



Vektorilaskenta 2020

Vektorilaskenta 2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Kolmanteen lukuun liittyvää luentomateriaalia, osa 2.



Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Mitta

Yleistä

Laatikko

Venytytys

Venytytys, 2

Rivin lisääminen
toiseen

Rivien vaihto

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Lineaarikuvaus ja mitta



Mitta

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Mitta

Yleistä

Laatikko

Venytytys

Venytytys, 2

Rivin lisääminen
toiseen

Rivien vaihto

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

- Aiemmin määrittelimme *mitan* avaruuden $\mathbb{R}^n$ väleille yksinkertaisesti säännöllä

$$m([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i).$$

- Yleisemmin rajoitetun joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitta voidaan määritellä vakiofunktion 1 integraalina yli joukon A (mikäli ko. integraali on olemassa), ks. Esimerkki 3.J.
- Tällöin itse asiassa joukkoa A approksimoidaan sen sisä- ja ulkopuolilta välien unioneilla (mieti, miten nämä liittyvät funktion 1_A ylä- ja alasummiin).
- Mitta- ja integrointiteorian kursseilla mittojen käsitteeseen ja niiden ominaisuuksiin perehdytään laajemmin. Tällä kurssilla riittää ajatella avaruuden $\mathbb{R}^2$ mitan kertovan joukon A pinta-alan, ja avaruuden $\mathbb{R}^3$ mitta puolestaan kertoo osajoukon tilavuuden.



Yleistä

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Mitta

Yleistä

Laatikko

Venytytys

Venytytys, 2

Rivin lisääminen
toiseen

Rivien vaihto

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Olkoon $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus ja A sen matriisi. Jatkoa varten tarvitsemme tuloksen, jonka mukaan osajoukon $I \subseteq \mathbb{R}^n$ mitta muuntuu lineaarikuvauksessa seuraavan yksinkertaisen säännön mukaisesti:

$$m(T(I)) = |\det(A)| \cdot m(I).$$

- Approksimointi ja suppiloperiaate johtavat siihen, että riittää perustella tämä sääntö kun I on väli.
- Koska kaikki matriisit saadaan alkeismatriisien tuloina, niin riittää perustella tämä, kun A on alkeismatriisi.



Laatikko

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Mitta

Yleistä

Laatikko

Venytys

Venytys, 2

Rivin lisääminen
toiseen

Rivien vaihto

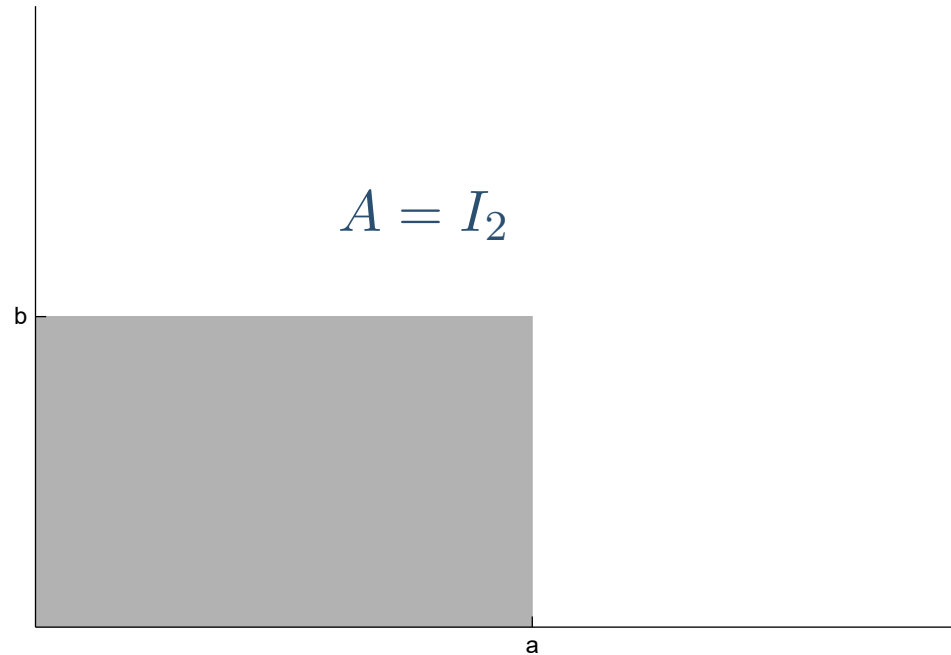
Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit



Identiteettikuvaus tietenkin pitää laatikon pinta-alan ennallaan. Tämä referenssinä.



Venytytys

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Mitta

Yleistä

Laatikko

Venytytys

Venytytys, 2

Rivin lisääminen
toiseen

Rivien vaihto

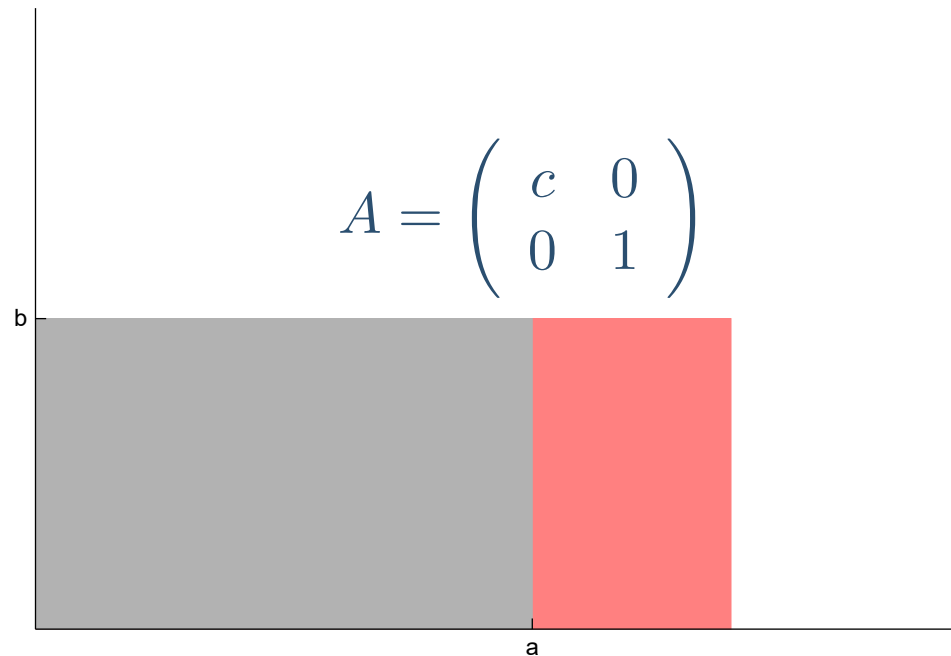
Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit



Diagonaalimatriisi, jossa yksi kerroin $c \neq 1$ venyttää alueen c -kertaiseksi. Myös $\det A = c$.



Venytytys, 2

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Mitta

Yleistä

Laatikko

Venytytys

Venytytys, 2

Rivin lisääminen
toiseen

Rivien vaihto

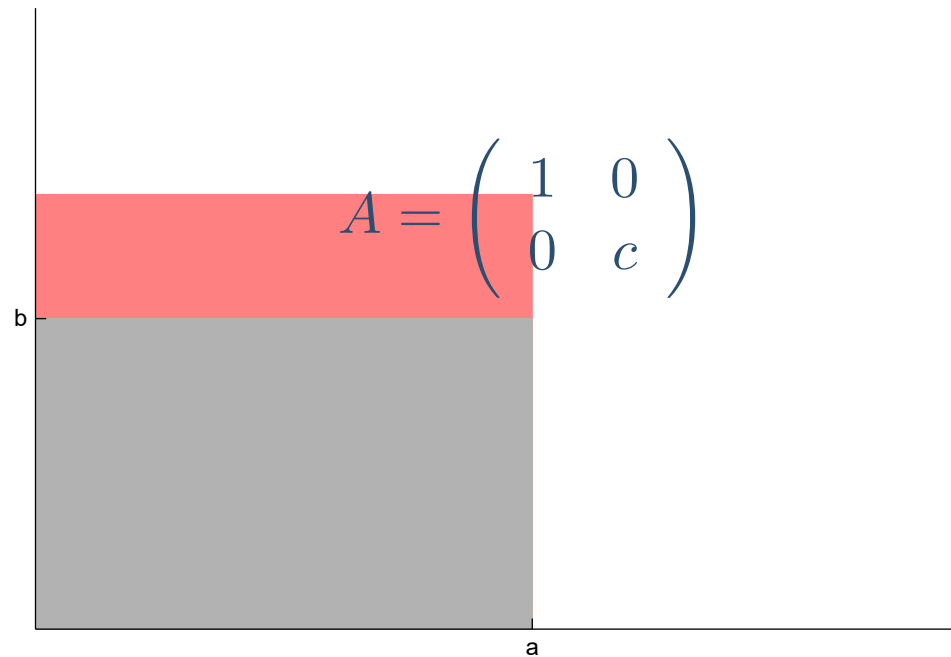
Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit



On samantekevää, minkä akselin suuntaan venytys tehdään.
Pinta-ala joka tapauksessa c -kertaistuu.



