



Vektorilaskenta

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Neljänteen lukuun liittyvää luentomateriaalia



Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Yleistä

Kertausta

Esimerkki 4A

Suunnattu

toinen derivaatta

(1/2)

Suunnattu toinen
derivaatta (2/2)

Laskuja (1/2)

Laskuja (2/2)

Esimerkki 4B.1

Esimerkki 4B.2

Esimerkki 4B.3

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Lokaaleista ääriarvoista



Yleistä

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Yleistä

Kertausta

Esimerkki 4A
Suunnattu
toinen derivaatta
(1/2)

Suunnattu toinen
derivaatta (2/2)

Laskuja (1/2)

Laskuja (2/2)

Esimerkki 4B.1

Esimerkki 4B.2

Esimerkki 4B.3

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Sanotaan, että funktiolla $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, on lokaali minimi (vast. maksimi) pisteessä $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^\circ$, jos löytyy sellainen $r > 0$, että $f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{y})$ (vast. $f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{y})$) kaikille $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r)$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{a}$. Oletetaan, että funktio f on vähintään luokkaa C^2 (eli kaikki sen toisen kertaluvun derivaatat ovat jatkuvia A :ssa).

- Tässä tapauksessa yhden muuttujan funktiolla $g_i(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ on vastaava lokaali ääriarvo kohdassa $x_i = a_i$. Lukiotietojen (tai Analyysi I:n) perusteella tällöin välttämättä derivaatta $g'_i(a_i) = \partial f / \partial x_i(\mathbf{a}) = 0$.
- Sama päättely voidaan toistaa jokaisen koordinaatin osalta, eli voimme päätellä, että $\nabla f(\mathbf{a}) = (0, \dots, 0)$. Sanomme tällaista pistettä $\mathbf{a}$ funktion f kriittiseksi pisteeksi.



Kertausta

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Yleistä

Kertausta

Esimerkki 4A
Suunnattu
toinen derivaatta
(1/2)

Suunnattu toinen
derivaatta (2/2)

Laskuja (1/2)

Laskuja (2/2)

Esimerkki 4B.1

Esimerkki 4B.2

Esimerkki 4B.3

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Derivaatan (tai yleisemmin gradientin) häviäminen pisteessä ei takaa, että kyseessä olisi lokaali ääriarvokohta. Ehto on välttämätön mutta ei riittävä. Yhden muuttujan tapauksessa käyttökelpoinen työkalu lisätutkimuksiin saatiin käyttämällä toista derivaattaa:

- Oletetaan, että (yhden muuttujan) funktion $f(x)$ derivaatta kohdassa $x = x_0$ häviää, $f'(x_0) = 0$. Tällöin:
- Jos $f''(x_0) < 0$, voimme päätellä, että x_0 on lokaali maksimikohta.
- Jos $f''(x_0) > 0$, voimme päätellä, että x_0 on lokaali minimikohta.
- Jos $f''(x_0) = 0$, emme voi päätellä mitään.

Tavoitteenamme on yleistää tämä työkalu usean muuttujan funktioille.



Esimerkki 4A

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Yleistä

Kertausta

Esimerkki 4A

Suunnattu
toinen derivaatta
(1/2)

Suunnattu toinen
derivaatta (2/2)

Laskuja (1/2)

Laskuja (2/2)

Esimerkki 4B.1

Esimerkki 4B.2

Esimerkki 4B.3

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tarkistetaan, että origo on funktion $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ kriittinen piste. Tutkitaan origon ääriarvoluonnetta.

Ratkaisu: Osittaisderivoimalla näemme, että $f_x(x, y) = 2x + 3y$ ja $f_y(x, y) = 3x + 2y$ molemmat häviävät origossa. Näin ollen origo on kriittinen piste. Toinen derivaatta $f_{xx}(x, y) = 2$ on positiivinen, joten funktiolla $g_1(x) = f(x, 0)$ on origossa lokaali minimi. Samoin toinen derivaatta $f_{yy}(x, y) = 2$ on positiivinen origossa, joten myös funktiolla $g_2(y) = f(0, y)$ on origossa lokaali minimi. Kuitenkin $f(t, -t) = t^2 - 3t^2 + t^2 = -t^2$, joten funktio f saa mielivaltaisen lähellä origoa myös negatiivisia arvoja. Suoralla $y = -x$ funktiolla f onkin origossa lokaali *maksimi*. Näin ollen origo ei ole lokaali minimikohta.



