



Vektorilaskenta 2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Kolmanteen lukuun liittyvää luentomateriaalia



Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Eubinin lause

Määrätty integraali yli moniulotteisen välin



Filosofiaa 1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Eubinin lause

Ongelma: Haluamme laskea johonkin joukkoon A ("alueeseen") liittyvän suureen S arvon.

- Suure on luonteeltaan alueen pienten osien kontribuutioiden summa (pinta-ala, tilavuus, massa, sähkövaraus, lajin populaatio, arvo euroissa,...).
- Pienen osan kontribuutio suureeseen riippu ei riipu pelkästään osan koosta, vaan myös funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ arvosta kyseisessä osassa.

Integroinnin idea on seuraava. Jaetaan joukko A (pieniin) osiin I_i . Oletetaan, että tiedämme kunkin osan koon eli *mitan* $m(I_i)$. Oletamme, että funktion f arvo ei muutu paljoa osan sisällä. Tällöin osan kontribuutiolle voimme esittää likiarvon $f(x_i)m(I_i)$, missä $x_i \in I_i$. Koko suureelle saadaan arvio

$$S \approx \sum_i f(x_i)m(I_i).$$



Filosofiaa 2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause

Tavallaan tässä $f(x_i)$ edustaa funktion arvoja koko osajoukossa I_i . Koska funktion f arvo kuitenkin hieman vaihtelee osajoukon sisällä, tässä on virhelähde.

Tutkitaan raja-arvoprosessia, jossa osien koot lähestyvät nollaa, ja niiden lukumäärä vastaavasti kasvaa rajatta. Jos voimme perustella, että jakoihin perustuvat summat S tällöin lähestyvät jotakin arvoa, olemme tyytyväisiä. Sanomme, että S saatiin funktion f integraalina yli joukon A ,

$$S = \int_A f.$$

Väliä I_i "edustavan" pisteen x_i (ja siis funktion arvon $f(x_i)$) valintatapa vaikuttaa teorian kehittelyn yksityiskohtiin.



Filosofiaa 3

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause

- Kurssilla Analyysi II käytettiin sille koko välin infimumin ja supremumin avulla tuotettuja ylä- ja alarajoja.
- Tällöin teorian kehittäminen on suhteellisen mutkatonta, kun rajaprosessin aikana suuretta S arvioidaan ylä- ja alapuolelta siten, että sille jää olematon liikkumatila.
- Vanhemmassa *Riemannin summiin* perustuvassa lähestymistavassa, piste x_i valitaan osajoukosta I_i "satunnaisesti". Raja-arvoprosessin lopputulos on tällöin sama, mutta teorian yksityiskohtien perustelut ovat satunnaisvalinnan seurauksena hieman mutkikkaampia.
- Kurssin loppupuolella kuitenkin törmätään vektorikenttiin liittyvien integraalien yhteydessä tilanteisiin, joissa ylä- ja alasummiin perustuva tutkimus ei tunnu yhtä luontevalta. Osin tästä syystä emme käsittele ko. integraaleja erityisen täsmällisesti.



Välin mitta

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause

Käytämme n -ulotteisiksi välejä (tai laatikoita)

$$\begin{aligned} I &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ kaikille } i\} \end{aligned}$$

missä $a_i \leq b_i$. Välin I *mitta* on

$$m(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Jos $n = 1$, niin $m([a, b]) = b - a$ on välin pituus. Jos $n = 2$ on kyseessä suorakaiteen pinta-ala. Jos $n = 3$ on kyseessä suorakulmaisen särmiön tilavuus.

Kutsutaan lukua $d(I) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}$ välin I *halkaisijaksi*.



Alasumma 1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause

Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ väli, ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio.

Valitsemalla kutakin koordinaattia $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, kohti välin $[a_i, b_i]$ jaon D_i (eli jakopisteitä

$x_{i0} = a_i < x_{i1} < x_{i2} < \dots < x_{ik_i} = b_i$) saamme osavälien karteesisien tulojen $I_1, I_2, \dots, I_m$ kokoelman ($m = \prod_i k_i$).

- I on osavälien I_i unioni.
- Osavälien sisäosat eivät leikkaa toisiaan, eli leikkauksiin kuuluvat pisteet ovat välien reunoilla.
- Kutsutaan myös kokoelmaa $P = \{I_i \mid i = 1, 2, \dots, m\}$ välin I jaoksi.
- Kullakin osavälillä I_i funktiolla f on infimum $m_i := \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in I_i\}$.
- Voidaan muodostaa funktion f alasumma jaon P suhteen:

$$s_P(f) = \sum_{i=1}^m m_i m(I_i).$$



Alasumma 2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

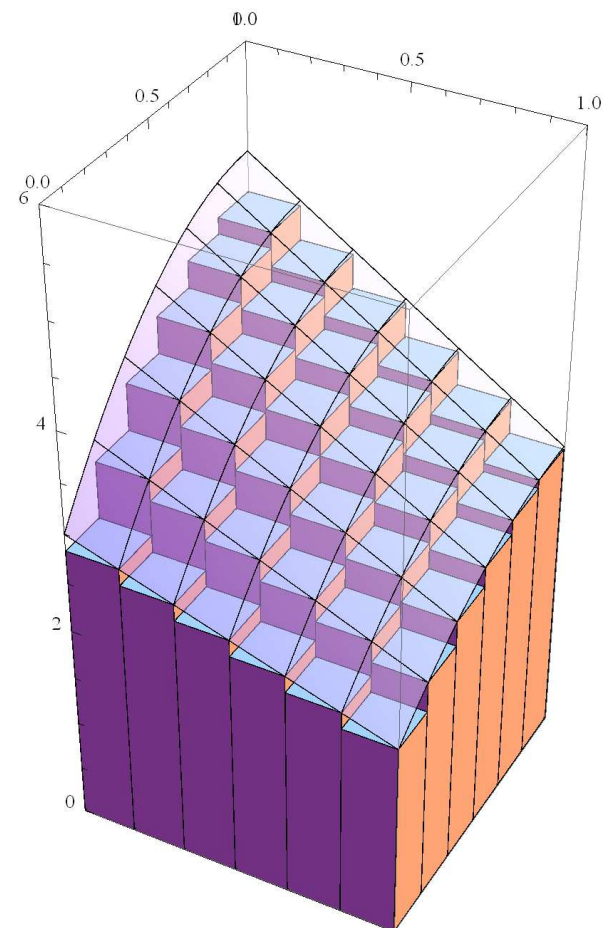
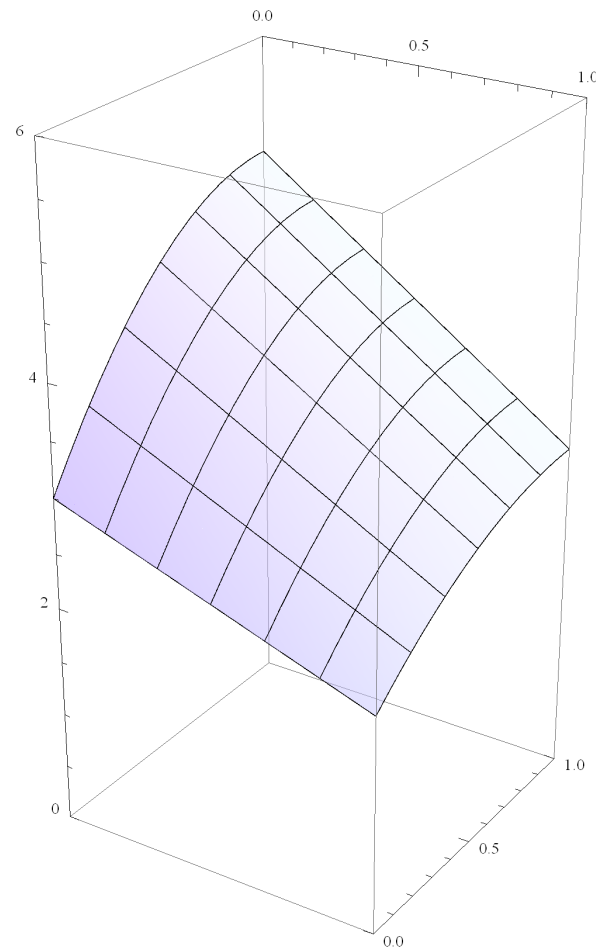
Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Eubinin lause

Vasemmanpuoleisen kuvan funktion eräs alasumma saadaan oikeanpuoleisen kuvan pylväiden yhteenlaskettuna mittana.





Yläsumma 1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Eubinin lause

Vastaavasti koska funktiolla f on jokaisella jaon P osavälillä I_i myös supremum $M_i := \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in I_i\}$ saamme yläsumman

$$S_P(f) = \sum_{i=1}^m M_i m(I_i).$$

Selvästi aina

$$S_P(f) \geq s_P(f)$$

, ja erotus $S_P(f) - s_P(f)$ voidaan visualisoida (tapauksessa $n = 2$) kuvaajan alle jäävien, ja sen nipin napin ylittävien pylväiden "erotuslaatikoiden" mittojen $m(I_i)[M_i - m_i]$ summana.



Yläsumma 2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välän mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

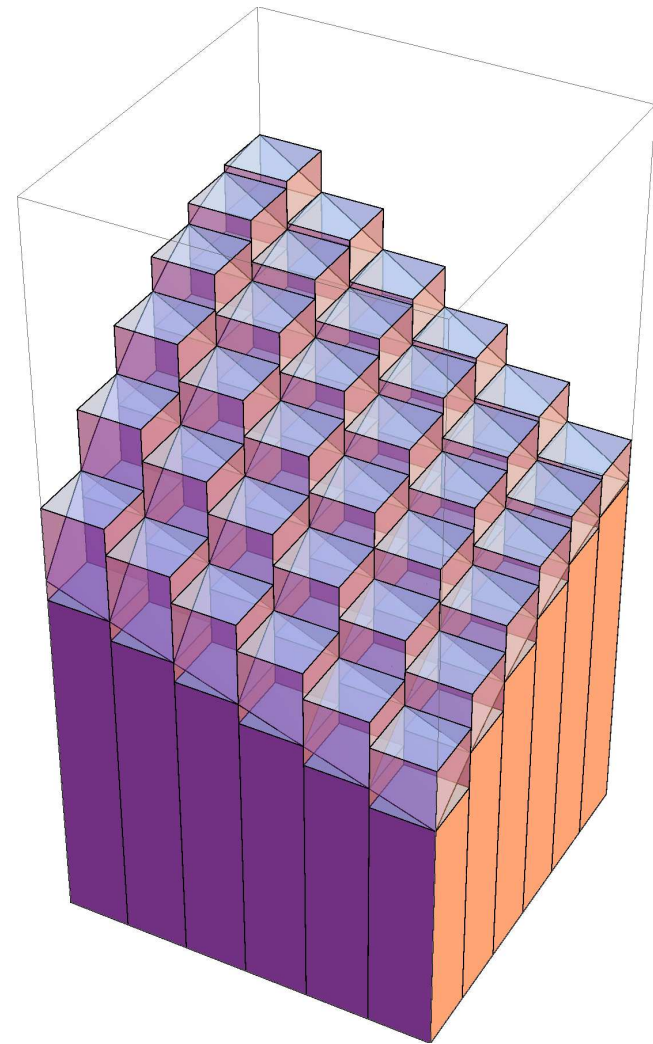
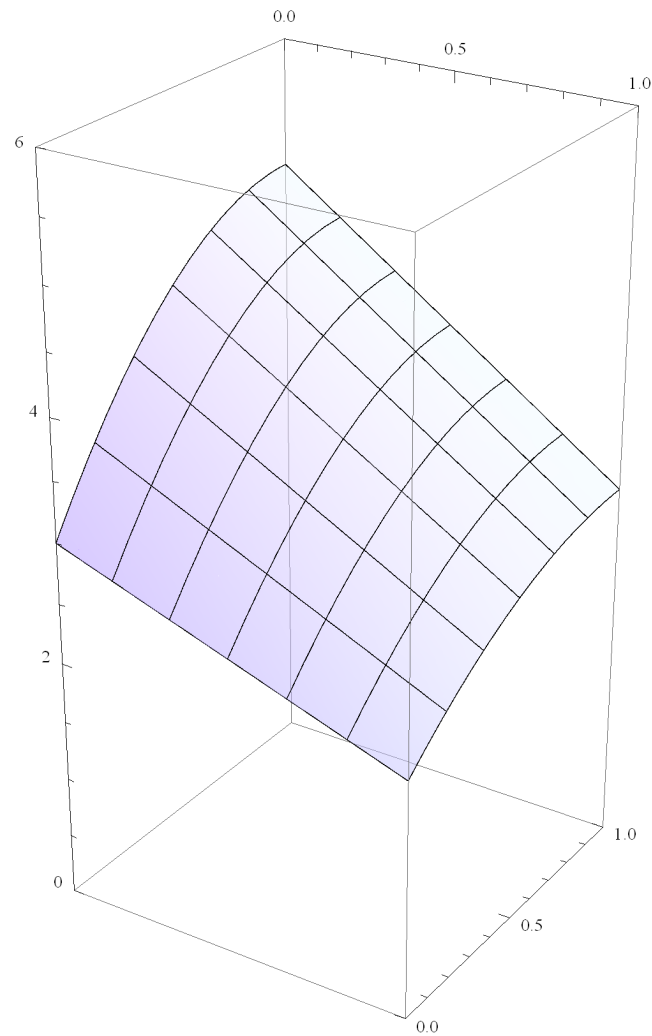
Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Eubinin lause





