.5

Ketjusääntö

Napakoordinaatit



Määritelmä (1/3)

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Määritelmä
(1/3)

Määritelmä
(2/3)

Määritelmä
(3/3)

Esimerkki 2C.1

Esimerkki 2C.2

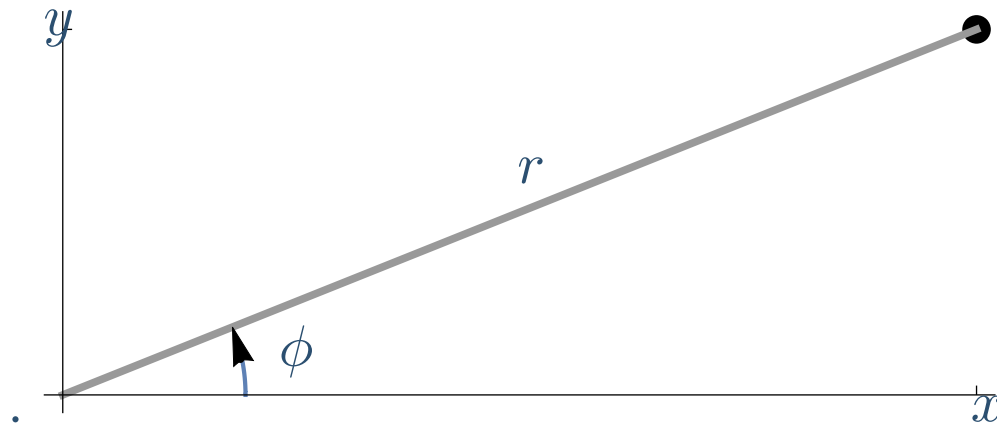
Esimerkki 2C.3

Esimerkki 2C.4

Esimerkki 2C.5

Ketjusääntö

Tason pisteen P sijainti voidaan *karteesisten* xy -koordinaattien asemesta kertoa antamalla sen etäisyys r origosta, sekä origosta ko. pisteeseen suuntautuvan vektorin suuntakulma ϕ .





Määritelmä (2/3)

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Määritelmä
(1/3)

Määritelmä
(2/3)

Määritelmä
(3/3)

Esimerkki 2C.1

Esimerkki 2C.2

Esimerkki 2C.3

Esimerkki 2C.4

Esimerkki 2C.5

Ketjüsääntö

Lukuja r ja ϕ kutsutaan pisteen *napakoordinaateiksi*.

- Jos pisteen napakoordinaatit r, ϕ tunnetaan, sen karteesiset koordinaatit saadaan kaavoista

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi.$$

- Jos taas tunnetaan pisteen karteesiset koordinaatit, sen napakoordinaatit saadaan yhtälöistä

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \phi = y/x.$$



Määritelmä (3/3)

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Määritelmä
(1/3)

Määritelmä
(2/3)

Määritelmä
(3/3)

Esimerkki 2C.1

Esimerkki 2C.2

Esimerkki 2C.3

Esimerkki 2C.4

Esimerkki 2C.5

Ketjüsääntö

- Tässä on huomattava, että tangentin arvo jättää suuntakulmalle epämääräisyyden, joka on π :n kokonaislukumonikerta. Pisteen neljännes havainnoimalla suuntakulma määräytyy luvun 2π monikertaa vaille, mutta $+n \cdot 2\pi$ -epämääräisyyttä ei voi välttää (ja näyttelee isoa roolia myöhemmillä kursseilla).
- Usein vaaditaan $r \geq 0$ ja rajataan ϕ jollekin 2π -mittaiselle välille. Suosttuja vaihtoehtoja ovat $\phi \in [0, 2\pi)$ ja $\phi \in (-\pi, \pi]$. Mainittu funktio $(x, y) = f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ on kuitenkin järkevä kaikille (r, ϕ) -pareille.