Rivin lisääminen toiseen

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Mitta

Yleistä

Laatikko

Venytytys

Venytytys, 2

**Rivin lisääminen
toiseen**

Rivien vaihto

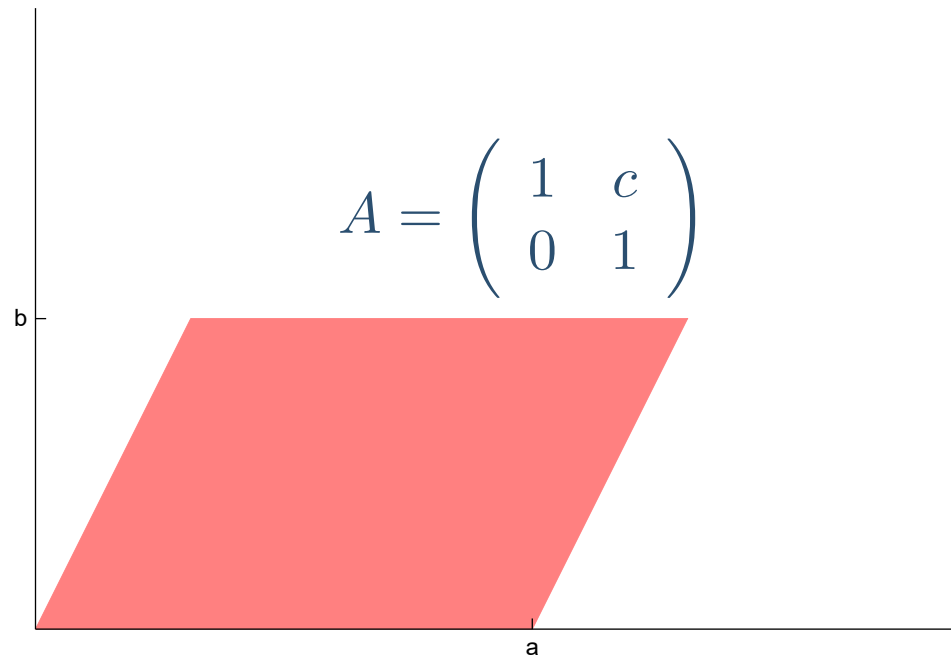
Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit



Alkeismatriisi, jossa yksi rivi on lisätty toiseen vakiolla kerrottuna kuvaa suorakaiteen suunnikkaaksi, jolla on sama kanta ja korkeus. Tässä $\det A = 1$, joten pinta-alan pitikin säilyä.



Rivien vaihto

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Mitta

Yleistä

Laatikko

Venytys

Venytys, 2

Rivin lisääminen
toiseen

Rivien vaihto

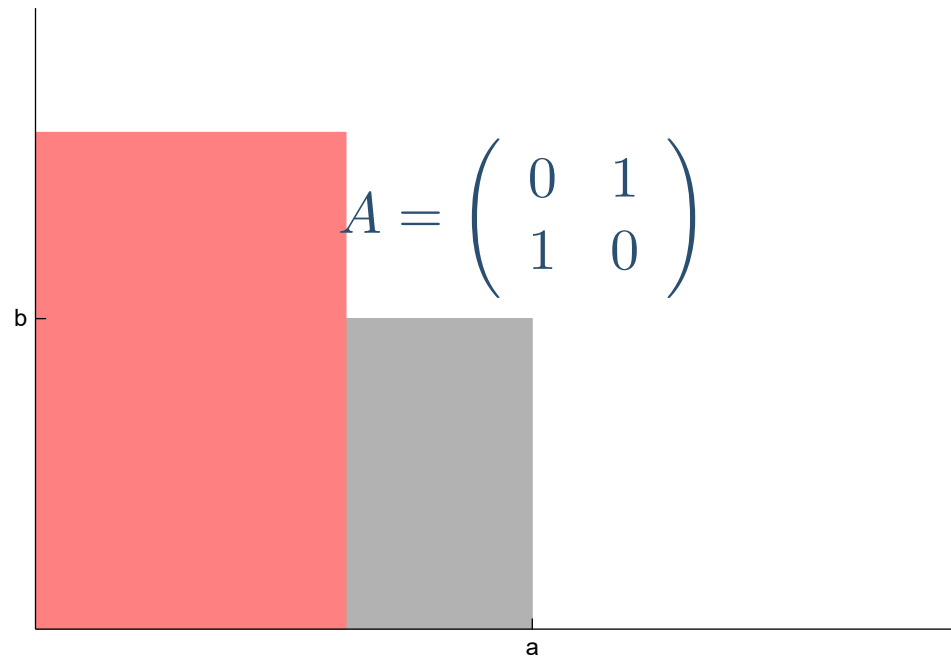
Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit



Kahden koordinaatin roolien vaihtaminen ei tietenkään muuta pinta-alaa. Geometrisesti kyse on peilauksesta $\det A = -1$ on itseisarvoltaan yksi.



Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Yleistä

Jacobi

Mitta-alkio

Tulos

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Sijoitus integraaliin



Yleistä

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Yleistä

Jacobi
Mitta-alkio
Tulos

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Muunnetaan funktion f integraali yli joukon U integraaliksi yli joukon V tekemällä sijoitus $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$, missä $g : V \rightarrow U$ on bijektio (ainakin), kun se rajoitetaan funktioksi $g : V^\circ \rightarrow U^\circ$.

- Uudeksi integroitavaksi funktioksi tulee $f \circ g$, mutta...
- lisäksi on otettava huomioon, että sijoitus muuttaa joukon V osavälien I mittoja.
- Yhden muuttujan tapauksessa sijoitusfunktio g muuttaa pisteen y lähistöllä olevan välin, pituus dy , väliksi jonka pituus on $|g'(y)| dy$. Tällöin

$$\int_U f(x) dx = \int_V (f \circ g)(y) |g'(y)| dy.$$

- Tässä usein (lukio, Analyysi II) derivaatan $g'(y)$ mahdollinen negatiivisuus otetaan huomioon vaihtamalla integroimisrajat keskenään.



Jacobin determinantti

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Yleistä

Jacobi

Mitta-alkio

Tulos

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Jos tässä g onkin differentioituva kuvaua $\mathbb{R}^n$:n osajoukosta toiseen, niin:

- "Lokaalisti" g :n muutoksia voidaan arvioida sen lineaarisen derivaatan avulla.
- Näin ollen pisteen $\mathbf{y}$ lähellä "pienen" alueen I mitta tulee kerrottua lineaarisen derivaatan $D(g)(\mathbf{y})$ determinantilla, ns. Jacobin determinantilla:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(\mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n}(\mathbf{y}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(\mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_n}(\mathbf{y}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \frac{\partial g_n}{\partial y_2}(\mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n}(\mathbf{y}) \end{vmatrix}.$$

Siitä käytetään merkintää

$$J_g(\mathbf{y}) = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}.$$



Mitta-alkio

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Yleistä
Jacobi

Mitta-alkio

Tulos

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Kun tehdään sijoitus $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$, niin lähtöavaruuden pieni väli $I = [y_1, y_1 + dy_1] \times [y_2, y_2 + dy_2] \times \cdots \times [y_n, y_n + dy_n]$, mitaltaan $m(I) = dy_1 dy_2 \cdots dy_n$ kuvautuu hieman vääristyneeksi joukoksi $g(I)$. Kun välin mittasuhteet ovat kaikki pieniä, niin kuvajoukkoa voidaan approksimoida n -särmioällä, jonka reunoina ovat vektorit $Dg(\mathbf{y})(dy_i \mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Tämän laatikon, ns. tilavuusalkion mitta on siten $m(g(I)) = |J_g(\mathbf{y})| m(I)$.