Tihennys 1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Eubinin lause

- Voimme Analyysi II:n tapaan tihentää jakoja (joidenkin tai kaikkien koordinaattien suhteen) lisäämällä jakoihin D_i lisää jakopisteitä. Kutsumme myös tällä tavalla saatua välin I jakoa P' jaon P *tihennekseksi*.
- Kuten yhden muuttujan tapauksessakin tihennyksessä yläsumma pienenee ja alasumma kasvaa:

$$s_P(f) \leq s_{P'}(f) \leq S_{P'}(f) \leq S_P(f).$$

- Ylä- ja alasumman erotus siis pienee tihennykseen siirryttäessä

$$S_{P'}(f) - s_{P'}(f) \leq S_P(f) - s_P(f).$$



Tihennys 2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

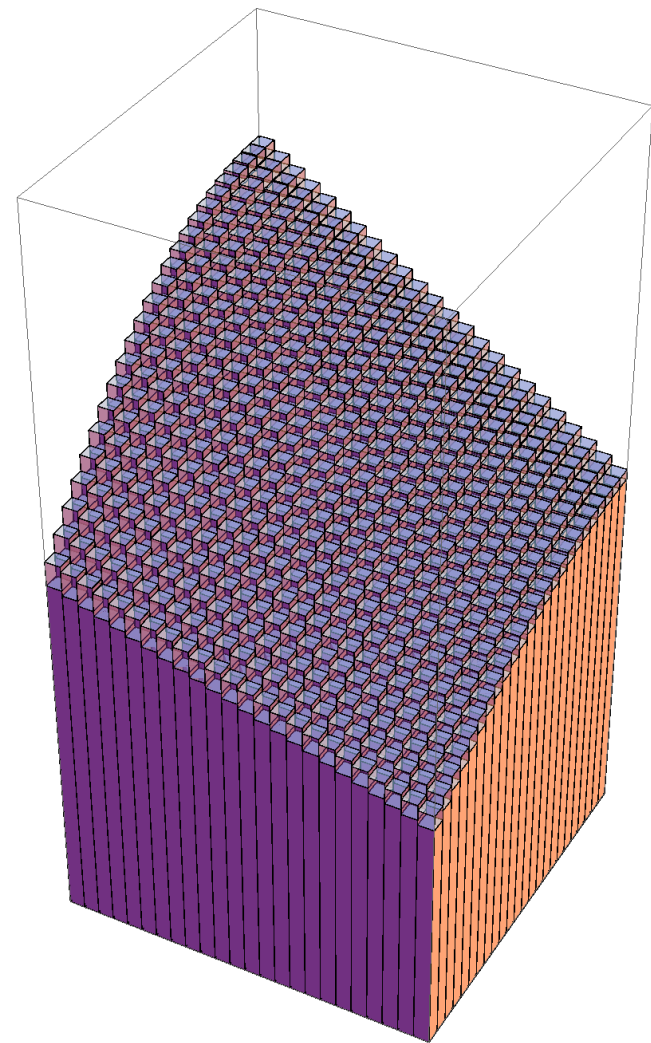
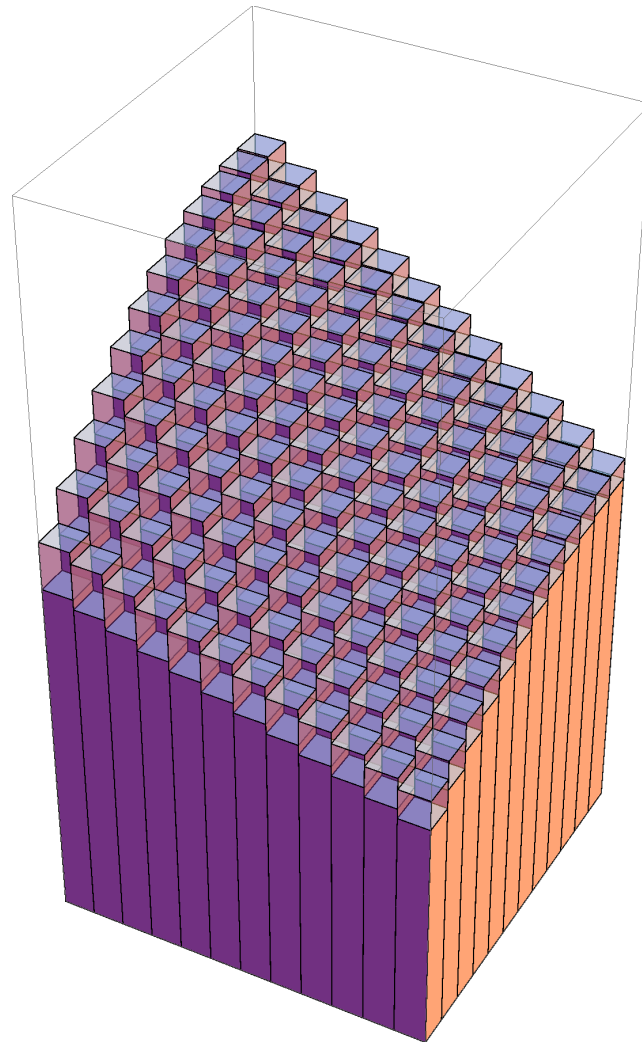
Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Eubinin lause





Integroituvuus

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välän mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause

Kuten yhden muuttujan funktionkin tapauksessa:

- Kun jakoa tihennetään, yläsumma pienenee ja alasumma kasvaa (ei välttämättä aidosti).
- Kahdella eri jaolla on yhteinen tihennys.
- Mikä tahansa yläsumma $\geq$ mikä tahansa alasumma.
- Voidaan määritellä ylä- ja alaintegraalit (yläsummien infimum, alasummien supremum).
- Integroituvuus $\Leftrightarrow$ ylä- ja alaintegraalit yhtyvät.
- Eli kutakin $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen jako $P = P(\varepsilon)$, että $S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon$.
- Eli on olemassa jono jakoja $P_1, P_2, \dots$, joille $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{P_k}(f) - s_{P_k}(f) = 0$.
- Integraalista käytetään merkintöjä

$$\int_I f \quad \text{ja} \quad \int_I f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$



Jatkuva 1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

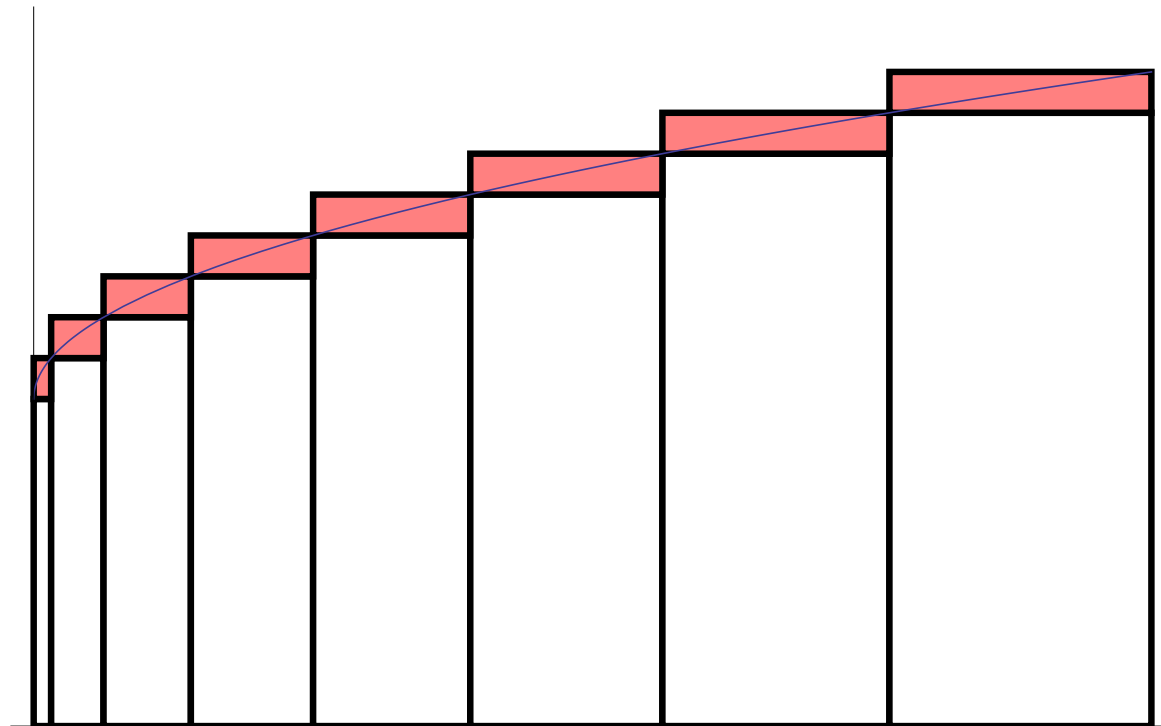
Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Eubinin lause

Luonnollinen ensimmäinen tavoite on perustella, miksi jatkuva funktio on integroituva yli kompaktin välin myös useamman muuttujan funktion tapauksessa. Kerrataanpa Analyysi II:sta tältä osin.





Jatkuva 2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause

- Jos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin todistettiin, että kutakin lukua $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen väliin $[a, b]$ jako, jonka kussakin osavälissä $\sup f - \inf f = G_i - g_i < \varepsilon$. Eli edellisen kalvon kuvassa kaikkien pinkkien laatikoiden korkeus $< \varepsilon$.
- Tällöin ylä- ja alasumman erotus on $\leq \varepsilon(b - a)$, joten $S_P - s_P \rightarrow 0$, kun $\varepsilon \rightarrow 0$. Integroituvuus seuraa tästä. Tässä $b - a = \text{välin } [a, b] \text{ mitta}$.
- Vaaditussa jaossa osaväli on sitä lyhyempi, mitä nopeammin funktion arvo siinä muuttuu.
- Vaaditun jaon olemassaolo ei ollut selvää. Harjulehdon kirja käyttää tasaista jatkuvuutta sen perustelemiseksi — Lahtosen monisteessa se todistettiin erikseen.
- Se, että kyseessä on *suljettu* väli oli oleellista (kompaktisuus!).



Jatkuva 3

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Eubinin lause

Tämä yleistyy vektorimuuttujan funktiolle seuraavalla tavalla.

Lemma. Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ kompakti väli, ja olkoon $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio, jolla on seuraava ominaisuus. Mielivaltaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen välin I jako, että kullakin $I_i, i = 1, \dots, m$, on voimassa

$$\inf\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in I_i\} > \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in I_i\} - \varepsilon.$$

Tällöin funktio f on Riemann-integroituva yli välin I .

Huom. Siis $M_i \geq m_i > M_i - \varepsilon$ kaikille $i = 1, 2, \dots, m$.



Jatkuva 4

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Eubinin lause

Todistus. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Määritellään $\varepsilon' = \varepsilon/m(I)$, jolloin $\varepsilon' > 0$. Oletuksen perusteella on siis olemassa sellainen jako $P = P(\varepsilon')$, että jaon P kaikilla osaväleillä $I_i, i = 1, \dots, s$, epäyhtälö

$$m_i > M_i - \varepsilon' \quad (*)$$

on voimassa. Kertomalla $(*)$ puolittain osavälin mitalla saadaan epäyhtälö

$$m_i m(I_i) \geq M_i m(I_i) - \varepsilon' m(I_i).$$



Jatkuva 5

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Eubinin lause

Laskemalla yhteen nämä eri osavälien kontribuutiot saadaan epäyhtälö

$$\sum_{i=1}^s m_i m(I_i) \geq \sum_{i=1}^s M_i m(I_i) - \varepsilon' \sum_{i=1}^s m(I_i). \quad (**)$$

Sen vasemmalla puolella on alasumma $s_P(f)$. Oikean puolen ensimmäinen termi on yläsumma $S_P(f)$. Koska välin mitta on jaon osavälien mittojen summa, oikean puolen jälkimmäinen termi on $\varepsilon' m(I) = \varepsilon$. Näin ollen epäyhtälöstä $(**)$ seuraa $S_P \geq s_P \geq S_P - \varepsilon$, mikä on juurikin integroituvuusehto. MOT



Jatkuva 6

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Filosofiaa 3

Välin mitta

Alasumma 1

Alasumma 2

Yläsumma 1

Yläsumma 2

Tihennys 1

Tihennys 2

Integroituvuus

Jatkuva 1

Jatkuva 2

Jatkuva 3

Jatkuva 4

Jatkuva 5

Jatkuva 6

Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause

Seuraus. Kompaktissa välissä $I \subset \mathbb{R}^n$ jatkuva funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva yli tämän välin.

Todistus. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Monisteen Lause 1.25. kertoo, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, jolle $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \varepsilon$ aina, kun pisteet $\vec{x}, \vec{y} \in I$ toteuttavat epäyhtälön $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta$. Valitaan sitten jokin sellainen välin I jako P , jolle jokaisen osavälin halkaisija on $< \delta$ (esim. n -kuutioita, joiden sivun pituus $< \delta/n$). Tällöin nähdään, että Lemman oletukset toteutuvat, ja väite seuraa. MOT



Jatkuva 7

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

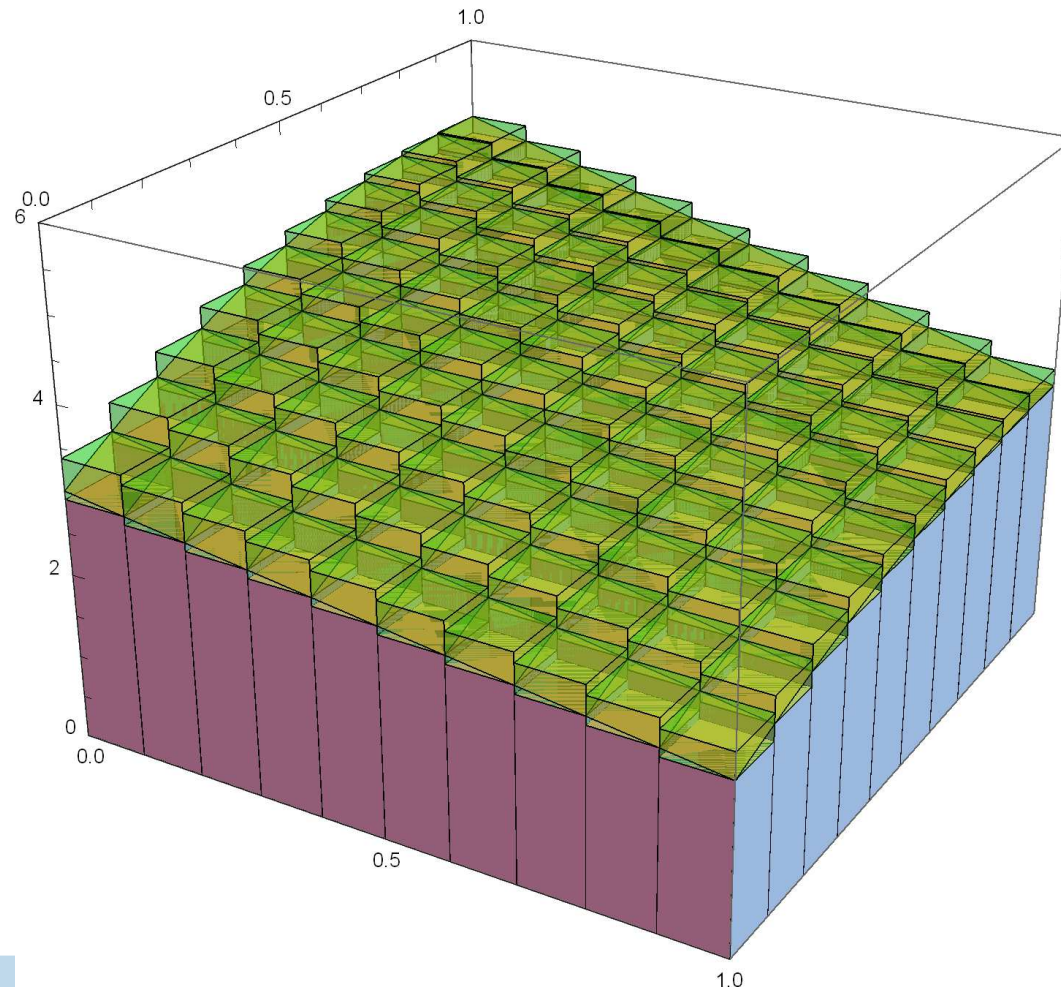
Filosofiaa 1
Filosofiaa 2
Filosofiaa 3
Välin mitta
Alasumma 1
Alasumma 2
Yläsumma 1
Yläsumma 2
Tihennys 1
Tihennys 2
Integroituvuus
Jatkuva 1
Jatkuva 2
Jatkuva 3
Jatkuva 4
Jatkuva 5
Jatkuva 6
Jatkuva 7

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Eubinin lause

Ylä- ja alapylväiden erotus on pieni kaikilla osaväleillä joten
ylä- ja alasummien erotuskin on pieni, vrt. kuva.





Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause
Perustelu ...

...kuvina

Huomautuksia

Esimerkki 3.A1

Esimerkki 3.A2

Esimerkki 3.B1

Esimerkki 3.B2

Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Integraalin laskemisesta



Iteroitu integraali 1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause

Perustelu ...

...kuvina

Huomautuksia

Esimerkki 3.A1

Esimerkki 3.A2

Esimerkki 3.B1

Esimerkki 3.B2

Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Jos funktio $f(x, y)$ on jatkuva välillä $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, niin voimme muodostaa sen *iteroidut integraalit*

$$\int_{x=a_1}^{b_1} \left(\int_{y=a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx.$$

Tässä lasketaan ensin *sisempi integraali* (ks. kuva seur. kalvolla)

$$A_1(x) = \int_{y=a_2}^{b_2} f(x, y) dy$$

ja sen jälkeen *ulompi integraali*

$$I = \int_{x=a_1}^{b_1} A_1(x) dx.$$



Iteroitu integraali 2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause

Perustelu ...

...kuvina

Huomautuksia

Esimerkki 3.A1

Esimerkki 3.A2

Esimerkki 3.B1

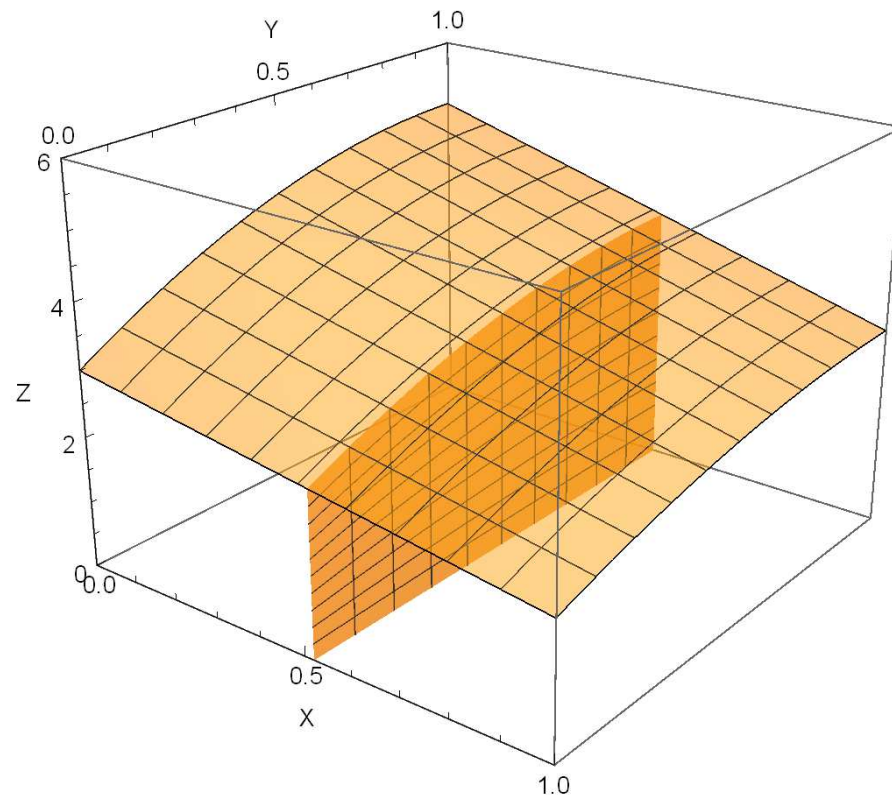
Esimerkki 3.B2

Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Sisäintegraalin arvo $A_1(x_0)$ on integraalin tilavuustulkinnassa kappaleen ja tason $x = x_0$ leikkauksen pinta-ala





Iteroitu integraali 3

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause
Perustelu ...

...kuvina

Huomautuksia

Esimerkki 3.A1

Esimerkki 3.A2

Esimerkki 3.B1

Esimerkki 3.B2

Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Voimme muodostaa myös iteroidun integraalin

$$\int_{y=a_2}^{b_2} \left(\int_{x=a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

Tässä lasketaan ensin *sisempi integraali*

$$A_2(y) = \int_{x=a_1}^{b_1} f(x, y) dx$$

ja sen jälkeen *ulompi integraali*

$$I = \int_{y=a_2}^{b_2} A_2(y) dy.$$



Iteroitu integraali 4

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause

Perustelu ...

...kuvina

Huomautuksia

Esimerkki 3.A1

Esimerkki 3.A2

Esimerkki 3.B1

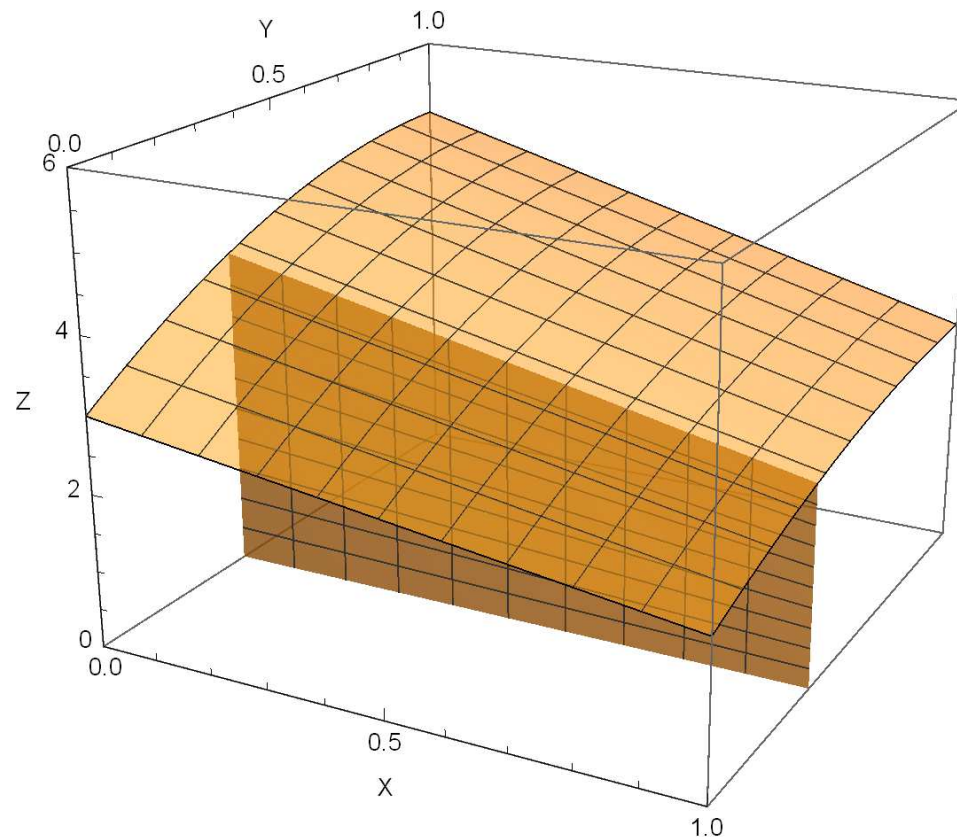
Esimerkki 3.B2

Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Sisäintegraalin arvo $A_2(y_0)$ on integraalin tilavuustulkinnassa kappaleen ja tason $y = y_0$ leikkauksen pinta-ala





Fubinin lause

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause

Perustelu ...

...kuvina

Huomautuksia

Esimerkki 3.A1

Esimerkki 3.A2

Esimerkki 3.B1

Esimerkki 3.B2

Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Lause.(Fubini) Jos $f(x, y)$ on jatkuva välissä
 $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, niin

$$\begin{aligned}\int_I f &= \int_{x=a_1}^{b_1} \left(\int_{y=a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{y=a_2}^{b_2} \left(\int_{x=a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy.\end{aligned}$$

Kumpi tahansa iteroiduista integraaleista antaa siis
integraalin $\int_I f$ arvon.



Perustelu ...

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause

Perustelu ...

...kuvina

Huomautuksia

Esimerkki 3.A1

Esimerkki 3.A2

Esimerkki 3.B1

Esimerkki 3.B2

Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

- Integraali $\int_I f$ laskee xy -tason ja funktion f kuvaajapinnan välissä olevan kappaleen tilavuuden laskemalla yhteen pylväitä, joiden korkeus on $h = f(x, y)$ ja pohjan ala $A = dx dy$, $V = ah$.
- Iteroitu integraali $\int_{x=a_1}^{b_1} \int_{y=a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx$ laskee saman tilavuuden laskemalla yhteen siivuja, joiden poikkileikkausala on $A_1(x)$ ja paksuus dx (ks. seur. kalvo)
- Toinen iteroitu integraali laskee yhteen siivuja, joiden poikkileikkausala on $A_2(y)$ ja paksuus dy (ks. seur. kalvo)
- Hieman tarkempi perustelu saadaan toteamalla, että yhteen siivuun kuuluvien pylväiden alasumma on pienempi kuin poikkileikkausfunktion alasummaan ko. osavälin tuottama kontribuutio. Vastaavasti yläsummille. Koska $\int_I f$ on olemassa, niin Sandwich-periaate antaa tuloksen.



...kuvina

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause
Perustelu ...

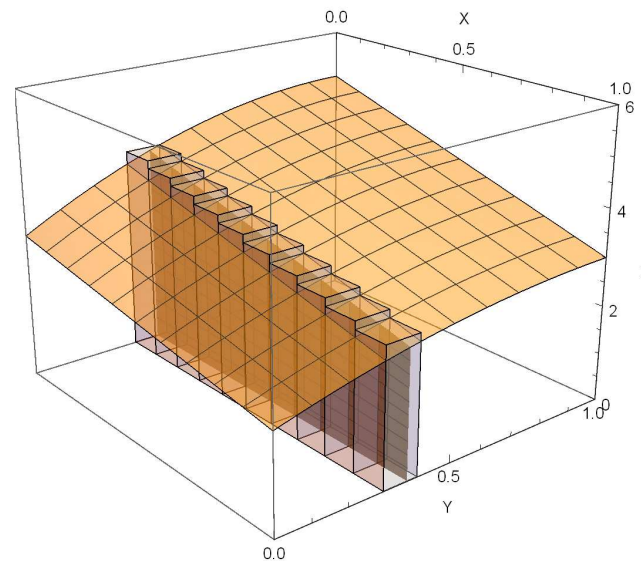
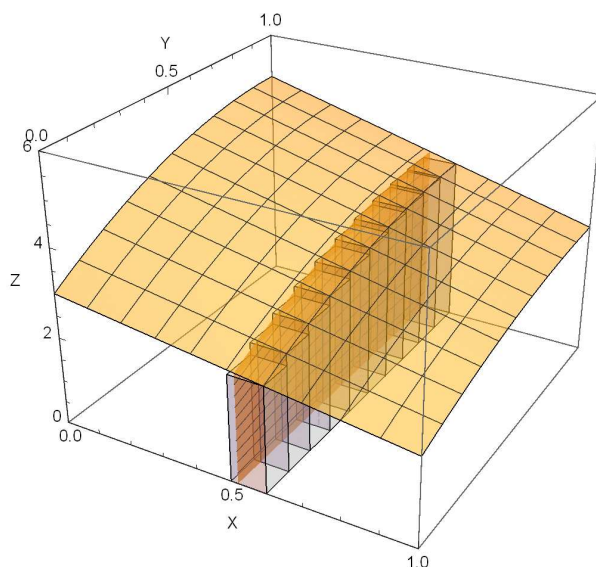
...kuvina

Huomautuksia
Esimerkki 3.A1
Esimerkki 3.A2
Esimerkki 3.B1
Esimerkki 3.B2
Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Alapylväiden rivin yhteenlaskettu mitta on alaraja poikkileikkausfunktion yhden alapylvään alalle. Yläpylväiden rivin yhteenlaskettu mitta on vastaavasti yläraja poikkileikkausfunktion yhden yhden yläpylvään alalle.





Huomautuksia

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause
Perustelu ...

...kuvina

Huomautuksia

Esimerkki 3.A1

Esimerkki 3.A2

Esimerkki 3.B1

Esimerkki 3.B2

Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

- Sisempi ja ulompi integraali ovat molemmat tavallisia yhden muuttujan integraaleja, joten niiden laskemiseen on käytössä kaikki aiempien kurssien menetelmät. Sisäintegraalin arvo riippuu ulomman integraalin muuttujasta, mutta sisäintegraalia laskettaessa tätä muuttujaa pidetään vakiona (vrt. osittaisderivointi).
- Fubinin lauseesta on olemassa versiot integraalille yli korkeampiulotteisen välin. Muuttujat integroidaan jossakin valitussa järjestyksessä. Sisempiä integraaleja laskettaessa pidetään ulompia integroimismuuttujia vakioina.



Esimerkki 3.A1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause
Perustelu ...

...kuvina

Huomautuksia

Esimerkki 3.A1

Esimerkki 3.A2

Esimerkki 3.B1

Esimerkki 3.B2

Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Tehtävä: Olkoon $I = [0, 1] \times [0, 1]$. Osoita laskemalla, että kumpikin iteroitu integraali antaa saman arvon integraalille

$$I = \int_I (xy + x^2) dx dy.$$

Ratkaisu: Integroimalle ensin y :n ja sitten x :n suhteen saadaan

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 (x^2 + xy) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(x^2 + \frac{x}{2} \right) dx = \left|_{x=0}^1 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right) \right. \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$



Esimerkki 3.A2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause

Perustelu ...

...kuvina

Huomautuksia

Esimerkki 3.A1

Esimerkki 3.A2

Esimerkki 3.B1

Esimerkki 3.B2

Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Jos taas integroidaan ensin x :n ja sitten y :n suhteen saadaan

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 (x^2 + xy) dx \right) dy \\ &= \int_{y=0}^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2} \right) dy \\ &= \left| \frac{y}{3} + \frac{y^2}{4} \right|_{y=0}^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$



Esimerkki 3.B1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause
Perustelu ...

...kuvina

Huomautuksia
Esimerkki 3.A1

Esimerkki 3.A2

Esimerkki 3.B1

Esimerkki 3.B2

Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Tehtävä: Laske funktion $f(x, y) = y \sin(yx)$ integraali yli välin $[0, \pi] \times [0, 1]$.