Esimerkki 2C.1

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Määritelmä
(1/3)

Määritelmä
(2/3)

Määritelmä
(3/3)

Esimerkki 2C.1

Esimerkki 2C.2

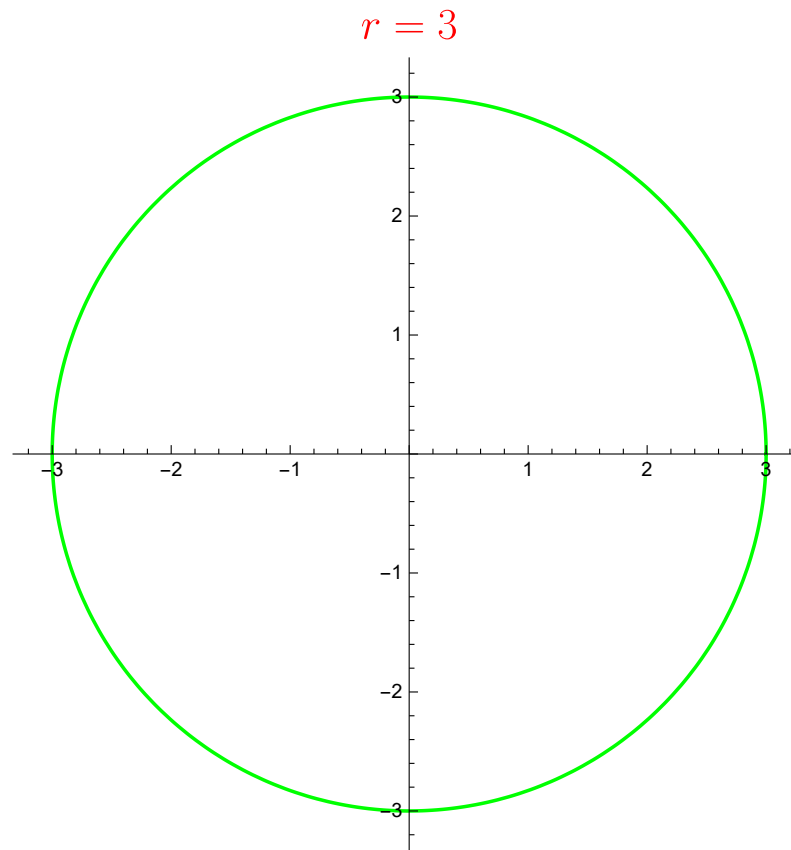
Esimerkki 2C.3

Esimerkki 2C.4

Esimerkki 2C.5

Ketjusääntö

Napakoordinaattiyhtälö $r = R$ (=vakio, ei riipu kulmasta ϕ)
määrittelee origokeskisen R -säteisen ympyrän.





Esimerkki 2C.2

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Määritelmä
(1/3)

Määritelmä
(2/3)

Määritelmä
(3/3)

Esimerkki 2C.1

Esimerkki 2C.2

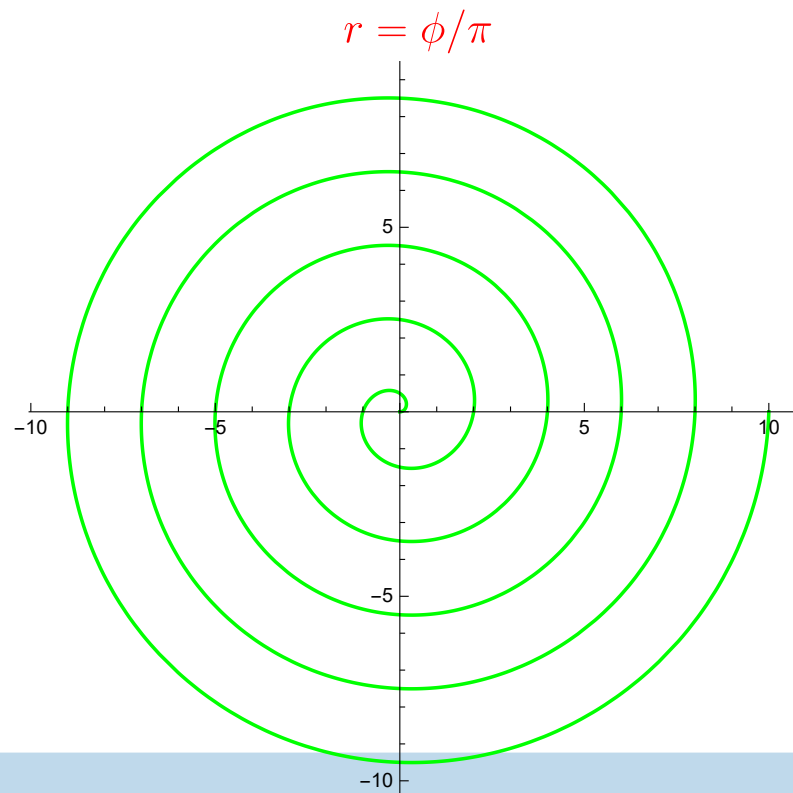
Esimerkki 2C.3

Esimerkki 2C.4

Esimerkki 2C.5

Ketjüsääntö

Napakoordinaattiyhtälö $r = \phi/\pi$, $\phi \in [0, \infty)$, määrittelee ns. *Arkhimedeen spiraalin*. Huomaa, että $r(\phi + n \cdot 2\pi) = r(\phi) + 2n$. Näin ollen Arkhimedeen spiraalilla on suunnassa ϕ äärettömän monta pistettä, joiden etäisyydet kasvavat aritmeettisena jononan kahden yksikön välein.