Näitä vastaavat kuvat helpottavat (ainakin Jyrkin mielestä) muistamista, vaikka jättävätkin epätäsmällisen vaikutelman. Esittelen näitä alla usein vastaan tulevissa yhteyksissä.



Tulos

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Yleistä

Jacobi

Mitta-alkio

Tulos

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Lause: (Sijoitus integraaliin). Oletetaan, että $B, A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $g : B \rightarrow A$ on differentioituva funktio (joka on nollajoukon ulkopuolelle bijektio). Oletetaan, että $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on integroituva funktio. Tällöin

$$\int_A f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_B f(g(\mathbf{y})) |J_g(\mathbf{y})| dy_1 dy_2 \cdots dy_n.$$

Todistus: Sivuutetaan. Idea on että ala- ja yläsummien pylväiden korkeudet eivät muutu, mutta niiden pohjien mitat skaalataan Jacobin determinantilla. Oletus funktion g bijektiivisyydestä tarvitaan, jotta $\mathbf{x}$ käy läpi alueen A tasan yhden kerran kun $\mathbf{y}$ käy läpi alueen B . Sallimme bijektiivisyyden särkyvän nollajoukossa, koska nollajoukon jättäminen huomiotta ei muuta integraalin arvoa.



Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Polaari

Pinta-alkio

Esimerkki 3.L1

Esimerkki 3.L2

Esimerkki 3.L3

Esimerkki 3.L4

Esimerkki 3.L5

Esimerkki 3.M1

Esimerkki 3.M2

Esimerkki 3.M3

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Napakoordinaatit



Napakoordinaatit

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Polaari

Pinta-alkio

Esimerkki 3.L1

Esimerkki 3.L2

Esimerkki 3.L3

Esimerkki 3.L4

Esimerkki 3.L5

Esimerkki 3.M1

Esimerkki 3.M2

Esimerkki 3.M3

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Usein esiintyvät sijoitukset ovat koordinaatistomuunnoksia. Tasossa on luontevaa käyttää usein napakoordinaatteja, jolloin $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$. Tällöin $x^2 + y^2 = r^2$, ja $\tan \phi = y/x$.

Osittaisderivoimalla saadaan koordinaatistonvaihtofunktion $g(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ Jacobin matriisiksi

$$Dg(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix},$$

mistä laskemalla saadaan Jacobin determinantiksi $\partial(x, y)/\partial(r, \phi) = r$.



Pinta-alkio

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Polaari

Pinta-alkio

Esimerkki 3.L1

Esimerkki 3.L2

Esimerkki 3.L3

Esimerkki 3.L4

Esimerkki 3.L5

Esimerkki 3.M1

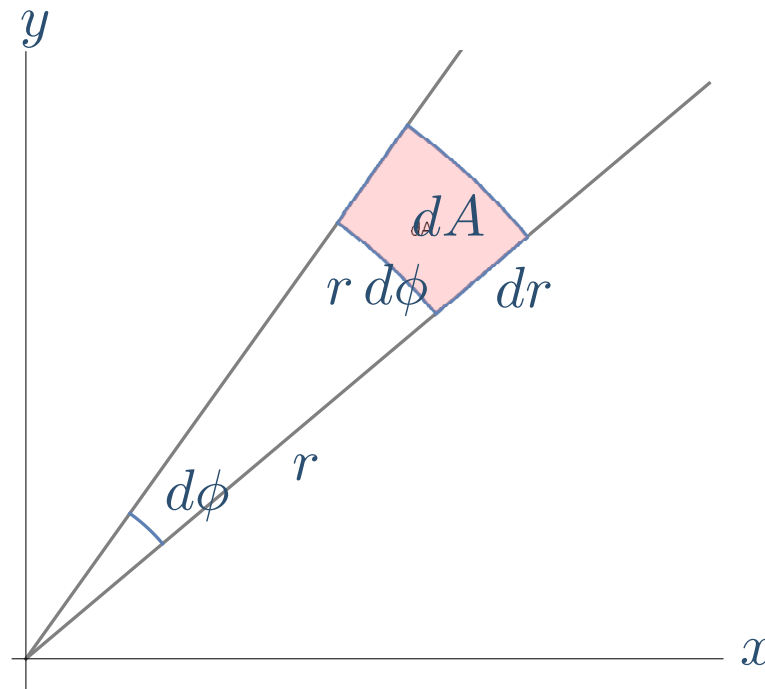
Esimerkki 3.M2

Esimerkki 3.M3

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit



Kätevä sääntö Jacobin determinantin muistamiseksi on käyttää ns. pinta-alkioita. Kapeiden pylväiden pohjien ala dA , mikä karteesisissa koordinaateissa on $dA = dx dy$, saa nyt muodon $dA = r dr d\phi$. Oheisen kuvan dA on (pinkki) ‘suorakaide’, jonka toinen sivu on dr ja toinen $r d\phi$.



Esimerkki 3.L1

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Polaari

Pinta-alkio

Esimerkki 3.L1

Esimerkki 3.L2

Esimerkki 3.L3

Esimerkki 3.L4

Esimerkki 3.L5

Esimerkki 3.M1

Esimerkki 3.M2

Esimerkki 3.M3

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Uskon vahvistamiseksi lasketaan R -säteisen puolipallon tilavuus napakoordinaatti-integraalin avulla.

Origokeskisen pallon yhtälö on $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Tästä ratkaisemme

$$z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Puolipallon tilavuus saadaan siis integraalista

$$V = \int_A \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \, dx \, dy,$$

missä A on R -säteinen origokeskinen ympyrä.



Esimerkki 3.L2

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Polaari

Pinta-alkio

Esimerkki 3.L1

Esimerkki 3.L2

Esimerkki 3.L3

Esimerkki 3.L4

Esimerkki 3.L5

Esimerkki 3.M1

Esimerkki 3.M2

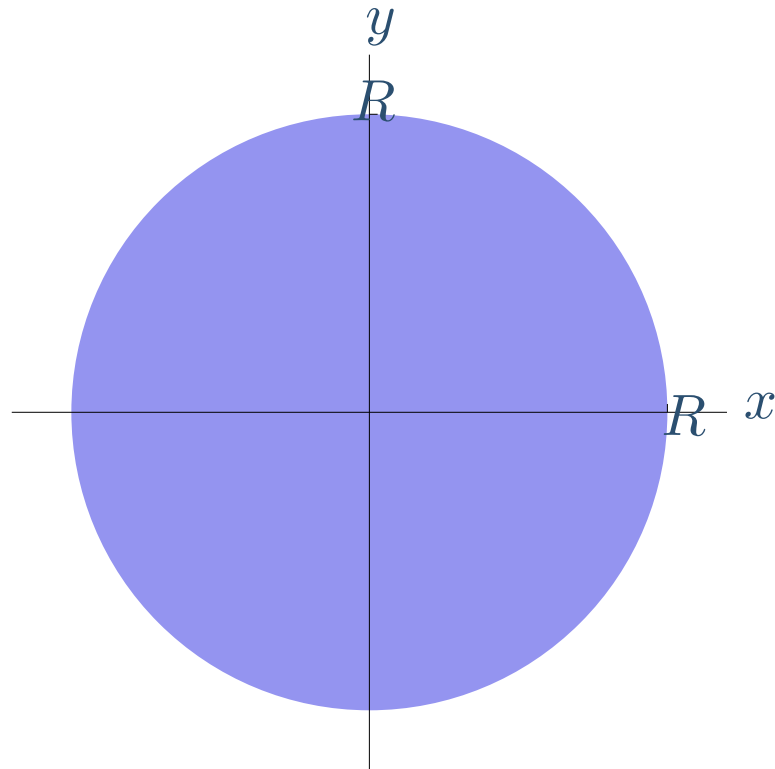
Esimerkki 3.M3

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Kuva integroimisalueesta A





Esimerkki 3.L3

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Polaari

Pinta-alkio

Esimerkki 3.L1

Esimerkki 3.L2

Esimerkki 3.L3

Esimerkki 3.L4

Esimerkki 3.L5

Esimerkki 3.M1

Esimerkki 3.M2

Esimerkki 3.M3

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Tehdään napakoordinaattisijoitus

$$x = r \cos \phi,$$

$$y = r \sin \phi,$$

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

$$dx dy = r dr d\phi.$$

Tässä sijoituksessa $r\phi$ -tason väli

$$B = \{(\phi, r) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

kuvautuu alkuperäiseksi integroimisalueeksi A .