Ratkaisu: Jos yritämme ensin integroida muuttujan y suhteen joudumme lieviin vaikeuksiin. Sisäintegraali pitää käsitellä osittaisintegroimalla. Valitaan $u = y$, $v' = \sin(yx)$, jolloin

$$u' = 1 \quad \text{ja} \quad v = -\frac{1}{x} \cos(xy),$$

ja siis $(\int uv' = uv - \int u'v)$

$$\begin{aligned} \int y \sin(yx) dy &= -\frac{y}{x} \cos(xy) + \int \frac{1}{x} \cos xy dy \\ &= \frac{-yx \cos(xy) + \sin(yx)}{x^2}. \end{aligned}$$



Esimerkki 3.B2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause
Perustelu ...

...kuvina

Huomautuksia

Esimerkki 3.A1

Esimerkki 3.A2

Esimerkki 3.B1

Esimerkki 3.B2

Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Sisäintegraaliksi saadaan siis

$$\int_{y=0}^1 y \sin(yx) dy = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2},$$

mikä johtaa hieman hankalaan ulkointegraaliin (ellei keksi jippoja).

Sitä vastoin, jos integroimme ensin muuttujan x suhteen, saamme helpomman tehtävän!



Esimerkki 3.B3

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Iteroitu
integraali 1

Iteroitu
integraali 2

Iteroitu
integraali 3

Iteroitu
integraali 4

Fubinin lause

Perustelu ...

...kuvina

Huomautuksia

Esimerkki 3.A1

Esimerkki 3.A2

Esimerkki 3.B1

Esimerkki 3.B2

Esimerkki 3.B3

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^{\pi} y \sin(xy) dx \right) dy \\ &= \int_{y=0}^1 \left|_{x=0}^{\pi} (-\cos(xy)) dy \right. \\ &= \int_{y=0}^1 (1 - \cos \pi y) dy \\ &= \left|_{y=0}^1 \left(y - \frac{\sin \pi y}{\pi} \right) = 1. \end{aligned}$$



Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue

Geom. tulkinta

Olemassaolo

Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Integraali yli yleisemmän joukon



Integroimisalue

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue

Geom. tulkinta

Olemassaolo

Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Usean muuttujan funktion integraaleilla on useita sellaisia sovelluksia, joissa halutaan integroida yli sellaisen joukon $A \subset \mathbb{R}^n$, joka EI ole väli. Jos kuitenkin $A \subseteq I$, I kompakti väli, niin määritellään seuraavasti. Määritellään funktio $f_{A,I} : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_{A,I}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}), & \text{jos } \vec{x} \in A, \text{ ja} \\ 0, & \text{jos } \vec{x} \notin A. \end{cases}$$

Jos tällöin funktio $f_{A,I}$ on integroituva yli välin I , niin sanotaan, että f on integroituva ylin A :n, ja määritellään

$$\int_A f = \int_I f_{A,I}.$$



Geometrinen tulkinta

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue

Geom. tulkinta

Olemassaolo

Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

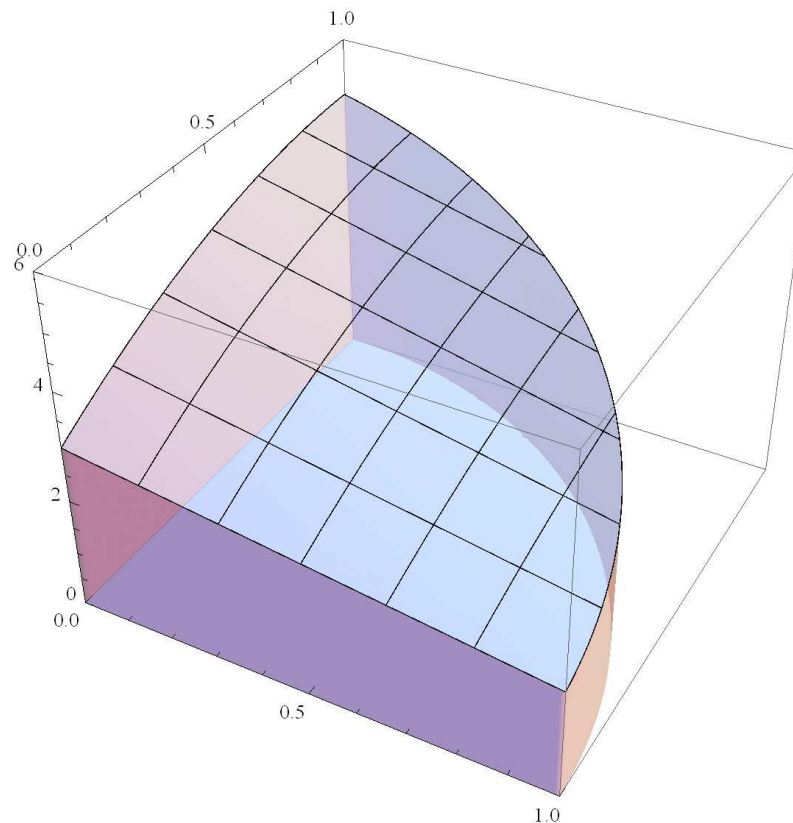
Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

f aiemman esimerkin funktio. A neliön $I = [0, 1] \times [0, 1]$ ja kiekon $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ leikkausjoukko. Funktion $f_{A,I}$ kuvaajapinta ohessa (mittakaavaa lytistetty z -suunnassa).





Olemassaolo

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue
Geom. tulkinta

Olemassaolo

Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Onko tällainen integraali olemassa? Kuvan perusteella näemme heti, että tyypillisesti funktio $f_{A,I}$ ei ole kaikkialla jatkuva, vaikka f olisikin. Tähän pulmaan paneudumme joksikin aikaa (vaikkemme aivan riittävällä tarkkuudella).

- Haluamme ehkä sallia f :lle epäjatkuvuuden jossakin.
- Analyysi II:ssa näimme, ettei yksittäinen epäjatkuvuuskohta haittaa.
- Ongelmia tulee ainakin alueen A reunalla $\implies$ epäjatkuvuuskohtia voi nyt olla äärettömän monta.
- Epäjatkuvuus on kuitenkin rajattu “pieneen” osajoukkoon (tyypillisesti juuri reunalle).



Nollajoukko

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue
Geom. tulkinta
Olemassaolo

Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Sanotaan, että joukko $N \subset \mathbb{R}^n$ on (Jordanin) nollajoukko, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen luonnollinen luku p ja sellaiset avoimet välit $I_0, I_1, I_2, \dots, I_p$, että

$$i) \quad N \subset \bigcup_{i=0}^p I_i, \text{ ja}$$

$$ii) \quad \sum_{i=0}^p m(I_i) < \varepsilon.$$



Esimerkki 3.C1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue
Geom. tulkinta
Olemassaolo
Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Osoitetaan, että jana

$$L = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

on nollajoukko.

Ratkaisu: Valitaan $\varepsilon > 0$. Olkoon $p > 0$ kokonaisluku. Olkoot $I_i = ((i-1)/p, (i+1)/p) \times ((i-1)/p, (i+1)/p)$, $i = 0, 1, \dots, p$. Tällöin selvästi $L \subset \bigcup_{i=0}^p I_i$. Koska I_i on avoin neliö, jonka sivun pituus on $2/p$, niin $m(I_i) = 4/p^2$. Näin ollen

$$\sum_{i=0}^p m(I_i) = (p+1) \cdot \frac{4}{p^2} = \frac{4(p+1)^2}{p^2} < \frac{8p}{p^2} = \frac{8}{p}.$$



Esimerkki 3.C2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue

Geom. tulkinta

Olemassaolo

Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

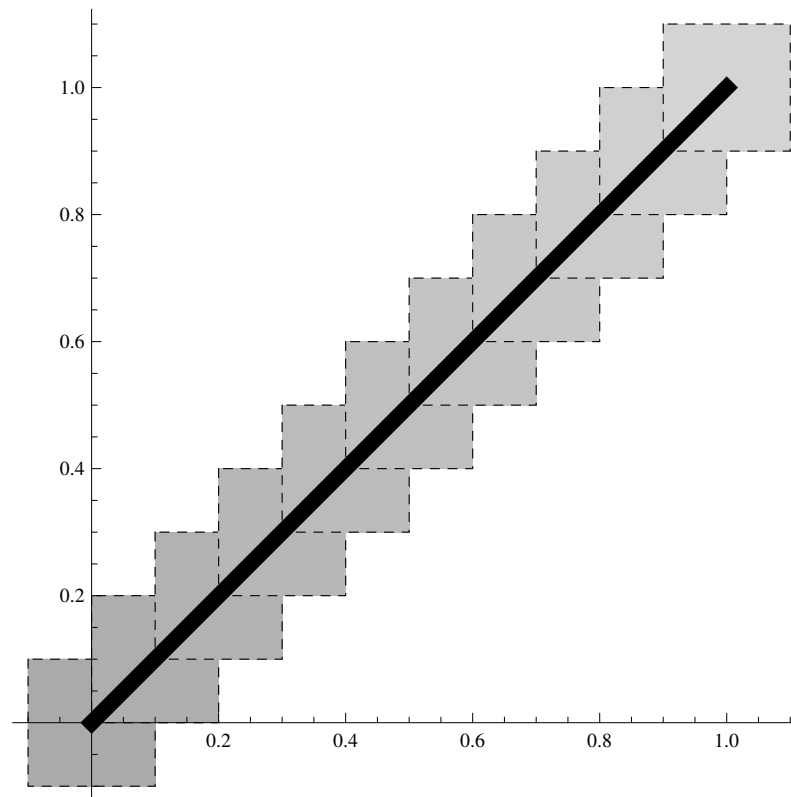
Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Kunhan p valitaan siten, että $p > 8/\varepsilon$, niin vaatimus peittävien välien yhteenlasketusta mitasta toteutuu.





Yleistys 1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue

Geom. tulkinta

Olemassaolo

Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Lause. Oletetaan, että $I \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti väli, ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva funktio. Tällöin sen kuvaaja

$$G_f = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} \mid \vec{x} \in I\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ nollajoukko (huom. dimensio kasvoi yhdellä).

Todistus. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Kuten aiemmin, nähdään että on olemassa välin I sellainen jako, että kullakin osavälillä I_i funktion f arvot poikkeavat toisistaan $< \varepsilon$. Olkoot jälleen $m_i = \inf\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in I_i\}$ ja $M_i = \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in I_i\}$, jolloin siis $M_i - m_i < \varepsilon$.



Yleistys 2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue
Geom. tulkinta
Olemassaolo
Nollajoukko

Esimerkki 3.C1
Esimerkki 3.C2
Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D
Integroituvuus 1
Integroituvuus 2
Integroituvuus 3
Integroituvuus 4
Integroituvuus 5
Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Tällöin kuvaaja $G_f \subset \bigcup_i I_i \times [m_i, M_i]$, ja välien $I_i \times [m_i, M_i]$ yhteenlaskettu mitta on

$$\sum_i m(I_i)(M_i - m_i) \leq \varepsilon \left(\sum_i m(I_i) \right) = \varepsilon m(I).$$

“Lihavoittamalla” välejä $I_i \times [m_i, M_i]$ voidaan ne korvata avoimilla väleillä joiden yhteenlaskettu mitta on $< 2\varepsilon m(I)$. Tämä saadaan mielivaltaisen pieneksi ja väite seuraa. MOT

Huomautus. Koska nollajoukon osajoukko on aina nollajoukko, tässä voidaan väli I_i korvata jollakin sen osajoukolla.



Esimerkki 3.D

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue
Geom. tulkinta
Olemassaolo
Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Tehtävä: Osoita, että yksikköympyrä

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ on tason $\mathbb{R}^2$ nollajoukko.

Ratkaisu: Ylempi puoliympyrä on suljetulla välillä $[-1, 1]$ jatkuvan funktion $y = \sqrt{1 - x^2}$ kuvaaja, joten se on Lauseemme nojalla nollajoukko. Alempi puoliympyrä on vastaavasti jatkuvan funktion $y = -\sqrt{1 - x^2}$ kuvaajana nollajoukko. Koko ympyrä on näiden unioni, joten se on Esimerkin C tuloksen nojalla nollajoukko.



Integroituvuus 1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue
Geom. tulkinta

Olemassaolo

Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Motiivina nollajoukkojen tarkasteluun meillä on ollut seuraava tulos.

Lause. Oletetaan, että kompaktissa välissä I määritellyn rajoitetun funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ epäjatkuvuuspisteet muodostavat nollajoukon. Tällöin f on integroituva yli välän I .

Idea tässä on sama kuin Analyysi II:ssa, jossa saatoimme sallia rajoitetulle funktiolle yhden (tai induktiolla äärellisen monen) epäjatkuvuuskohdan välillä $[a, b]$. Siellä peitimme epäjatkuvuuskohdan lyhyellä välillä.



Integroituvuus 2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue

Geom. tulkinta

Olemassaolo

Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

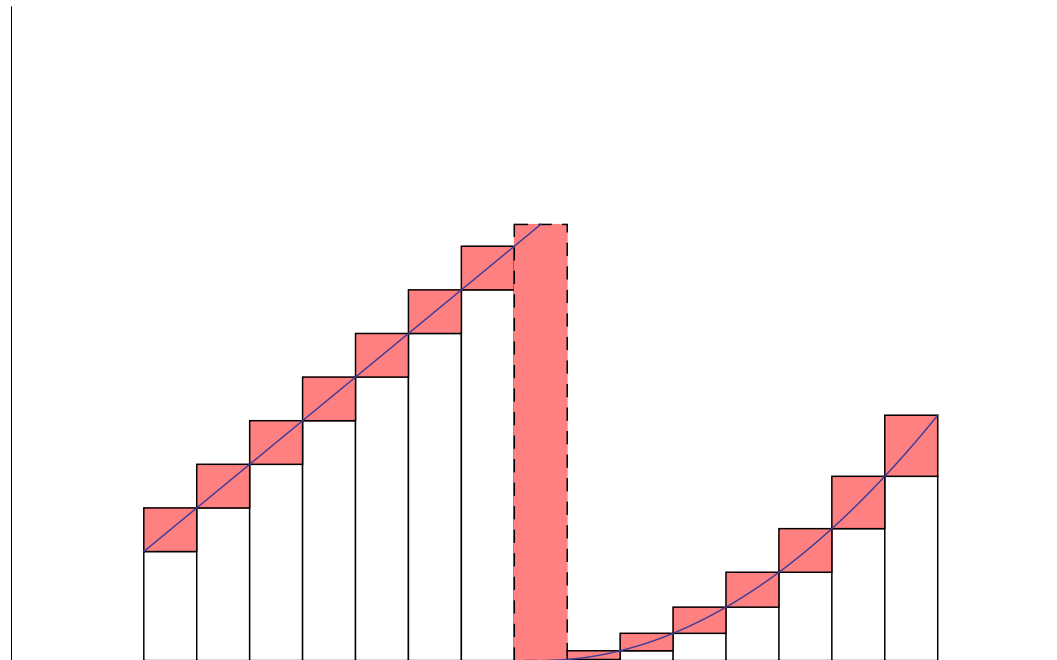
Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Suljetulla välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio, jolla on vain yksi epäjatkuvuuskohta $c \in [a, b]$, on integroituva yli tämän välin.