Esimerkki 2C.3

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Määritelmä
(1/3)

Määritelmä
(2/3)

Määritelmä
(3/3)

Esimerkki 2C.1

Esimerkki 2C.2

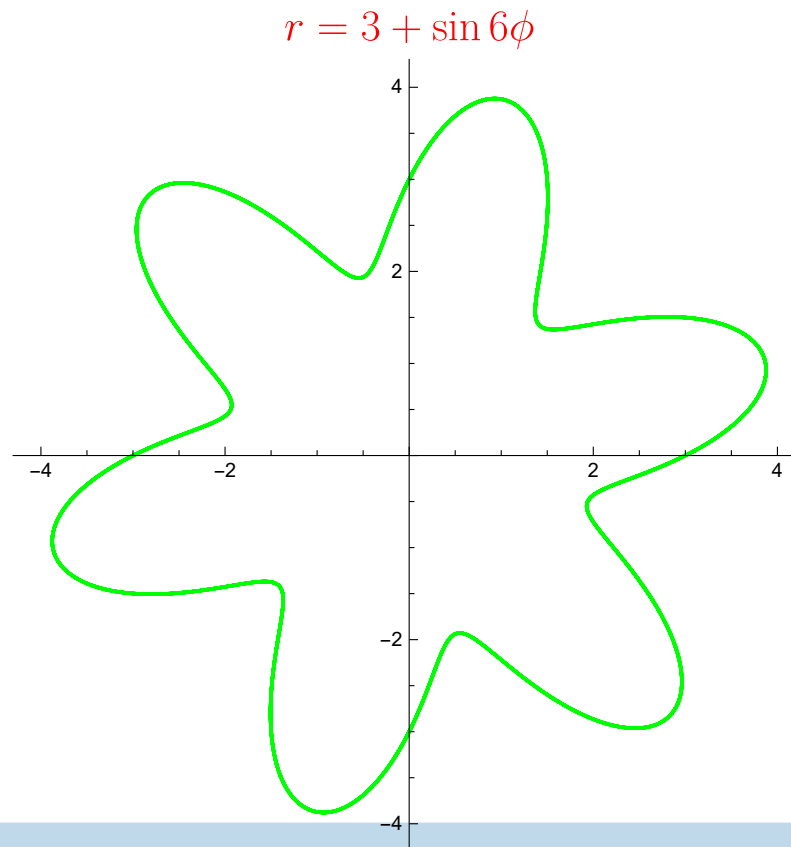
Esimerkki 2C.3

Esimerkki 2C.4

Esimerkki 2C.5

Ketjüsääntö

Funktion $f(x) = 3 + \sin 6x$ arvot heilahtelevat välillä $[2, 4]$. Koska $f(x + 2\pi) = f(x)$, niin napakoordinaattiyhtälön $r = f(\phi)$ määrittelemä käyrä toistaa itseään täyden kierroksen jälkeen. Käyrä heilahtelee ympyröiden $r = 2$ ja $r = 4$ välissä.





Esimerkki 2C.4

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Määritelmä
(1/3)

Määritelmä
(2/3)

Määritelmä
(3/3)

Esimerkki 2C.1

Esimerkki 2C.2

Esimerkki 2C.3

Esimerkki 2C.4

Esimerkki 2C.5

Ketjüsääntö

Napakoordinaattiyhtälö $r = \sin 3\phi$, $\phi \in [0, \pi]$ määrittelee 3-lehtisen apilan. Tässä funktio $\sin 3\phi$ saa välillä negatiivisia arvoja, mutta se ei haittaa siirryttäessä xy -koordinaatteihin kaavoilla $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, missä r :n negatiivisuus ei aiheuta tulkintavaikeuksia. Muodostuva piste on tällöin suunnassa $\phi + \pi$ ja etäisyydellä $-r = -\sin 3\phi$ origosta. Koska $\sin 3(\phi + \pi) = \sin(3\phi + 3\pi) = -\sin 3\phi$, niin tällä kertaa ϕ ja $\phi + \pi$ johtavat samaan pisteeseen, ja käyrä toistaa itseään π :n mittaisissa jaksoissa. Kuva seuraavalla kalvolla.