Esimerkki 3.L4

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Polaari

Pinta-alkio

Esimerkki 3.L1

Esimerkki 3.L2

Esimerkki 3.L3

Esimerkki 3.L4

Esimerkki 3.L5

Esimerkki 3.M1

Esimerkki 3.M2

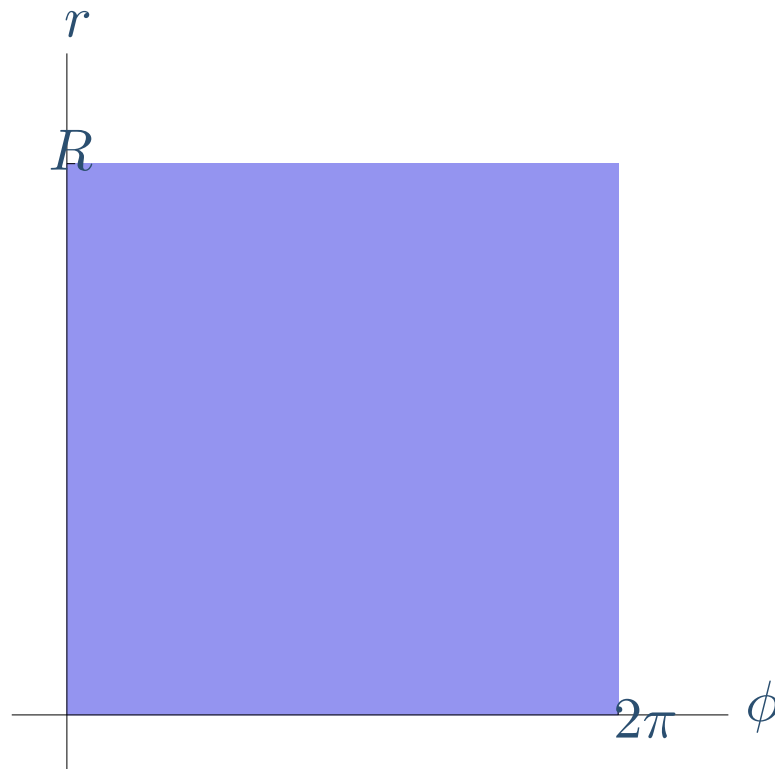
Esimerkki 3.M3

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Kuva uudesta integroimisalueesta B





Esimerkki 3.L5

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Polaari

Pinta-alkio

Esimerkki 3.L1

Esimerkki 3.L2

Esimerkki 3.L3

Esimerkki 3.L4

Esimerkki 3.L5

Esimerkki 3.M1

Esimerkki 3.M2

Esimerkki 3.M3

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Napakoordinaateissa integroimisalue on siis väli, joten iteroitu integraali on suoraviivainen

$$\begin{aligned} V &= \int_B r \sqrt{R^2 - r^2} \, dr \, d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^R r (R^2 - r^2)^{1/2} \, dr \right) d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left|_r=0^R \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(R^2 - r^2)^{3/2}}{3/2} \right) \right. d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{R^3}{3} d\phi \\ &= \frac{2\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

Tämä on tietenkin koulusta tuttu puolipallon tilavuus.



Esimerkki 3.M1

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Polaari

Pinta-alkio

Esimerkki 3.L1

Esimerkki 3.L2

Esimerkki 3.L3

Esimerkki 3.L4

Esimerkki 3.L5

Esimerkki 3.M1

Esimerkki 3.M2

Esimerkki 3.M3

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Olkoon A ympyrälevy, jonka säde on 1 ja keskipiste $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Lasketaan integraali

$$I = \int_A y^3 dx dy.$$

Ratkaisu: Demotehtävässä III/1 näimme, että A :n reunakäyrä saadaan napakoordinaattiyhtälöstä $r = 2 \sin \phi, 0 \leq \phi \leq \pi$. Levyn A pisteet käydään siis läpi, kun napakoordinaatit käyvät läpi joukon

$$B = \{(\phi, r) \mid 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq r \leq 2 \sin \phi\}.$$



Esimerkki 3.M2

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Polaari

Pinta-alkio

Esimerkki 3.L1

Esimerkki 3.L2

Esimerkki 3.L3

Esimerkki 3.L4

Esimerkki 3.L5

Esimerkki 3.M1

Esimerkki 3.M2

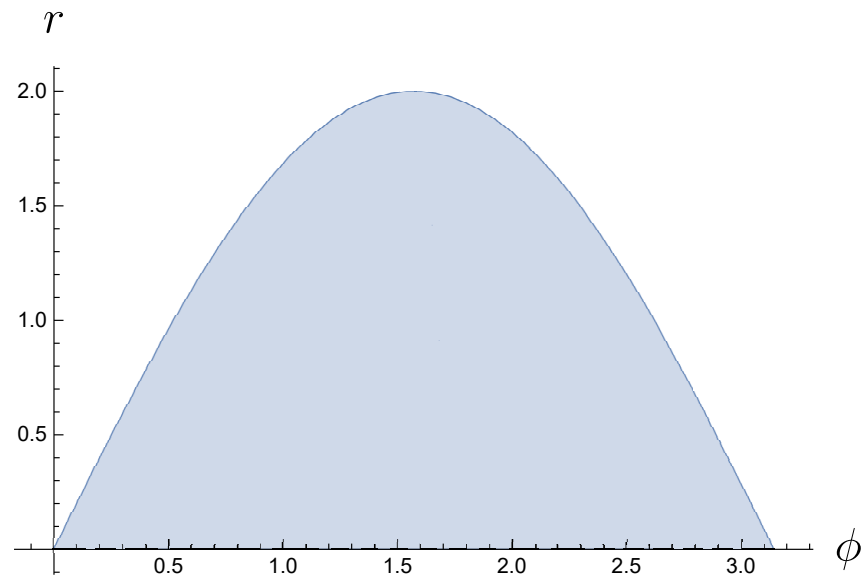
Esimerkki 3.M3

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Kuva uudesta integroimisalueesta B . Edelleen ϕ
vaaka-akselilla ja r pystyakselilla



Koska $y^3 = r^3 \sin^3 \phi$, kysytty integraali saadaan siis iteroituna
integraalina

$$I = \int_{\phi=0}^{\pi} \left(\int_{r=0}^{2 \sin \phi} (r^3 \sin^3 \phi) r dr \right) d\phi$$



Esimerkki 3.M3

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Polaari

Pinta-alkio

Esimerkki 3.L1

Esimerkki 3.L2

Esimerkki 3.L3

Esimerkki 3.L4

Esimerkki 3.L5

Esimerkki 3.M1

Esimerkki 3.M2

Esimerkki 3.M3

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

$$\begin{aligned} I &= \int_{\phi=0}^{\pi} \sin^3 \phi \left(\int_{r=0}^{2 \sin \phi} r^4 dr \right) d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{\pi} \sin^3 \phi \left(\left|_{r=0}^{2 \sin \phi} \frac{r^5}{5} \right) d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{32}{5} \sin^8 \phi d\phi \\ &= \frac{64}{5} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \sin^8 \phi d\phi \\ &= \frac{64}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 7\pi/4. \end{aligned}$$

Lopussa käytimme sinin symmetriaa ($\sin \phi = \sin(\pi - \phi)$) ja kaava-arkin kaavaa integraalille $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x dx$.



Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Lisäesimerkkejä



Esimerkki 3.N1

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

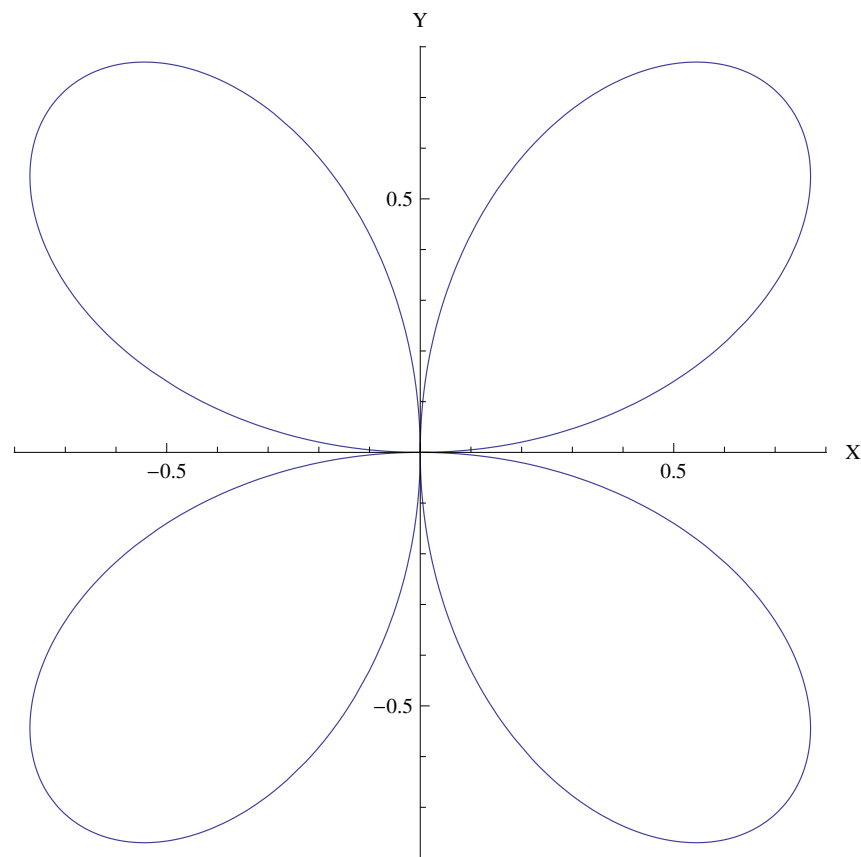
Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Selitä, miksi napakoordinaattiyhtälö $r(\phi) = \sin 2\phi$ vastaa oheisen kuvan neliapilaa. Laske neliapilan yhden terälehden pinta-ala.





Esimerkki 3.N2

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Kyseisen käyrän pisteitä (x, y) saadaan sijoittamalla suuntakulman ϕ arvoja yhtälöihin

$$x = r \cos \phi = \sin 2\phi \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi = \sin 2\phi \sin \phi.$$

Kun tässä ϕ kasvaa $0 \rightarrow \pi/4$, niin $\sin 2\phi$ kasvaa $0 \rightarrow 1$, eli sektorissa $\phi \in [0, \pi/4]$ käyrä vähitellen etääntyy origosta etäisyydelle 1. Kun ϕ edelleen kasvaa $\pi/4 \rightarrow \pi/2$, niin $\sin 2\phi$ vähenee $1 \rightarrow 0$. Sektorissa $\phi \in [\pi/4, \pi/2]$ käyrä siis palaa takaisin origoon kuvan mukaisesti.

Kun $\phi \in [\pi/2, \pi]$ funktio $\sin 2\phi$ muuttuu $0 \rightarrow -1 \rightarrow 0$.

Erityisesti sen arvot ovat tällä välillä negatiivisia. Yo. kaavat tuottavatkin sitten 4. neljänneksessä muodoltaan samanlaisen lehden. Kun ϕ käy läpi välin $[0, 2\pi]$ saadaan koko neliapila.



Esimerkki 3.N3

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Olkoon L ensimmäisen neljänneksen terälehti. Sen koko reunakäyrä saadaan, kun $\phi \in [0, \pi/2]$, ja joukossa L $0 \leq r \leq \sin 2\phi$. Tämä onkin räätälöity Fubinin lauseen käyttöä varten napakoordinaateissa! Alueen L pinta-ala saadaan siis integraalista.

$$\begin{aligned}\int_L 1 &= \int_{\phi=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{\sin 2\phi} r \, dr \right) d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{\pi/2} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^{\sin 2\phi} d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin^2 2\phi \, d\phi.\end{aligned}$$



Esimerkki 3.N4

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Käytetään kaavaa $\sin 2\phi = 2 \sin \phi \cos \phi$. Integroitavaksi jää

$$\frac{1}{2} \sin^2 2\phi = 2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi = 2 \sin^2 \phi - 2 \sin^4 \phi.$$

Kaava-arkin mukaan $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \pi/4$ ja

$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx = 3\pi/16$, joten vastaukseksi saadaan

$$A(L) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{8}.$$



Esimerkki 3.O1

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

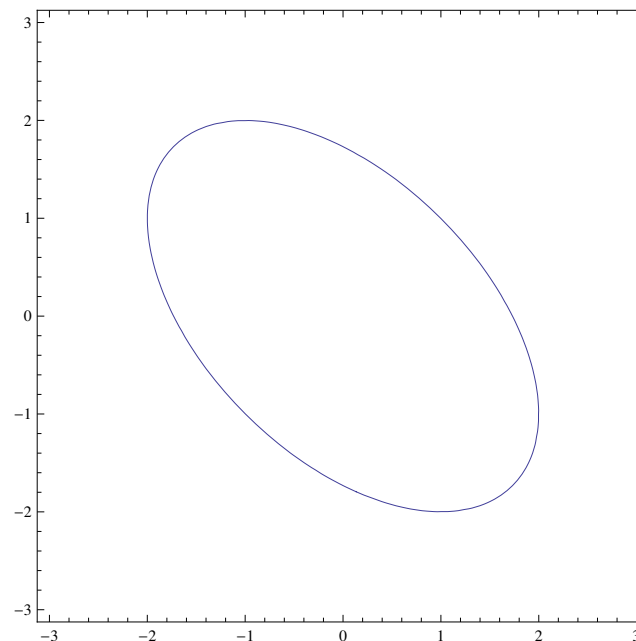
Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Tehtävä: Kuvasta näemme (tai harjoitustehtävänä), että ellipsillä $x^2 + xy + y^2 = 3$



molemmat koordinaatit on rajattu välille $x, y \in [-2, 2]$. Näin ollen ellipsin sisällä ja reunalla funktio $z = z(x, y) = 4 - x^2$ saa vain ei-negatiivisia arvoja, joten sen kuvaaja ellipsin sisäalueen päällä rajaa erään kappaleen. Laske sen tilavuus.