Integroituvuus 3

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue
Geom. tulkinta
Olemassaolo

Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Näin se meni:

- Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja tuotetaan jako, jolla ylä- ja alasummien erotus $< \varepsilon$.
- Ylä- ja alasummien erotus (=pinkki alue) muodostuu kolmesta osasta, kukin $< \varepsilon/3$.
- Soiro $(c - \delta, c + \delta) \times [-M, M]$ pisteen c ympärillä: Korkeus $2M$ (M on $|f(x)|$:n yläraja), leveys $2\delta < \varepsilon/6M$.
- f jatkuva välillä $[a, c - \delta]$, joten ko. välillä jako, jossa ylä- ja alasummien erotus $< \varepsilon/3$.
- f jatkuva välillä $[c + \delta, b]$, joten ko. välillä jako, jossa ylä- ja alasummien erotus $< \varepsilon/3$.
- " $(< \varepsilon/3) + (< \varepsilon/3) + (< 2M \cdot (\varepsilon/6M)) < \varepsilon$." MOT



Integroituvuus 4

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue
Geom. tulkinta
Olemassaolo

Nollajoukko
Esimerkki 3.C1
Esimerkki 3.C2

Yleistys 1
Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Mitä muutoksia tähän todistukseen tarvitaan moniulotteisessa tilanteessamme? Tavoitteena on edelleen tuottaa jako, jolle ylä- ja alasummien erotus $< \varepsilon$, kun $\varepsilon > 0$ ensin kiinnitettiin. Olkoon N epäjatkuvuuspisteiden joukko, ja M jokin funktion $|f|$ yläraja.

- Valitaan avoimet välit $U_1, U_2, \dots, U_p$ jotka peittävät nollajoukon N , ja joiden yhteenlaskettu mitta on $< \varepsilon/(4M)$.
- Joukko $K = I \setminus \bigcup_{i=1}^p U_i$ on suljettu ja rajoitettu ja siis kompakti. Koska f on jatkuva, Lauseen 1.25 nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $M_i - m_i < \varepsilon/(2m(I))$ kaikille sellaisille osaväleille I_i , jotka $\subseteq K$, ja joiden halkaisija on $< \delta$.



Integroituvuus 5

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue
Geom. tulkinta
Olemassaolo
Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

- Olkoon sitten P välin I jako, joka saadaan ottamalla mukaan välien $U_i, i = 1, 2, \dots, p$, jakopisteet, ja tihentämällä tätä siten, että kunkin osavälin halkaisija $< \delta$. Tämän jaon jokainen osaväli I_i joko sisältyy kokonaisuudessaan joukkoon K tai kokonaisuudessaan johonkin avoimista väleistä U_j .
- Jos $I_i \subseteq U_j$, niin $M_i \leq M, m_i \geq -M$, ja osavälin I_i kontribuutio erotukseen $S_p - s_P$ on $\leq 2M m(I_i)$. Tällaisista väleistä siis yhteen saadaan kontribuutio

$$2M \sum_{i,j, I_i \subset U_j} m(I_i) = 2M \sum_j m(U_j) < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$



Integroituvuus 6

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue

Geom. tulkinta

Olemassaolo

Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

- Jos $I_i \subseteq K$, niin $M_i - m_i \leq \varepsilon/(2m(I))$. Tällaisista väleistä siis yhteensä saadaan erotukseen $S_p - s_P$ kontribuutio

$$\begin{aligned} \sum_{i, I_i \subseteq K} m(I_i)(M_i - m_i) &\leq \frac{\varepsilon}{2m(I)} \sum_{i, I_i \subseteq K} m(I_i) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2m(I)} \cdot m(I) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

- Siis $S_p - s_P \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. MOT.



Sama kuvina

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Integroimisalue

Geom. tulkinta

Olemassaolo

Nollajoukko

Esimerkki 3.C1

Esimerkki 3.C2

Yleistys 1

Yleistys 2

Esimerkki 3.D

Integroituvuus 1

Integroituvuus 2

Integroituvuus 3

Integroituvuus 4

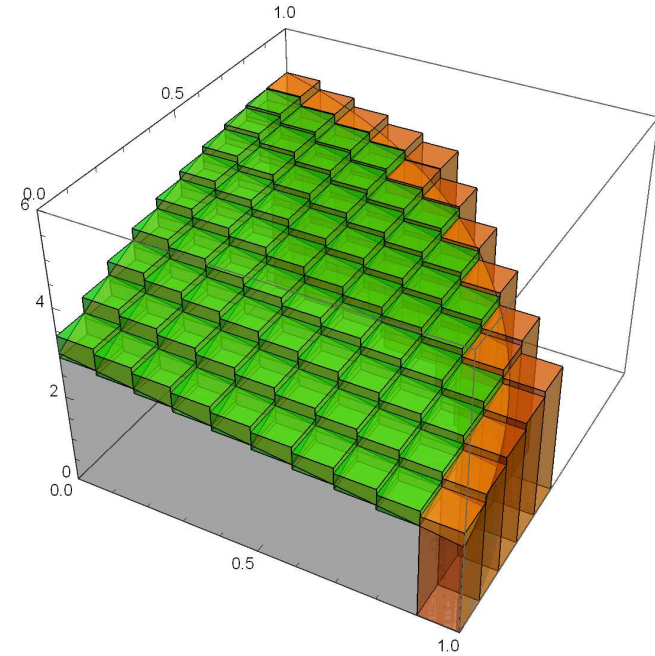
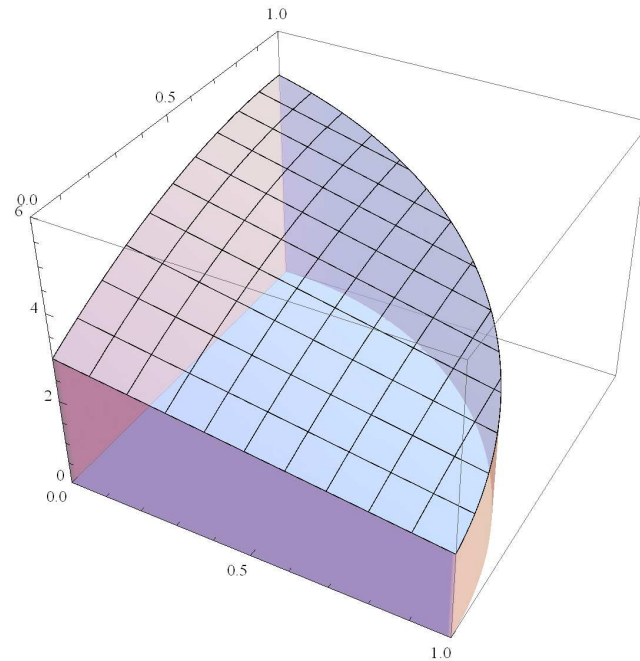
Integroituvuus 5

Integroituvuus 6

Sama kuvina

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Neljännesympyrään A rajoitetun funktio $f_{A,I}$ kuvaajapinta vasemmalla. Oikealla ylä- ja alasummien erotus eräässä jaossa. Korkeat, yhteenlasketulta pohjaltaan pienet, kaarelle sijoittuneet oranssit pylväät = epäjatkuvuuspisteiden kontribuutio. Matalat vihreät laatikot = osajoukon K kontribuutio. Molemmat ovat pieniä.





Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Fubinin lause yleisemmässä joukossa



Pohdintaa

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

- Usein haluamme laskea integraalin yli rajoitetun alueen A , jonka reuna muodostuu palasista, joilla yksi koordinaatti on muiden jatkuva funktio.
- Tällaisen alueen reuna on yllä kerrotun perusteella nollajoukko, joten jos $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ja rajoitettu funktio, se on integroitava yli alueen A .
- Tällaisessa tilanteessa Fubinin lause on edelleen voimassa (perustelu sivuutetaan).
- Koska f_A häviää A :n ulkopuolella, niin *sisäintegraalissa* funktio f_A on *paloittain määritelty*. A :n ulkopuolisten välien kontribuution tietenkin nolla, ja voidaan jättää heti pois.



Muotoilu 1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

(Fubini) Oletetaan, että funktio $f(x, y)$ on jatkuva tason $\mathbb{R}^2$ osajoukon S jokaisessa pisteessä. Oletetaan, että alueen S määäävät epäyhtälöt

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\},$$

missä $c(x)$ ja $d(x)$ ovat välillä $[a, b]$ jatkuvia funktioita, ja $c(x) \leq d(x)$ aina, kun $x \in [a, b]$. Tällöin integraali $\int_S f$ voidaan laskea iteroituna integraalina

$$\int_S f(x, y) dx dy = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$



Muotoilu 2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Jos taas tasoalueen S määräävät epäyhtälöt

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\},$$

missä funktiot $a(y)$ ja $b(y)$ ovat välillä $[c, d]$ jatkuvia funktioita, ja $a(y) \leq b(y)$ aina, kun $y \in [c, d]$, niin tällöinkin f on integroitava yli joukon S , ja

$$\int_S f(x, y) \, dx \, dy = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a(y)}^{b(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$



Esimerkki 3.E1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisessä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Tehtävä: Olkoon S xy -tason suljettu kolmio, jota rajaavat suorat $x = 0$, $y = 1$ ja $x = y$. Oletetaan, että funktio f on jatkuva joukossa S . Kirjoita integraali $\int_S f$ kahdella eri tavalla iteroituna integraalina.

Ratkaisu: Joukko S sisältyy neliöön $[0, 1] \times [0, 1]$, ja näemme, että kumpikin muuttujista x, y saa joukossa S kaikki arvot väliltä $[0, 1]$. Jos haluamme ensin integroida muuttujan x suhteen, kiinnitämme muuttujalle y jonkin arvon väliltä $[0, 1]$. Koska S on suorien $x = 0$ ja $x = y$ välissä, piste $(x, y) \in S$ sjsk $0 \leq x \leq 1$. Näin ollen sisäintegraalin integroimisrajoiksi tulee $a(y) = 0$ ja $b(y) = y$.



Esimerkki 3.E2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Näin ollen

$$\int_S f = \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^y f(x, y) dx \right) dy.$$

Jos taas integroimme ensin muuttujan y suhteen, kiinnitämme x :n arvon väliltä $[0, 1]$. Piste $(x, y) \in S$ s.j.v.s.k. $x \leq y \leq 1$, joten sisäintegraalin integroimisrajoiksi tulee $c(x) = x$ ja $d(x) = 1$. Fubinin lause antaa siten tuloksen

$$\int_S f = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x}^1 f(x, y) dy \right) dx.$$



Esimerkki 3.E3

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

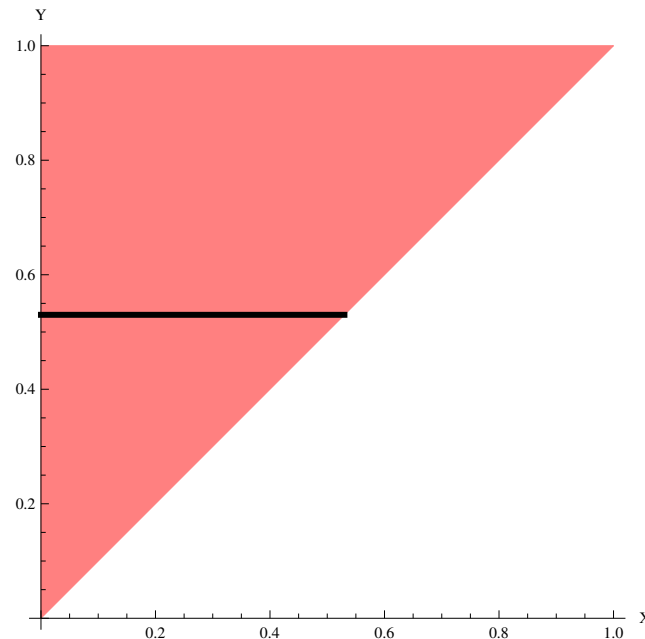
Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Kun yllä ensin integroimme x :n yli sisäintegraali laskee erästä poikkileikkausta $y = y_0$ vastaavan kontribuution. Kuvassa pinkki alue on S , ja musta jana tällainen poikkileikkaus (kuvassa $y_0 = 0,53$)





Esimerkki 3.E4

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

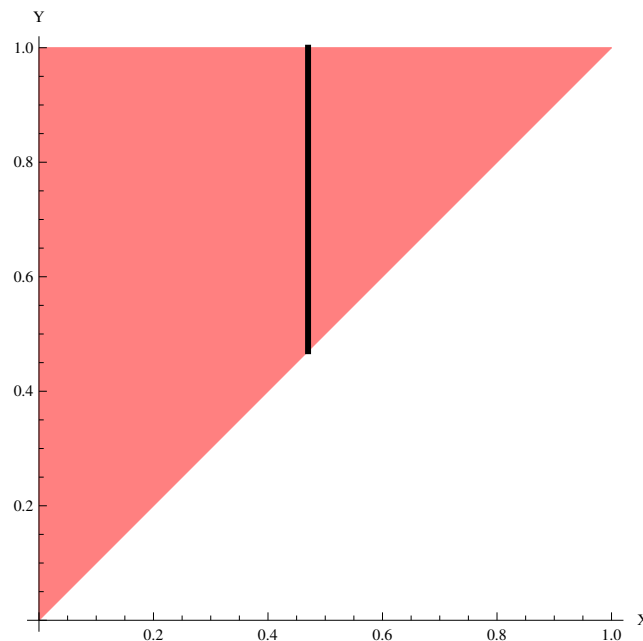
Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Kun yllä ensin integroimme y :n yli sisäintegraali laskee erästä poikkileikkausta $x = x_0$ vastaavan kontribuution. Kuvassa pinkki alue on S , ja musta jana tällainen poikkileikkaus (kuvassa $x_0 = 0,47$)





Esimerkki 3.F1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

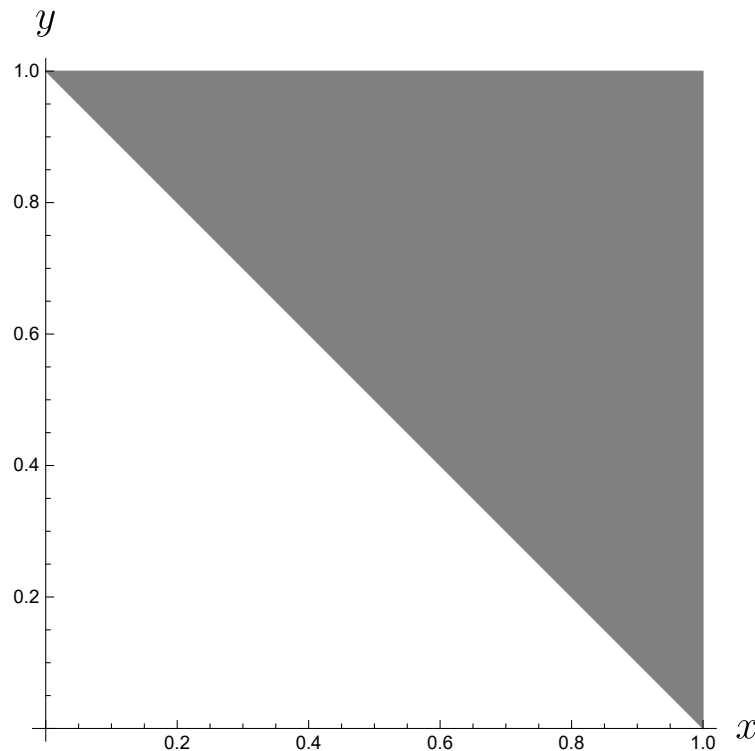
Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Suorat $x = 1$, $y = 1$ ja $x + y = 1$ rajaavat xy -tasossa kuvan kolmion A . Sen yläpuolella taso $z = 0$ ja pinta $z = 1 - x^2$ rajaavat kappaleen (kuva seuraavalla kalvolla). Laske ko. kappaleen tilavuus.