Esimerkki 2C.5

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Määritelmä
(1/3)

Määritelmä
(2/3)

Määritelmä
(3/3)

Esimerkki 2C.1

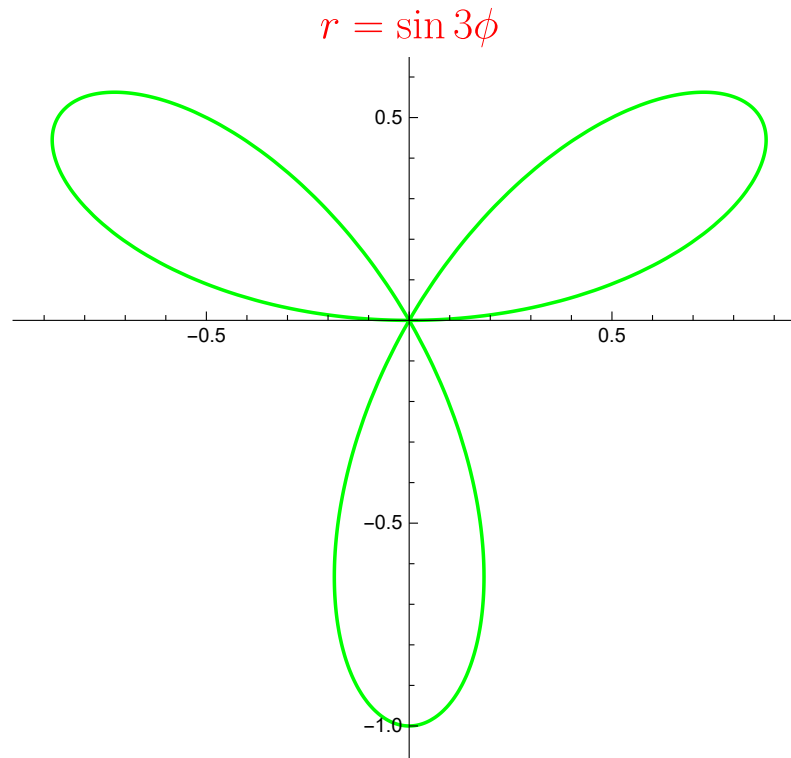
Esimerkki 2C.2

Esimerkki 2C.3

Esimerkki 2C.4

Esimerkki 2C.5

Ketjusääntö





Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Esimerkki 2D.1

Esimerkki 2D.2

Esimerkki 2D.3

Esimerkki 2E.1

Esimerkki 2E.2

Esimerkki 2E.3

Esimerkki 2E.4

Ketjusääntö



Esimerkki 2D.1

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Esimerkki 2D.1

Esimerkki 2D.2

Esimerkki 2D.3

Esimerkki 2E.1

Esimerkki 2E.2

Esimerkki 2E.3

Esimerkki 2E.4

Tehtävä: Johda kahden funktion tulon derivoimiskaava kahden muuttujan funktioita koskevan ketjusäännön seurauksena.

Ratkaisu: Olkoot $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ reaali­muuttujan t derivoituvia funktioita. Näistä kombinoimalla voimme muodostaa funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$. Kertolasku puolestaan määrittelee kaikkialla differentioituvan funktion $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, k(x, y) = xy$. Näiden yhdistettynä funktiona saame funktion

$$h(t) = k(f(t)) = k(x(t), y(t)) = x(t)y(t).$$



Esimerkki 2D.2

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Esimerkki 2D.1

Esimerkki 2D.2

Esimerkki 2D.3

Esimerkki 2E.1

Esimerkki 2E.2

Esimerkki 2E.3

Esimerkki 2E.4

Esiintyvien funktioiden lineaarisiksi derivaatoiksi saadaan
(monisteen Lause 2.19. ja Lause 2.10)

$$Df(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

ja

$$Dk(x, y) = \nabla k(x, y) = (y, x),$$

joten ketjusäännön nojalla saadaan tuttu kaava

$$\begin{aligned} h'(t) &= Dk(x, y)(f(t)) \circ Df(t) = (y(t) \ x(t)) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\ &= y(t)x'(t) + x(t)y'(t). \end{aligned}$$