Esimerkki 3.O2

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

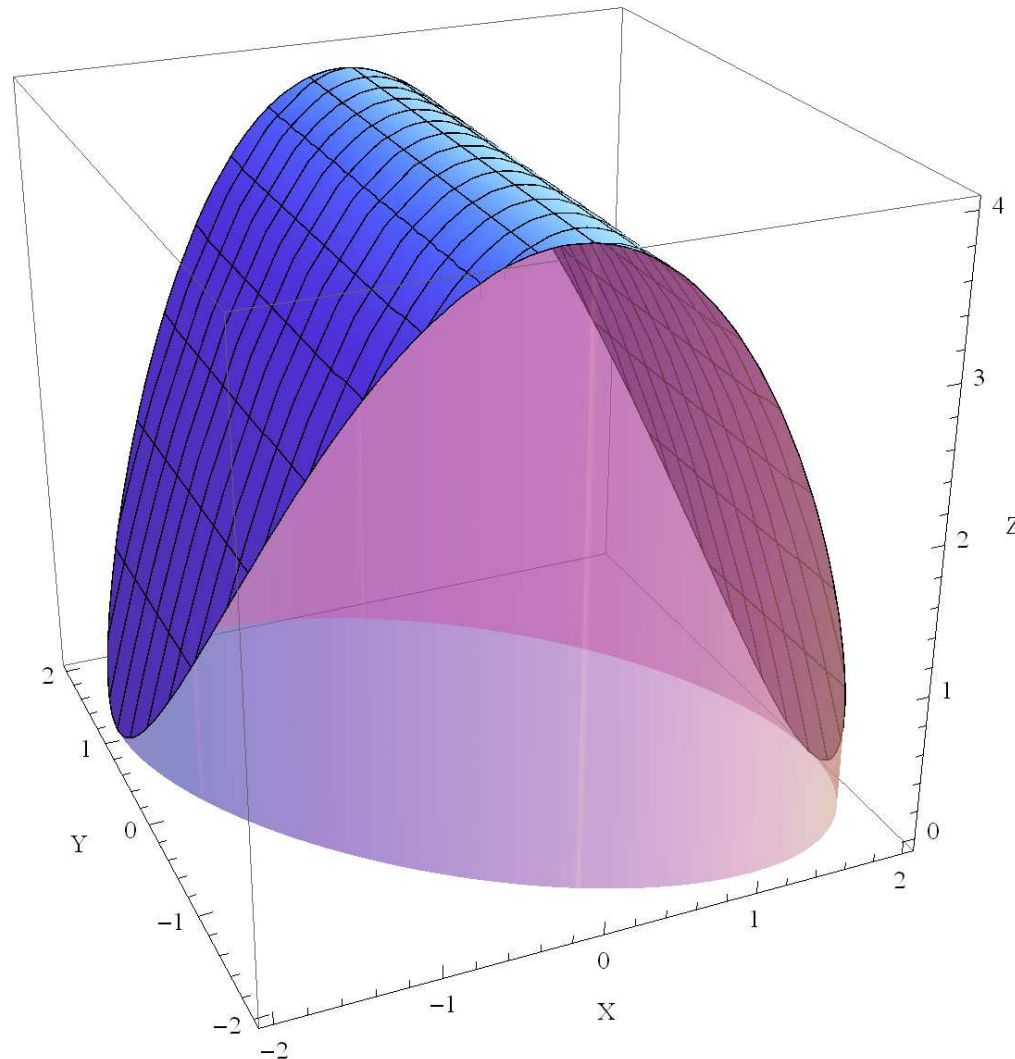
Esimerkki 3.P2

Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit





Esimerkki 3.O3

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Olkoon E ellipsin sisäalue reunoineen. Kysytty tilavuus on

$$V = \int_E (4 - x^2) dx dy.$$

On monta tapaa edetä. Yksi on yksinkertaista integroimisalue helpommin käsiteltävään muotoon. Diagonalisoidaan ensin sen määrittelevä neliömuoto. Viime viikolla näimme, että muuttujien $u = (x + y)/\sqrt{2}$ ja $v = (x - y)/\sqrt{2}$ avulla kirjoitettuna

$$x^2 + xy + y^2 \leq 3 \Leftrightarrow 3u^2 + v^2 \leq 6.$$

Tässä $x = (u + v)/\sqrt{2}$ ja $y = (u - v)/\sqrt{2}$.



Esimerkki 3.O4

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Näin ollen

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Jacobin determinantti on siis vakio -1 , itseisarvoltaan 1 . Jos merkitsemme E' :lla ellipsin $3u^2 + v^2 = 6$ sisäaluetta, niin saimme

$$V = \int_{E'} \left(4 - \frac{(u + v)^2}{2} \right) du dv.$$

Skaalataan seuraavaksi ellipsi ympyräksi sijoituksella $\sqrt{3}u = w$. Tällöin $u = w/\sqrt{3}$, joten $du = dw/\sqrt{3}$, ja

$$V = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{w^2 + v^2 \leq 6} \left(4 - \frac{w^2}{6} - \frac{vw}{\sqrt{3}} - \frac{v^2}{2} \right) dw dv.$$



Esimerkki 3.O5

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Lopuksi siirrytään napakoordinaatteihin sijoituksella

$w = r \cos \phi$, $v = r \sin \phi$, $v^2 + w^2 = r^2$, jolloin

$\partial(v, w)/\partial(r, \phi) = r$. Integroimisalue on vw -tason origokeskinen ympyrä, joten $\phi \in [0, 2\pi]$ muuttujan r arvosta riippumatta:

$$V = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{r=0}^{\sqrt{6}} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(4 - r^2 \left(\frac{\sin^2 \phi}{2} + \frac{\sin \phi \cos \phi}{\sqrt{3}} + \frac{\cos^2 \phi}{6} \right) \right) r \, d\phi \, dr$$

Tässä sisäintegraaleina esiintyvä trigonometriset integraalit ovat tunnetusti

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi = \pi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \, d\phi, \quad \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi \, d\phi = 0.$$



Esimerkki 3.O6

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Saadaan siis seuraava suoraviivainen ulompi integraali, joka antaa vastaukseksi

$$V = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{r=0}^{\sqrt{6}} \pi \left(8r - \frac{2r^3}{3} \right) dr = 6\sqrt{3}\pi.$$

Jälkitarkastelu: Vaiheita oli useita, joten virheriskin pienentämiseksi tehdään lopuksi suuruusluokka-arvio. Ellipsin puoliakselit olivat pituudeltaan $a = \sqrt{6}$ ja $b = \sqrt{2}$, joten sen ala on $A = \pi ab = \pi\sqrt{12} = 2\sqrt{3}\pi$. Jos siis sen päällä oleva kappale olisikin lieriö, jonka korkeus on $h = 3$, niin senkin tilavuus olisi $V_2 = Ah = 6\sqrt{3}\pi$. Kuvan perusteella on hyvin uskottavaa, että tarkasteltavan kappaleen “keskimääräinen korkeus” on kolme. Saamamme vastaus on siis ainakin järkevää suuruusluokkaa.



Esimerkki 3.P1

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Perustellaan todennäköisyyslaskennassa usein tarvittava epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

napakoordinaattien avulla.

Ratkaisu: Olkoon $M > 0$ parametri (joka myöhemmin $\rightarrow \infty$).
Merkitään

$$I(M) = \int_{-M}^M e^{-x^2} dx.$$

$$Y(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq M^2\}.$$

$$S(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [-M, M]\}.$$



Esimerkki 3.P2

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Tässä siis $Y(M)$ on tason origokeskinen ympyrälevy, säde M . Vastaavasti $S(M)$ on origokeskinen neliö, jonka sivun pituus on $2M$.

Lähtökohtana on havainto, joka perustuu ‘vakion’ siirtosäännön käyttöön ja Fubinin lauseeseen:

$$\begin{aligned} I(M)^2 &= \left(\int_{x=-M}^M e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{y=-M}^M e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{x=-M}^M e^{-x^2} \left(\int_{y=-M}^M e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \int_{x=-M}^M \left(\int_{y=-M}^M e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \int_{(x,y) \in S(M)} e^{-(x^2+y^2)} dy dx. \end{aligned}$$



Esimerkki 3.P3

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Koska funktio $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} > 0$ kaikkialla, ja $Y(M) \subset S(M) \subset Y(\sqrt{2}M)$ saamme epäyhtälöketjun

$$\int_{(x,y) \in Y(M)} f < \int_{(x,y) \in S(M)} f < \int_{(x,y) \in Y(\sqrt{2}M)} f.$$

Laskemme seuraavaksi napakoordinaattien avulla integraalin $\int_{Y(M)} f$. Tässä $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-r^2}$, $dx dy = r dr d\phi$. Alue $Y(M)$ tulee käytyä läpi, kun $0 \leq r \leq M$ ja $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Siis

$$\begin{aligned} \int_{Y(M)} f &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^M r e^{-r^2} dr d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left|_{r=0}^M \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right) d\phi \right. \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - e^{-M^2}) d\phi = \pi(1 - e^{-M^2}). \end{aligned}$$



Esimerkki 3.P4

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Esimerkki 3.N1

Esimerkki 3.N2

Esimerkki 3.N3

Esimerkki 3.N4

Esimerkki 3.O1

Esimerkki 3.O2

Esimerkki 3.O3

Esimerkki 3.O4

Esimerkki 3.O5

Esimerkki 3.O6

Esimerkki 3.P1

Esimerkki 3.P2

Esimerkki 3.P3

Esimerkki 3.P4

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Tässä käytimme määräämätöntä integraalia