Suunnattu toinen derivaatta (1/2)

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Yleistä

Kertausta

Esimerkki 4A

Suunnattu
toinen derivaatta
(1/2)

Suunnattu toinen
derivaatta (2/2)

Laskuja (1/2)

Laskuja (2/2)

Esimerkki 4B.1

Esimerkki 4B.2

Esimerkki 4B.3

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

- Esimerkin 4A opetus on, ettei funktiolla f välttämättä ole lokaalia ääriarvoa kriittisessä pisteessä $\mathbf{a}$, vaikka kaikilla sellaisilla funktioilla, jotka saadaan rajoittamalla f $\mathbf{a}$:n kautta kulkevalle koordinaattiakselin suuntaiselle suoralle olisikin lokaali ääriarvo ko. kohdassa.
- On nimittäin mahdollista, että rajoittamalla f jollekin toiselle pisteen $\mathbf{a}$ kautta kulkevalle suoralle saadaankin vastakkaisella tavalla käyttäytyvä funktio.
- Jos $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ on jokin nollasta eroava vektori, niin voimme rajoittaa funktion f $\mathbf{u}$:n suuntaiselle suoralle:

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}),$$

jolloin parametrin arvo $t = 0$ vastaa kriittistä pistettä $\mathbf{a}$.



Suunnattu toinen derivaatta (2/2)

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Yleistä

Kertausta

Esimerkki 4A
Suunnattu
toinen derivaatta
(1/2)

Suunnattu toinen
derivaatta (2/2)

Laskuja (1/2)

Laskuja (2/2)

Esimerkki 4B.1

Esimerkki 4B.2

Esimerkki 4B.3

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

- Kutsumme derivattaa $g''(t)$ funktion f *suunnatuksi toiseksi derivaataksi* (vektorin $\mathbf{u}$ suuntaan) pisteessä $\mathbf{a}$, $D_{\mathbf{u}}^2 f(\mathbf{a})$.
- Yhden muuttujan tapauksen kanssa analoginen tulos on (todistus vaatii Taylorin sarjojen käyttöä, ja sivuutetaan siksi): Oletetaan, että $\mathbf{a}$ on funktion f kriittinen piste.
 - ◆ Jos kaikki suunnatut toiset derivaatat $D_{\mathbf{u}}^2 f(\mathbf{a})$, $\mathbf{u} \neq 0$, ovat positiivisia, on $\mathbf{a}$ lokaali minimikohta.
 - ◆ Jos kaikki suunnatut toiset derivaatat $D_{\mathbf{u}}^2 f(\mathbf{a})$, $\mathbf{u} \neq 0$, ovat negatiivisia, on $\mathbf{a}$ lokaali maksimikohta.
 - ◆ Jos suunnattujen toisten derivaattojen joukossa esiintyy sekä positiivisia että negatiivisia, $\mathbf{a}$ on ns. *satulapiste*, eikä se tällöin ole lainkaan lokaali ääriarvokohta.
 - ◆ Jos suunnattujen toisten derivaattojen on vain toista etumerkkiä ja lisäksi arvo nolla, emme voi sanoa mitään.



Laskuja (1/2)

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Yleistä

Kertausta

Esimerkki 4A

Suunnattu

toinen derivaatta
(1/2)

Suunnattu toinen
derivaatta (2/2)

Laskuja (1/2)

Laskuja (2/2)

Esimerkki 4B.1

Esimerkki 4B.2

Esimerkki 4B.3

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Johdetaan kaava suunnatulle toiselle derivaatalle kahden muuttujan tapauksessa. Oletetaan, että $f(x, y)$ on luokkaa C^2 , ja että $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Tällöin $\mathbf{u}$:n suuntaan rajoitettu funktio on

$$g(t) = f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2).$$

Koska $\frac{d}{dt}(x_0 + tu_1) = u_1$ ja $\frac{d}{dt}(y_0 + tu_2) = u_2$, niin ketjusäännön avulla saadaan

$$g'(t) = f_x(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)u_1 + f_y(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)u_2,$$

ja edelleen ketjusääntöä vielä kahdesti soveltaen



Laskuja (2/2)

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Yleistä

Kertausta

Esimerkki 4A

Suunnattu

toinen derivaatta
(1/2)

Suunnattu toinen
derivaatta (2/2)

Laskuja (1/2)

Laskuja (2/2)