Esimerkki 2D.3

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Esimerkki 2D.1

Esimerkki 2D.2

Esimerkki 2D.3

Esimerkki 2E.1

Esimerkki 2E.2

Esimerkki 2E.3

Esimerkki 2E.4

Tämä kaava voidaan tulkita seuraavasti. Tulon $x(t)y(t)$ arvo muuttuu muuttujan t muuttuessa kahdesta eri syystä — tekijä x muuttuu, ja toisaalta tekijä y muuttuu. Termi $y(t)x'(t)$ kuvaa tulon sitä muutosta, joka aiheutuu x :n arvon muuttumisesta. Termi $x(t)y'(t)$ puolestaan kuvaa tulon sitä muutosta, joka aiheutuu y :n arvon muuttumisesta. Koska kertolasku on differentioituvaa, tällaiset pienen muutokset tulee laskea yhteen.

Samanlainen tulkinta voidaan antaa Lauseen 2.25 kaavalle osittaisderivaatalle $\partial h_k / \partial x_i$. Summalausekkeessa termi $(\partial h_i / \partial y_j) \cdot (\partial y_j / \partial x_i)$ laskee muuttujan x_i muutoksesta suureen h_k arvoon sen osan, mikä aiheutuu suureen y_j muuttumisesta.



Esimerkki 2E.1

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Esimerkki 2D.1

Esimerkki 2D.2

Esimerkki 2D.3

Esimerkki 2E.1

Esimerkki 2E.2

Esimerkki 2E.3

Esimerkki 2E.4

Tutkitaan funktiota $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2).$$

Määrää funktion f Jacobin matriisi.

Ratkaisu: Tässä $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ ja $f_2(x_1, x_2) = 2x_1x_2$.

Osittaisderivaatat ovat siten

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 2x_1, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -2x_2, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 2x_2, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 2x_1. \end{aligned}$$



Esimerkki 2E.2

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Esimerkki 2D.1

Esimerkki 2D.2

Esimerkki 2D.3

Esimerkki 2E.1

Esimerkki 2E.2

Esimerkki 2E.3

Esimerkki 2E.4

Näin ollen Jacobin matriisiksi pisteessä $P = (x_1, x_2)$ saadaan

$$Df(P) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}.$$

Jatkoa: Muodosta lisäksi yhdistetyn funktion $f \circ f$ Jacobin matriisi pisteessä $P = (1, 1)$ A) ketjusäännön avulla, ja B) muodostamalla funktio $f \circ f$ ja osittaisderivoimalla sen komponentit.

Ratkaisu: Aloitetaan laskemalla

$$f(1, 1) = (1^2 - 1^2, 2 \cdot 1 \cdot 1) = (0, 2).$$



Esimerkki 2E.3

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Esimerkki 2D.1

Esimerkki 2D.2

Esimerkki 2D.3

Esimerkki 2E.1

Esimerkki 2E.2

Esimerkki 2E.3

Esimerkki 2E.4

Tehtävän alkuosan perusteella

$$Df(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ja

$$Df(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Näin ollen ketjusäännön perusteella matriisikertolasku antaa

$$D(f \circ f)(1, 1) = Df(0, 2)Df(1, 1) = \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}.$$



Esimerkki 2E.4

Vektorilaskenta
2020

Osittaisderivaatat
ja tangentit

Monisteen
esimerkki

Napakoordinaatit

Ketjusääntö

Esimerkki 2D.1

Esimerkki 2D.2

Esimerkki 2D.3

Esimerkki 2E.1

Esimerkki 2E.2

Esimerkki 2E.3

Esimerkki 2E.4

Muodostamalla yhdistetty funktion $g = f \circ f$ saadaan

$$g_1(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2)^2 - (2x_1x_2)^2 = x_1^4 - 6x_1^2x_2^2 + x_2^4$$

ja

$$g_2(x_1, x_2) = 2(x_1^2 - x_2^2)(2x_1x_2) = 4x_1^3x_2 - 4x_1x_2^3.$$

Näin ollen

$$Dg(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 12x_1x_2^2 & -12x_1^2x_2 + 4x_2^3 \\ 12x_1^2x_2 - 4x_2^3 & 4x_1^3 - 12x_1x_2^2 \end{pmatrix}$$

ja siis

$$Dg(1, 1) = \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$$

kuten saimme toisellakin tavalla.