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2},$$

minkä voi helposti tarkistaa derivoimalla ketjusäännön avulla. Tuloksestamme seuraa, että $\int_{Y(M)} f \rightarrow \pi$ kun $M \rightarrow \infty$. Näin ollen Sandwich-periaatteen nojalla

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I(M) = \sqrt{\pi}.$$



Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Cylinder

Tilavuusalkio 1

Tilavuusalkio 2

Esimerkki 3.Q1

Esimerkki 3.Q2

Pallokoordinaatit

Sylinterikoordinaatit



Sylinterikoordinaatit

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Cylinder

Tilavuusalkio 1

Tilavuusalkio 2

Esimerkki 3.Q1

Esimerkki 3.Q2

Pallokoordinaatit

Sylinterikoordinaatteja (r, ϕ, z) käytettäessä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteitä parametrisoidaan siten, että xy -koordinaatit korvataan napakoordinaateilla, mutta z -koordinaatin annetaan olla ennallaan. Koordinaatistonmuunnosfunktion

$$g(r, \phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$$

Jacobin matriisiksi saadaan osittaisderivoimalla

$$Dg = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kehittämällä viimeisen vaakarivin mukaan saadaan Jacobin determinantiksi $\partial(x, y, z)/\partial(r, \phi, z) = r$.



Tilavuusalkio 1

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Cylinder

Tilavuusalkio 1

Tilavuusalkio 2

Esimerkki 3.Q1

Esimerkki 3.Q2

Pallokoordinaatit

3-kertaisissa integraaleissa pinta-alkion Jacobin determinantin visualisointina korvaa tilavuusalkio. Karteesisissa koordinaateissa tilavuusalkio (=väli) on suorakulmainen särmiö $dV = dx dy dz$, mikä sylinterikoordinaateissa korvautuu hieman vääristyneellä laatikolla, jonka sivut ovat pituudeltaan $dr, r d\phi$ ja dz .

Demotehtävässä III/3 näimme, että napakoordinaatteja käytettäessä pinta-alkion sivut ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Sama pätee siis sylinterikoordinaateille, joten seuraavan kalvon tilavuusalkion mitta on

$$dV = r dr d\phi dz.$$



Tilavuusalkio 2

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Cylinder

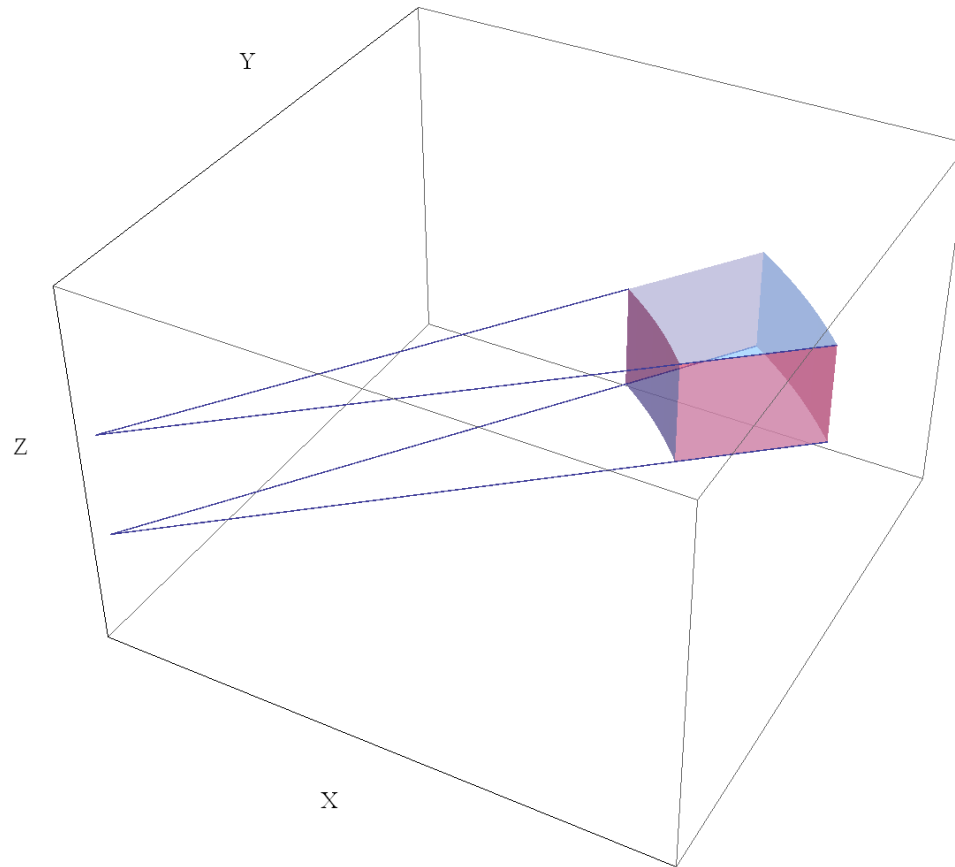
Tilavuusalkio 1

Tilavuusalkio 2

Esimerkki 3.Q1

Esimerkki 3.Q2

Pallokoordinaatit





Esimerkki 3.Q1

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Cylinder

Tilavuusalkio 1

Tilavuusalkio 2

Esimerkki 3.Q1

Esimerkki 3.Q2

Pallokoordinaatit

Napa- tai sylinterikoordinaattien käyttö on usein indikoitu, kun suure $x^2 + y^2$ esiintyy integroimisalueen määrittelyssä.

Tehtävä: Laske funktion $f(x, y, z) = y + z$ integraali yli alueen A , jota rajaavat putkipinta $x^2 + y^2 = 1$, taso $z = 0$ ja pinta $z = 1 + (x^2 + y^2)/4$.

Ratkaisu: Käytetään sylinterikoordinaatteja. Selvästi muuttujan z vaihteluväli on $0 \leq z \leq 1 + r^2/4$.

Kulmamuuttujaa ϕ ei rajaa mikään, joten annetaan sen käydä läpi väli $[0, 2\pi]$ (jotta koko alue A tulee käytyä läpi tarkalleen kerran). Putki rajaa muuttujan r vaihteluväliksi $0 \leq r \leq 1$.

Integroitava funktio on sylinterikoordinaateissa

$$f(r, \phi, z) = y + z = z + r \sin \phi.$$



Esimerkki 3.Q2

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Cylinder

Tilavuusalkio 1

Tilavuusalkio 2

Esimerkki 3.Q1

Esimerkki 3.Q2

Pallokoordinaatit

Kysytty integraali on siis Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{1+r^2/4} (z + r \sin \phi) r \, dz \, dr \, d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \left(\frac{r}{2} + \frac{r^3}{4} + \frac{r^5}{32} + r^2 \sin \phi + \frac{1}{4} r^4 \sin \phi \right) dr \, d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\frac{61}{192} + \frac{23}{60} \sin \phi \right) d\phi \\ &= \frac{61\pi}{96}.\end{aligned}$$



Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Pyöräysympyrä

Pallo 1

Pallo 2

Tilavuusalkio

Esimerkki 3.R1

Esimerkki 3.R2

Esimerkki 3.R3

Esimerkki 3.R4

Pallokoordinaatit



Pyöräysympyrä

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit
Pyöräysympyrä

Pallo 1

Pallo 2

Tilavuusalkio

Esimerkki 3.R1

Esimerkki 3.R2

Esimerkki 3.R3

Esimerkki 3.R4

Kun xz -tason piste (x_0, z_0) , $x_0 \geq 0$, (tai 3-ulotteisessa maailmassa ehkä pikemminkin $(x_0, 0, z_0)$) pyörähtää z -akselin ympäri, se piirtää ympyrän tasossa $z = z_0$. Ympyrällä ovat ne pisteet, jotka ovat etäisyydellä x_0 z -akselista. Jos ϕ on kiertokulma, niin ko. pisteen koordinaatit ovat

$$(x, y, z) = (x_0 \cos \phi, x_0 \sin \phi, z_0),$$

ja parametri $\phi \in [0, 2\pi)$. Yhtä hyvin voidaan valita ϕ joltakin muulta 2π :n mittaiselta väliltä, kuten napakoordinaattikulma aina muulloinkin.