Esimerkki 3.F2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

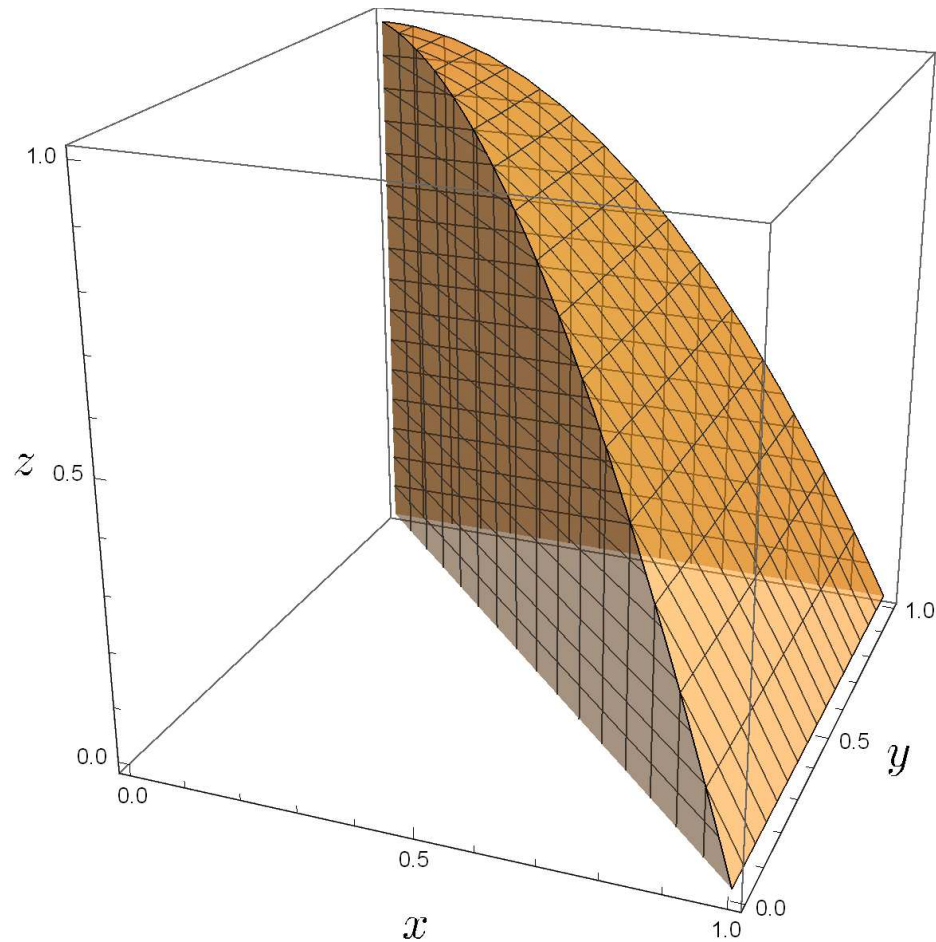
Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1





Esimerkki 3.F3

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Ratkaisu: Tutkittavan kappaleen korkeus pisteen (x, y) yläpuolella on $f(x, y) = 1 - x^2$ aina kun $(x, y) \in A$, joten sen tilavuus V saadaan integraalista $V = \int_A f$. Koska $f(x, y)$ ei itse asiassa lainkaan riipu y :stä, niin on luonnollista tehdä ensin y -integrointi. Kiinnitetään siis $x \in [0, 1]$. Tällöin alueen A alareunalla $y = 1 - x$ ja yläreunalla $y = 1$, joten sisäintegraali on

$$\int_{y=1-x}^1 (1 - x^2) dy = \left|_{y=1-x}^1 y(1 - x^2) = x(1 - x^2).\right.$$



Esimerkki 3.F4

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Edellisen kalvon sisäintegraali laski sellaisen poikkileikkauksen pinta-alan $A(x)$, joka on pisteitä $(x, 1 - x)$ ja $(x, 1)$ yhdistävän janan yläpuolella. Tätä vastaa kappaleen ohut "siivu", jonka tilavuus on $dV = A(x) dx$. Kappaleen tilavuus saadaan laskemalla näiden siivujen tilavuuksien summa. Siivuja muodostuu kaikilla $x \in [0, 1]$, joten

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_{x=0}^1 A(x) dx \\ &= \int_{x=0}^1 (x - x^3) dx = \left|_{x=0}^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \right. \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Esimerkki 3.F5

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

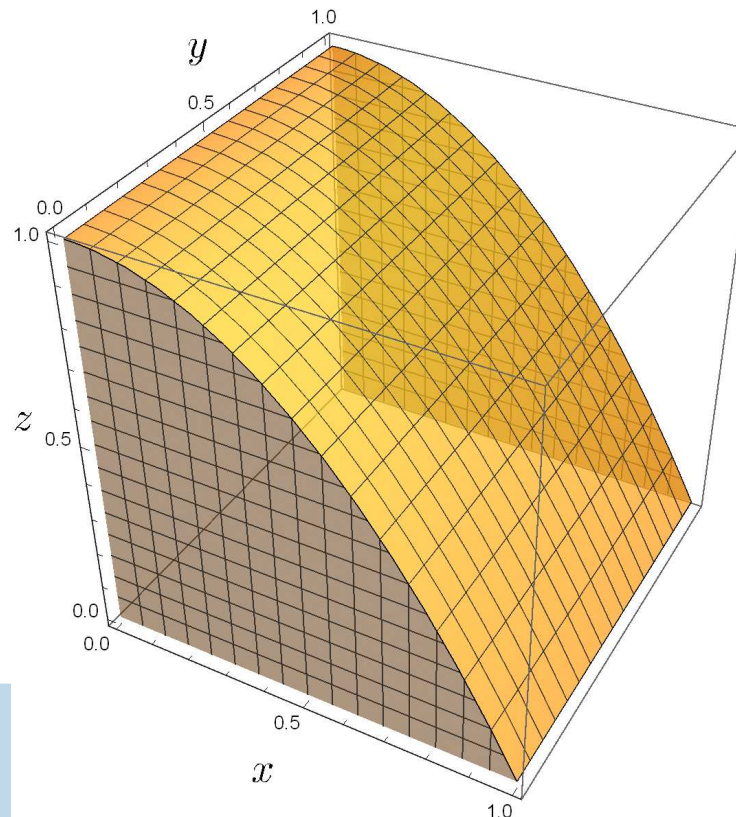
Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Eron havainnollistamiseksi: Jos laskettaisiinkin integraali $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (1 - x^2) dy dx$, niin tällöin laskettaisiin sellaisen kappaleen tilavuus, jonka muodostumissäännössä sisäintegraalin muuttujan y mahdollisten arvojen joukko ei lainkaa riippuisi ulkointegraalin muuttujan x arvosta. Tämä kappale olisi





Esimerkki 3.G1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Tehtävä: Olkoon

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x + 2\}.$$

Kirjoita integraali $\int_S f$ kahdella tavalla iteroituna
integraalina.

Ratkaisu: Jos teemme ensin y -integroinnin tehtävä on helppo,
koska y :n alaraja on aina nolla ja yläraja $= x + 2$. Näin ollen

$$\int_S f(x, y) dx dy = \int_{x=0}^2 \left(\int_{y=0}^{x+2} f(x, y) dy \right) dx.$$



Esimerkki 3.G2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

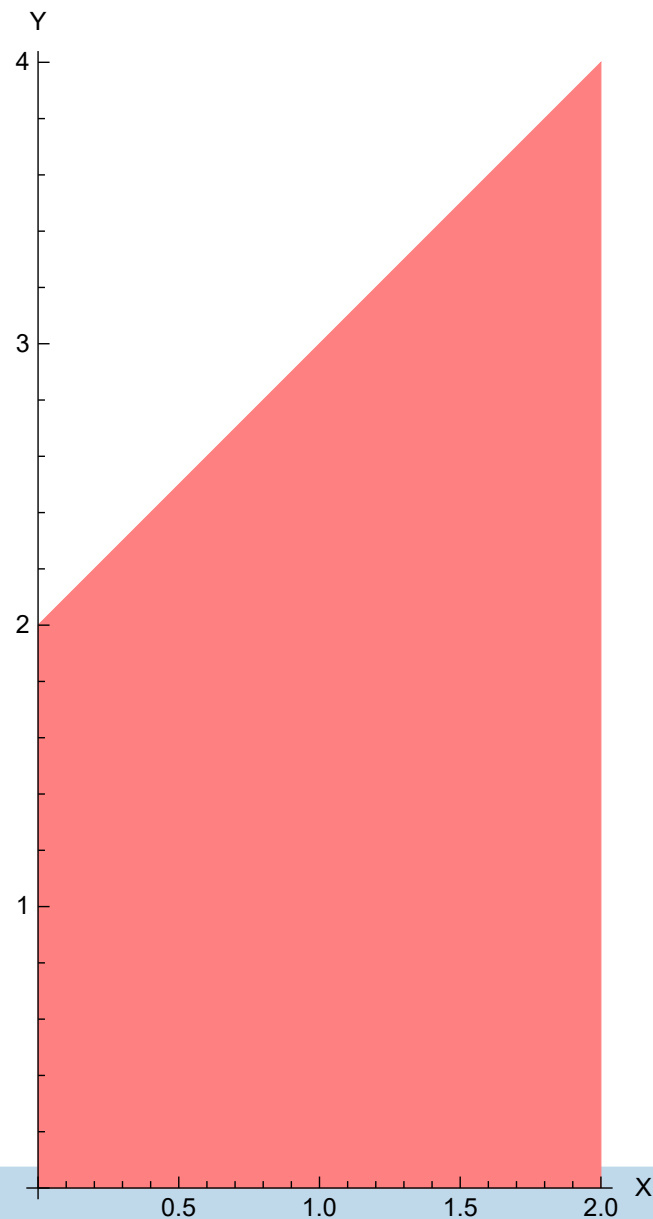
Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1





Esimerkki 3.G3

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Kun integroimmekin ensin x :n suhteen törmäämme seuraavaan ongelmaan. Oikea reuna on yksinkertainen $x = 2$, mutta vasen reuna on paloittain määritelty. Nimittäin x :n alaraja on nolla, jos $y \in [0, 2]$ mutta alaraja onkin $y - 2$ kun $y \in [2, 4]$. Yksinkertainen tapa suoriutua tehtävästä on kirjoittaa integraali kahden iteroidun integraalin summana:

$$\begin{aligned} \int_S f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{y=0}^2 \left(\int_{x=0}^2 f(x, y) \, dx \right) dy \\ &+ \int_{y=2}^4 \left(\int_{x=y-2}^2 f(x, y) \, dx \right) dy. \end{aligned}$$

Tässä ensimmäinen termi laskee integraalin yli neliön $[0, 2] \times [0, 2]$ ja jälkimmäinen termi laskee alueen kolmiomaisen osan kontribuution.



Esimerkki 3.H1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Tehtävä: xy -tason käyrät $y = x^2$ ja $x = y^2$ rajaavat rajoitetun alueen A 1. neljänneksessä. Laske integraali

$$\int_A (1 - x^2) dx dy.$$

Ratkaisu: Ensin meidän on saatava selkeämpi kuva alueesta A . Ensimmäinen vaihe on piirtää paraabelien $y = x^2$ ja $x = y^2$ kuvat (ks. seuraava kalvo). Näemme että paraabelit leikkaavat toisensa pisteissä $(0, 0)$ ja $(1, 1)$. Näiden väliset paraabelien kaaret rajaavat alueen siten, että $y = x^2$ on alareuna välillä $[0, 1]$, ja $x = y^2$ (tai $y = \sqrt{x}$) on yläreuna välillä $[0, 1]$.



Esimerkki 3.H2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

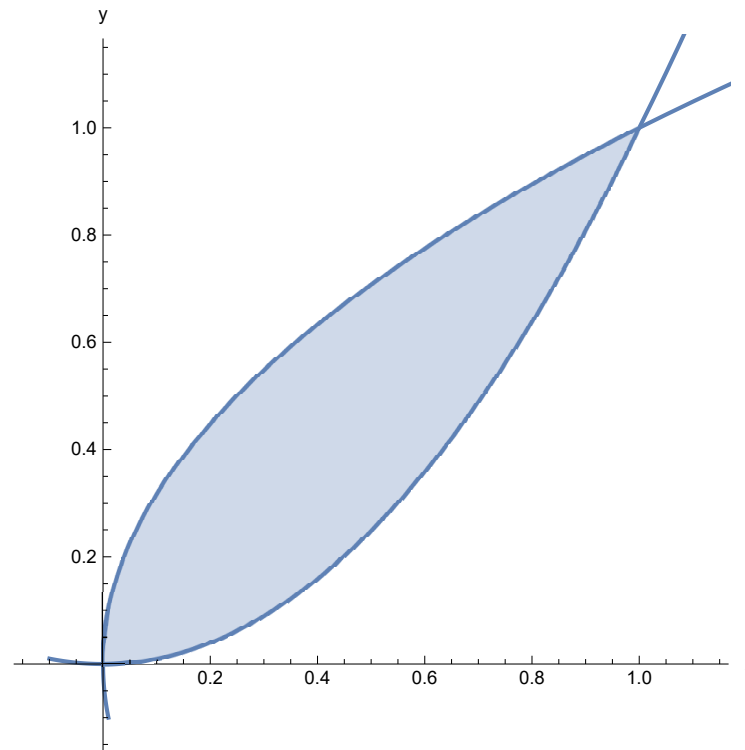
Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1





Esimerkki 3.H3

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Näin ollen $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{y}\}$.
Integraali saadaan näin ollen iteroituna integraalina

$$\begin{aligned}\int_A (1 - x^2) dx dy &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - x^2) dy \right) dx \\&= \int_{x=0}^1 \left(\left|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - x^2)y \right| \right) dx \\&= \int_{x=0}^1 (x^{1/2} - x^{5/2} - x^2 + x^4) dx \\&= \left|_{x=0}^1 \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \right. \\&= \frac{2}{3} - \frac{2}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{26}{105}\end{aligned}$$



Esimerkki 3.H4

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

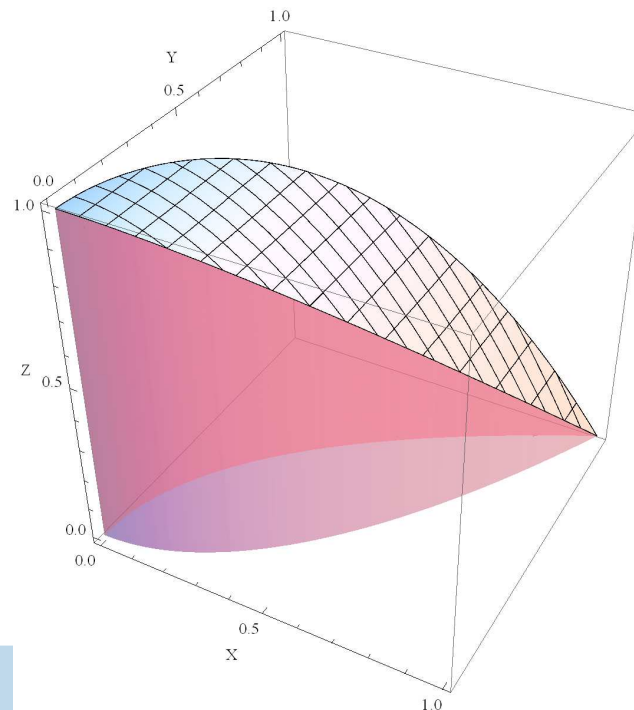
Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Lopputarkasteluna todetaan, että alueen A pinta-ala on $m(A) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = 1/3$. Oheisen kuvan perusteella tuntuu uskottavalta, että funktion $f(x, y) = 1 - x^2$ keskimääräinen arvo alueessa A on noin $3/4$. Näin ollen kappaleen tilavuus olisi noin $1/4 \approx 26/105$. OK!





Mutkikkaampi alue (1/4)

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

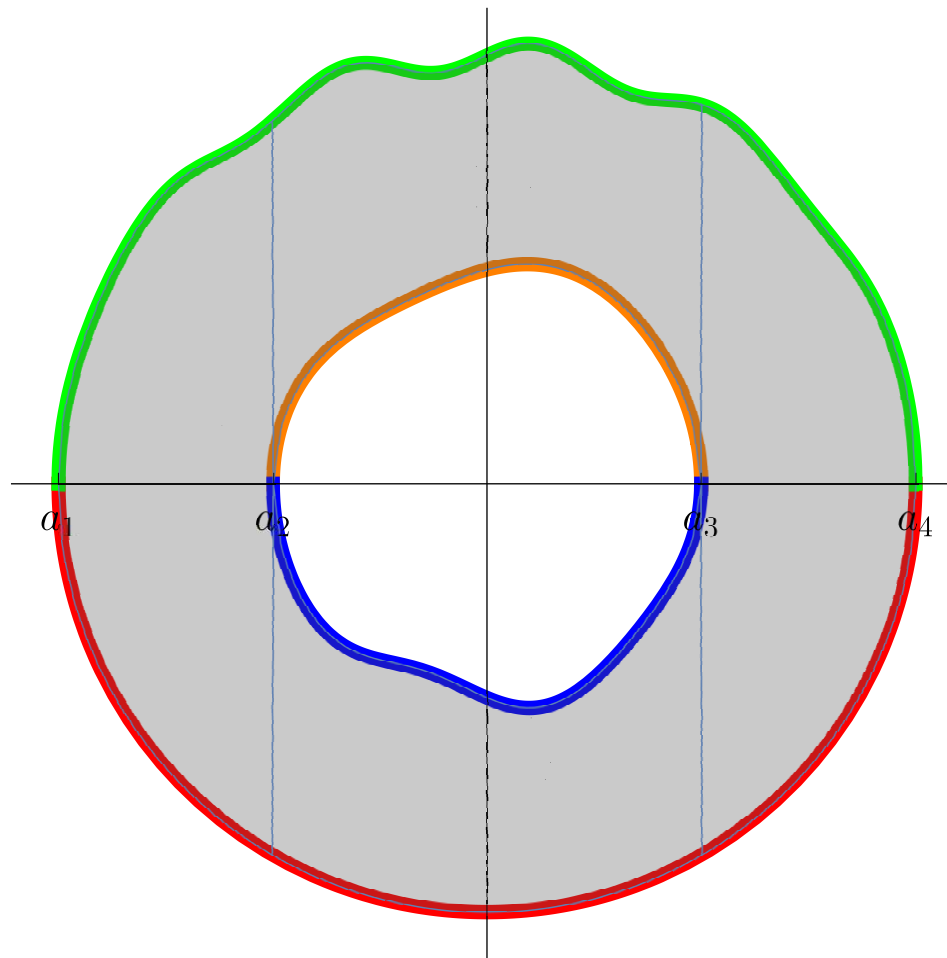
Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Tehtävä: Miten lasketaan integraali yli oheisen kuvan harmaan alueen A , jonka keskellä on reikä?





Mutkikkaampi alue (2/4)

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Ratkaisu: Kuvan perusteella (tämä olisi osa ko. alueen tarkkaa määrittelyä) sen yläreunan muodostaa erään funktion $y = d_1(x)$ kuvaaja (vihreä) välillä $x \in [a_1, a_4]$ ja alareunan funktion $y = c_1(x)$ kuvaaja (punainen) samalla välillä. Reiän yläreuna (oranssi) on funktion $y = c_2(x)$ kuvaaja välillä $x \in [a_2, a_3]$ ja alareuna (sininen) funktion $y = d_2(x)$ kuvaaja välillä $[a_2, a_3]$.

Alue jakautuu siis neljään osaan, jotka kaikki ovat kalvon *Muotoilu 1* mukaisia:

- Vasemmanpuoleinen osa välillä $x \in [a_1, a_2]$,
- reiän yläpuolinen osa välillä $x \in [a_2, a_3]$,
- reiän alapuolinen osa välillä $x \in [a_2, a_3]$ ja
- oikeanpuoleinen osa välillä $x \in [a_3, a_4]$.



Mutkikkaampi alue (3/4)

Nämä osa-alueet eivät mene lainkaan päällekkäin ja kattavat koko A :n, joten

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_{x=a_1}^{a_2} \int_{y=c_1(x)}^{d_1(x)} f(x, y) dy dx \\ &+ \int_{x=a_2}^{a_3} \int_{y=c_2(x)}^{d_1(x)} f(x, y) dy dx \\ &+ \int_{x=a_2}^{a_3} \int_{y=c_1(x)}^{d_2(x)} f(x, y) dy dx \\ &+ \int_{x=a_3}^{a_4} \int_{y=c_1(x)}^{d_1(x)} f(x, y) dy dx.\end{aligned}$$

Tässä osa-alueiden yli lasketut integraalit tulivat edellisen kalvon mukaisessa järjestyksessä.

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1



Mutkikkaampi alue (4/4)

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Pohdintaa

Muotoilu 1

Muotoilu 2

Esimerkki 3.E1

Esimerkki 3.E2

Esimerkki 3.E3

Esimerkki 3.E4

Esimerkki 3.F1

Esimerkki 3.F2

Esimerkki 3.F3

Esimerkki 3.F4

Esimerkki 3.F5

Esimerkki 3.G1

Esimerkki 3.G2

Esimerkki 3.G3

Esimerkki 3.H1

Luennolla aiheesta esitettiin erittäin hyvä kysymys: Voiko tämän integraalin laskea myös siten, että lasketaan integraali yli koko alueen ja vähennetään siitä reiän yli laskettu integraali? Koska

$$\int_{\text{koko alue}} f = \int_{\text{reikäleipä}} f + \int_{\text{reikä}} f, \quad (*)$$

niin lähtökohtaisesti vastaus on kyllä — siirretään reiän yli laskettu integraali yhtälön (*) toiselle puolelle.

Varoitus: Tilanne on joskus sellainen, että integraali yli reiän ei ole olemassa. Esimerkiksi f voi kasvaa rajatta reiän keskellä. Tällöin tätä kikkaa ei voida käyttää, koska yhtälön (*) termeistä kahta ei ole määritelty.



Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

**Fubini kolmessa
ulottuvuudessa**

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Fubini kolmessa ulottuvuudessa



Esimerkki 3.I1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

Esimerkki 3.K1

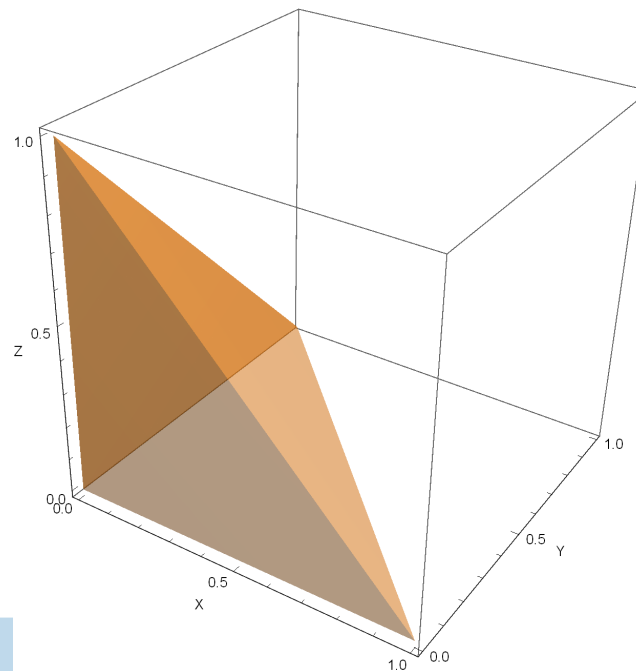
Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Tehtävä: Laske funktion $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ integraali $\int_S f$ yli avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukon S , jota rajaavat koordinaattitasot $x = 0, y = 0$ ja $z = 0$ sekä taso $x + y + z = 1$.

Taso $x + y + z = 1$ leikkaa koordinaattiakselit pisteissä $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ja $(0, 0, 1)$, ja muut mainitut tasot pitkin näitä yhdistäviä janoja, joten se on muodoltaan kuvan 4-tahokas.





Esimerkki 3.I2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Ratkaisu: Päätetään, että ensin integroidaan yli y :n sitten yli x :n ja lopuksi yli z :n (järjestyksellä ei ole väliä lopputuloksen kannalta). Kun kiinnitämme x :lle ja z :lle jotkin arvot, niin integrointimuuttujaa y rajaavat epäyhtälöt $0 \leq y$ (joukko S kuvan perusteella tason $y = 0$ positiivisella puolella) ja epäyhtälö $y \leq 1 - x - z$ (joukko S kuvan perusteella tason sillä puolella, jolla $x + y + z \leq 1$). Sisin integraali on siis

$$\begin{aligned} & \int_{y=0}^{1-x-z} (x + 2y + 3z) dy \\ &= \left|_{y=0}^{1-x-z} (xy + y^2 + 3zy) \right. \\ &= x(1 - x - z) + (1 - x - z)^2 + 3z(1 - x - z) - 0 \\ &= 1 - x + z - 2xz - 2z^2. \end{aligned}$$



Esimerkki 3.I3

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

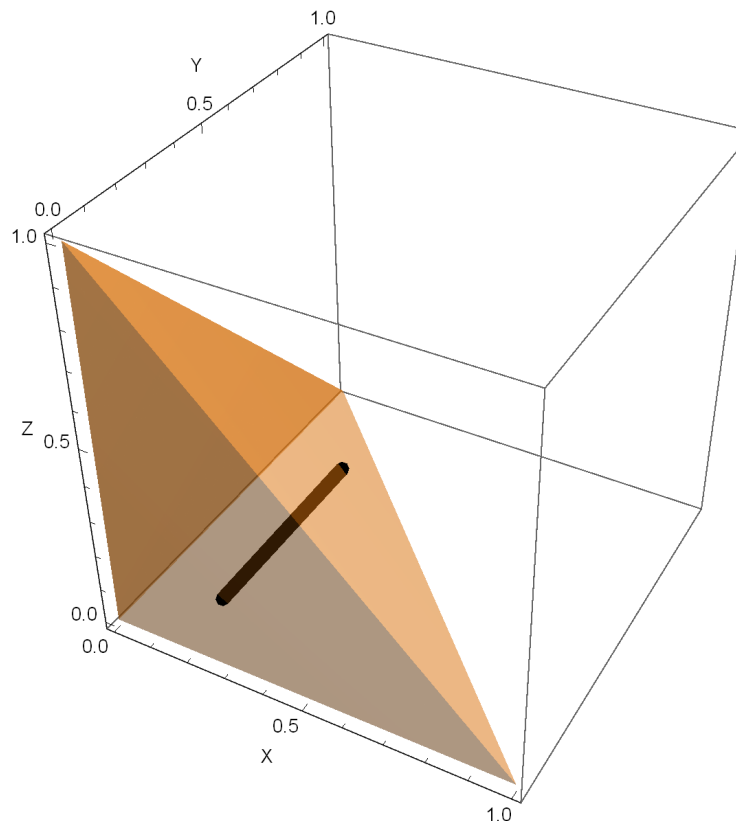
Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Kiinteälle (x, z) -parille sisin integraali laskee yhden muuttujan funktion integraalin yli janan. Oheisessa kuvassa ko. jana alueen S osana, kun $(x, z) = (0,3; 0,2)$.