Pallokoordinaatit 1

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit
Pyöräysympyrä

Pallo 1

Pallo 2

Tilavuusalkio

Esimerkki 3.R1

Esimerkki 3.R2

Esimerkki 3.R3

Esimerkki 3.R4

- Parametrisoitu käyrä $x(\theta) = r \sin \theta$, $z(\theta) = r \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ on xz -tason puoliympyrä $x^2 + z^2 = r^2$, $x \geq 0$.
- Kun $\theta = 0$ ollaan pohjoisnavalla $(x, z) = (0, r)$, ja kun $\theta = \pi$ ollaan etelänavalla $(x, z) = (0, -r)$.
- Tämän käyrän pyöräyttäessä z -akselin ympäri syntyy origokeskinen r -säteinen pallopinta, jolla

$$\begin{cases} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{cases}$$

- Tässä ϕ on pallopinnan pituuspiiri (=meridiaani). Pohjoiset pallonpuoliskolla $\theta \in [0, \pi/2)$, päiväntasaajalla $\theta = \pi/2$, ja eteläisellä pallonpuoliskolla $\theta \in (\pi/2, \pi]$.
- Kun $r \in [0, \infty)$, niin pallopinnat täyttävät koko avaruuden $\mathbb{R}^3$.



Pallokoordinaatit 2

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Pyöräysympyrä

Pallo 1

Pallo 2

Tilavuusalkio

Esimerkki 3.R1

Esimerkki 3.R2

Esimerkki 3.R3

Esimerkki 3.R4

Kuvauksen $(x, y, z) = g(r, \theta, \phi)$ derivaatan matriisi on

$$Dg(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Kehittämällä tämä alimman vaakarivin suhteen saadaan Jacobin determinantiksi

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta.$$

Pallokoordinaattien käyttö on jossain määrin indikoitu silloin, kun suure

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ilmenee joko integroitavan funktion tai integroimisalueen määrittelyssä.



Tilavuusalkio

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Pyöräysympyrä

Pallo 1

Pallo 2

Tilavuusalkio

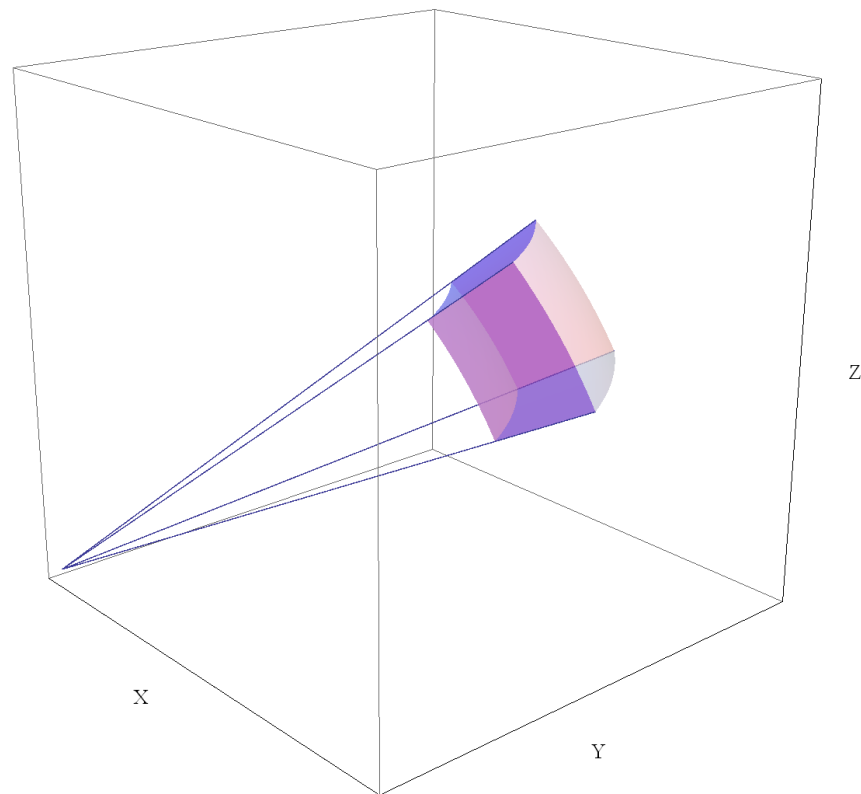
Esimerkki 3.R1

Esimerkki 3.R2

Esimerkki 3.R3

Esimerkki 3.R4

Pallokoordinaatiston tilavuusalkioksi tulee hieman vääristynyt suorakulmainen koppi, jonka särmien pituudet ovat dr , $r \sin \theta d\phi$ ja $r d\theta$.





Esimerkki 3.R1

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Pyöräysympyrä

Pallo 1

Pallo 2

Tilavuusalkio

Esimerkki 3.R1

Esimerkki 3.R2

Esimerkki 3.R3

Esimerkki 3.R4

Tehtävä: Erään planeetan (pallomainen, säde R) tiheys sen pinnalla on ρ_0 . Planeetan painovoiman ansioista tiheämpi aines on painunut sen keskelle. Oletetaan, että tiheys planeetan sisälle mentäessä kasvaa lineaarisesti syvyyden funktiona siten, että planeetan keskipisteessä se on $3\rho_0$. Laske planeetan massa.

Ratkaisu: Asetetaan origo planeetan keskipisteeseen. Tehtävässä annettiin, että tiheys riippuu vain etäisyydestä r

$$\rho = \rho(r) = A + Br,$$

missä A, B ovat vakioita. Yhtälöistä $\rho(0) = 3\rho_0$ ja $\rho(R) = \rho_0$ saadaan $A = 3\rho_0, B = -2\rho_0/R$.



Esimerkki 3.R2

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Pyöräysympyrä

Pallo 1

Pallo 2

Tilavuusalkio

Esimerkki 3.R1

Esimerkki 3.R2

Esimerkki 3.R3

Esimerkki 3.R4

Keskipisteestä etäisyydellä $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ olevan tilavuusalkion $dV = dx dy dz$ massa on siten

$$dm = \rho(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dV = \rho_0 \left(3 - \frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{R} \right) dV.$$

Planeetan massa m saadaan laskemalla nämä yhteen

$$m = \int_{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2} \rho_0 \left(3 - \frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{R} \right) dx dy dz.$$

Tässä on ilmeistä siirtyä pallokoordinaatteihin, jolloin $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ ja $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$.



Esimerkki 3.R3

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Pyöräysympyrä

Pallo 1

Pallo 2

Tilavuusalkio

Esimerkki 3.R1

Esimerkki 3.R2

Esimerkki 3.R3

Esimerkki 3.R4

Näin ollen vastaukseksi saadaan

$$\begin{aligned} m &= \rho_0 \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(3 - \frac{2r}{R}\right) r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \rho_0 \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \left(3 - \frac{2r}{R}\right) r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr \\ &= 2 \cdot 2\pi \rho_0 \int_{r=0}^R \left(3 - \frac{2r}{R}\right) r^2 \, dr \\ &= 2 \cdot 2\pi \rho_0 \left(\frac{R^3}{2} \right) = 2\pi R^3 \rho_0. \end{aligned}$$



Esimerkki 3.R4

Vektorilaskenta
2020

Lineaarikuvaus
ja mitta

Sijoitus
integraaliin

Napa-
koordinaatit

Lisäesimerkkejä

Sylinteri-
koordinaatit

Pallokoordinaatit

Pyöräysympyrä

Pallo 1

Pallo 2

Tilavuusalkio

Esimerkki 3.R1

Esimerkki 3.R2

Esimerkki 3.R3

Esimerkki 3.R4

Jälkitarkastelu: Koska planeetan tilavuus on $V = 4\pi R^3/3$, niin sen keskimääräinen tiheys on

$$\rho_{\text{average}} = \frac{m}{V} = 3\rho_0/2.$$

Tämä on välillä $(\rho_0, 3\rho_0)$, joten ainakin jossain määrin järkevä. Suuri osa planeetan tilavuudesta on lähellä sen pintaa, joten on luonnollista, että tiheys pinnalla on merkitsevämpi kuin tiheys keskellä.