Esimerkki 3.I4

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Muuttuja y on tehtävänsä tehnyt eikä enää esiinny.
Seuraavaksi integroimme yli $x : n$. Kun jäljelle jäävälle muuttujalle z annetaan jokin kiinteä arvo, niin $x \geq 0$ (kaikilla joukon S pisteillä $x \geq 0$) ja $x \leq 1 - z$ (seuraavan kalvon kolmion reunalla $x = 1 - z$). Tässä vaiheessa saamme siis

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^{1-z} \left(\int_{y=0}^{1-x-z} f \, dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{1-z} (1 - x + z - 2xz - 2z^2) \, dx \\ &= \left| x - \frac{x^2}{2} + zx - zx^2 - 2z^2x \right|_{x=0}^{1-z} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3z^2}{2} + z^3. \end{aligned}$$



Esimerkki 3.I5

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

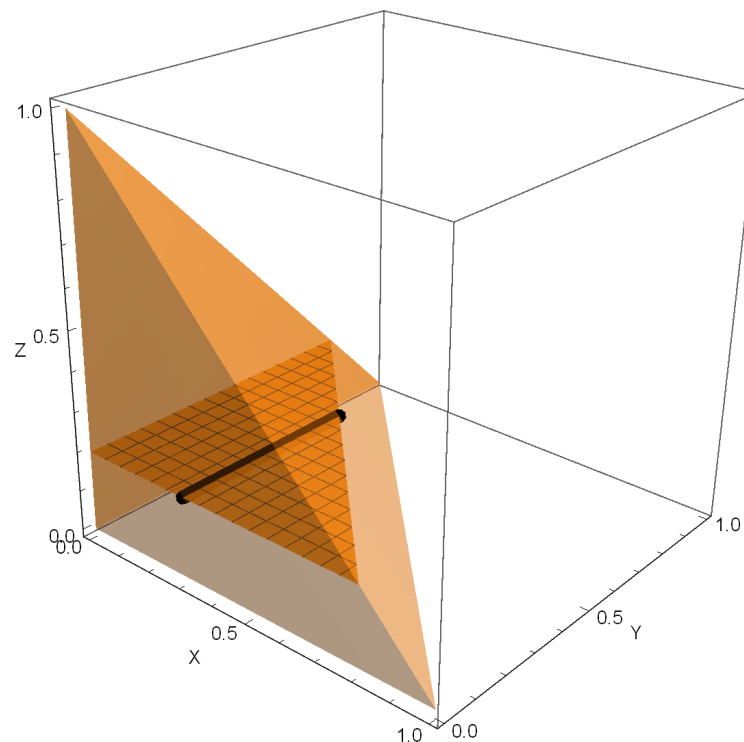
Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Kiinteälle z :n arvolle kaksinkertainen sisäintegraali laskee funktion integraalin yli kolmion, jolla z on vakio, ja $x \geq 0, y \geq 0$ ja $x + y \leq 1 - z$. Kuvassa $z = 0,2$.





Esimerkki 3.I6

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Lopuksi annetaan sitten muuttujan z liikkua välillä $[0, 1]$ jolloin kaikki edellisen kuvan mukaiset ‘kerrokset’ tulee käytyä läpi joukon S osalta. Siis

$$\begin{aligned} I &= \int_{z=0}^1 \left(\int_{x=0}^{1-z} \left(\int_{y=0}^{1-x-z} f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz = \\ &= \int_{z=0}^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{3z^2}{2} + z^3 \right) dz \\ &= \left[\frac{z}{2} - \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Esimerkki 3.J1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Olkoon S yksikköpallo (tai kuula)

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Lasketaan vakiofunktion $f(x, y, z) = 1$ integraali yli pallon S .
Pienen pohdiskelun jälkeen vakuuttunet siitä, että
vastaukseksi pitää tulla pallon S tilavuus.

Ratkaisu: Tehdään ensin z -integrointi. Joukon S
määrittelystä seuraa $z^2 \leq 1 - x^2 - y^2$ eli $|z| \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
Näin ollen ensin lasketaan integraali

$$\int_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1 \, dz = 2\sqrt{1-x^2-y^2}.$$



Esimerkki 3.J2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Integroidaan seuraavaksi yli y :n. Tässä x on tunnettu, joten pallopinta rajaa y :n vaihteluväliksi $[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$.
Kaava-arkin, löytyy sivulta

<https://intranet.utu.fi/fi/yksikot/sci/yksikot/mattil/op>

mukaan määräämätön integraali (valitaan $a^2 = 1 - x^2$ jolloin $a = \sqrt{1 - x^2}$)

$$\int \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dy = \frac{y}{2} \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \frac{1 - x^2}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}.$$



Esimerkki 3.J3

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Näin ollen

$$\begin{aligned} & \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2-y^2} dy \\ &= \left|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{1-x^2-y^2} + (1-x^2) \arcsin \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \right. \\ &= (1-x^2)(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = \pi(1-x^2). \end{aligned}$$

Lopulliseksi vastaukseksi saadaan siis

$$\int_S 1 = \int_{x=-1}^1 \pi(1-x^2) dx = \left|_{x=-1}^1 \pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

kuten odotimme.



Huomioitavaa

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

- Iteroiduissa integraalissa sisemmän muuttujan integroimisrajat saavat riippua ulommista, mutta EI KOSKAAN päinvastoin.
- n sisintä iteraatiokierrosta laskevat integraalin yli alueen n -ulotteisen poikkileikkauksen.
- $n = 1$: sisin integraali laskee integraalin yli jananpätkän.
- $n = 2$: sisin kaksinkertainen integraali laskee integraalin yli tasomaisen poikkileikkauksen.
- 2-ulotteisen poikkileikkauksen on oltava 1-ulotteisten poikkileikkausten unioni.
- 2-ulotteisten poikkileikkausten unioni on saatava koko kappale.



Esimerkki 3.K1

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

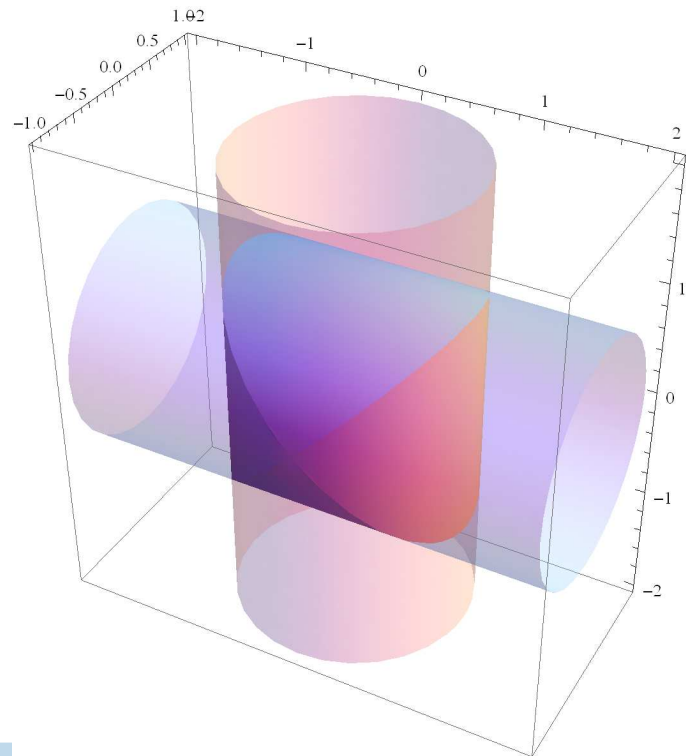
Esimerkki 3.K1

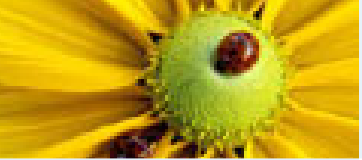
Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Tehtävä: Ohessa on kuva sylinteripintojen $x^2 + y^2 = 1$ ja $y^2 + z^2 = 1$ yhdessä rajaamasta kappaleesta S . Lasketaan integraali $\int_S f$ iteroituna integraalina. Kirjoita sen integroimisraajat, kun ensin integroidaan yli z :n sitten y :n ja lopuksi x :n.





Esimerkki 3.K2

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välin

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

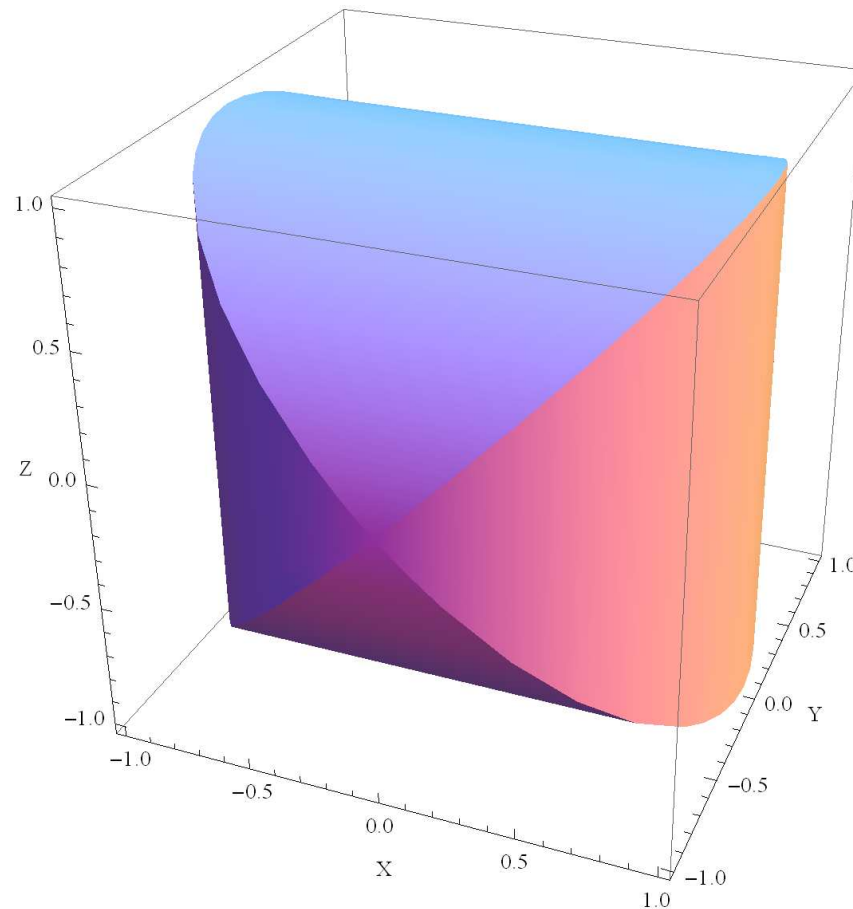
Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Kuvassa pelkkä kappale S ilman ympäröiviä putkia.





Esimerkki 3.K3

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

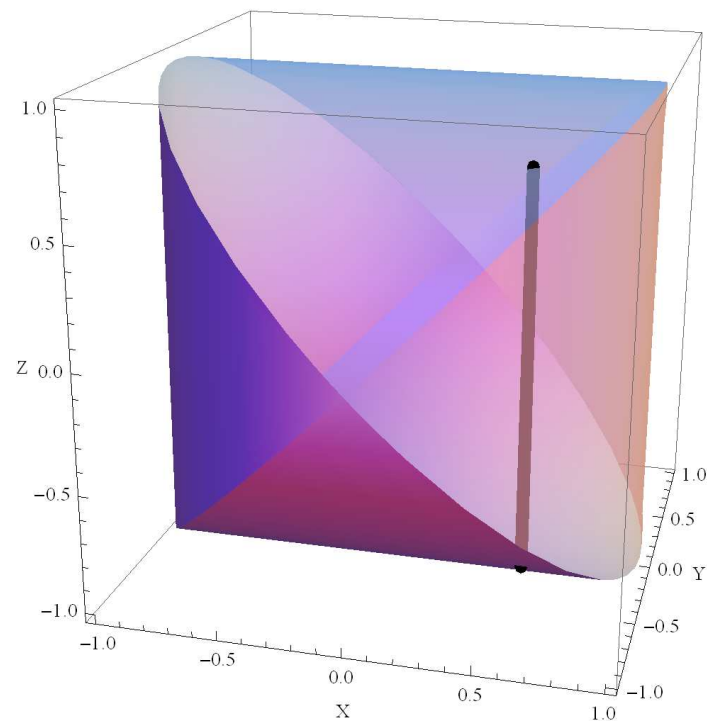
Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Kun (x, y) on kiinnitetty, muuttujaa z rajaa ainoastaan epäyhtälö $y^2 + z^2 \leq 1$. Näin ollen z :n vaihteluväli on $-\sqrt{1 - y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - y^2}$. Vastaava jananpätkä kuvassa.





Esimerkki 3.K4

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

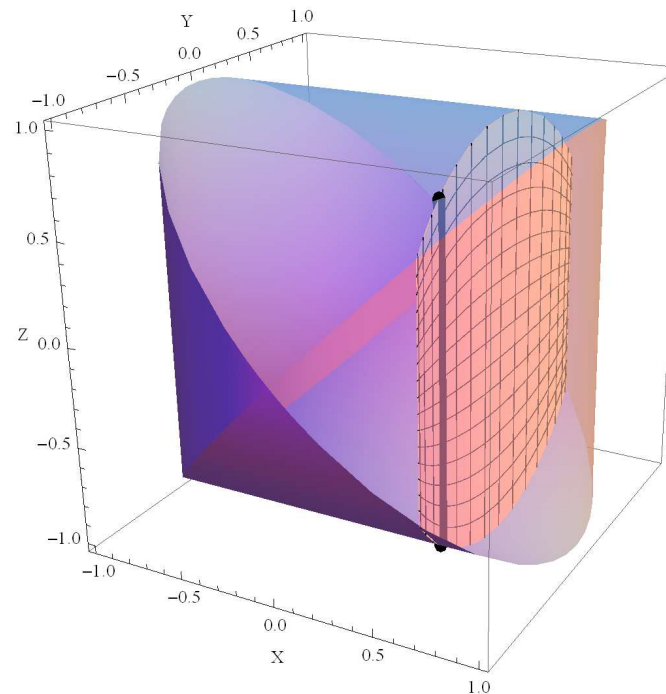
Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Kun vain x on kiinnitetty, muuttujaa y rajoittaa myös epäyhtälö $x^2 + y^2 \leq 1$. Siis y :n vaihteluväli on $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$. Kuvassa kiinteää x :n arvoa vastaava poikkileikkauskuvio, joka saadaan edellisen kalvon jananpätkien unionina, kun $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$.





Esimerkki 3.K5

Vektorilaskenta
2020

Määrätty
integraali yli
moniulotteisen
välän

Integraalin
laskemisesta

Integraali yli
yleisemmän
joukon

Fubinin lause
yleisemmässä
joukossa

Fubini kolmessa
ulottuvuudessa

Esimerkki 3.I1

Esimerkki 3.I2

Esimerkki 3.I3

Esimerkki 3.I4

Esimerkki 3.I5

Esimerkki 3.I6

Esimerkki 3.J1

Esimerkki 3.J2

Esimerkki 3.J3

Huomioitavaa

Esimerkki 3.K1

Esimerkki 3.K2

Esimerkki 3.K3

Esimerkki 3.K4

Koska muuttuja x saa arvoja väliltä $[-1, 1]$, vastaukseksi saadaan

$$\int_S f = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Tällä kertaa sisimmässä integraalissa rajat eivät riippuneet muuttujasta x . Tämä poikkeava tilanne selittyy sillä, että kappaleen ylä- ja alareunan korkeus pysyy vakiona x -akselin suunnassa liikuttaessa.