Esimerkki 4B.1

Esimerkki 4B.2

Esimerkki 4B.3

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

$$g''(t) = f_{xx}(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)u_1^2 + f_{xy}(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)u_1u_2 \\ + f_{yx}(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)u_2u_1 + f_{yy}(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)u_2^2.$$

Toiseksi suunnatuksi derivaataksi saadaan lopulta

$$D_{\mathbf{u}}^2 f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)u_1^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)u_1u_2 + f_{yy}(x_0, y_0)u_2^2.$$



Esimerkki 4B.1

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Yleistä

Kertausta

Esimerkki 4A

Suunnattu
toinen derivaatta
(1/2)

Suunnattu toinen
derivaatta (2/2)

Laskuja (1/2)

Laskuja (2/2)

Esimerkki 4B.1

Esimerkki 4B.2

Esimerkki 4B.3

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Määrätään funktion

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

kriittiset pisteet, ja selvitetään niiden luonne (= lokaali minimi/maksimi, satulapiste).

Ratkaisu: Osittaisderivoimalla saadaan

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x).$$

Kriittisissä pisteessä siis on voimassa yhtälöt $x^2 = y$ ja $y^2 = x$. Sijoittamalla ensimmäinen jälkimmäiseen saadaan yhtälö $x^4 = x$, mistä ratkeaa $x = 0$ tai $x = 1$ (muut ratkaisut eivät ole reaalisia).



Esimerkki 4B.2

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Yleistä

Kertausta

Esimerkki 4A

Suunnattu

toinen derivaatta

(1/2)

Suunnattu toinen
derivaatta (2/2)

Laskuja (1/2)

Laskuja (2/2)

Esimerkki 4B.1

Esimerkki 4B.2

Esimerkki 4B.3

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Kriittisiksi pisteiksi saadaan siis $\mathbf{a}_1 = (0, 0)$ ja $\mathbf{a}_2 = (1, 1)$. Tutkitaan suunnattuja toisia derivaattoja näissä pisteissä tarkemmin. Olkoon $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ jokin nollasta eroava vektori. Funktion f toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -3, \quad f_{yy} = 6y.$$

Pisteessä $\mathbf{a}_1 = (0, 0)$ saamme laskukaavamme perusteella suunnatuksi toiseksi derivaataksi

$$D_{\mathbf{u}}^2 f(0, 0) = 0 \cdot u_1^2 - 2 \cdot 3u_1u_2 + 0 \cdot u_2^2 = -6u_1u_2.$$

Valinnalla $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ (normeerasin tämän yksikkövektoriksi, mutta se ei ole välttämätöntä), saadaan $D_{\mathbf{u}}^2 f(\mathbf{a}_1) = -6(1/\sqrt{2})^2 = -3 < 0$. Valinnalla $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ puolestaan saadaan $D_{\mathbf{u}}^2 f(\mathbf{a}_1) = 3 > 0$. Molemmat etumerkit esiintyvät, joten $\mathbf{a}_1$ on satulapiste.



Esimerkki 4B.3

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Yleistä

Kertausta

Esimerkki 4A

Suunnattu
toinen derivaatta
(1/2)

Suunnattu toinen
derivaatta (2/2)

Laskuja (1/2)

Laskuja (2/2)

Esimerkki 4B.1

Esimerkki 4B.2

Esimerkki 4B.3

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Pisteessä $\mathbf{a}_2 = (1, 1)$ sitä vastoin $f_{xx}(\mathbf{a}_2) = 6$, $f_{xy}(\mathbf{a}_2) = -3$ ja $f_{yy}(\mathbf{a}_2) = 6$, joten suunnatuksi toiseksi derivaataksi tulee

$$D_{\mathbf{u}}^2 f(\mathbf{a}_2) = 6(u_1^2 - u_1 u_2 + u_2^2).$$

Neliöksi täydentämällä

$$\begin{aligned} u_1^2 - u_1 u_2 + u_2^2 &= u_1^2 - 2u_1\left(\frac{1}{2}u_2\right) + \frac{1}{4}u_2^2 + \frac{3}{4}u_2^2 \\ &= \left(u_1 - \frac{1}{2}u_2\right)^2 + \frac{3}{4}u_2^2. \end{aligned}$$

Näemme heti, että tämä on aina ≥ 0 . Se on nolla silloin kun $u_2 = 0$ ja $u_1 - \frac{1}{2}u_2 = 0$, jolloin välttämättä (u_1, u_2) on nollavektori. Näin ollen $D_{\mathbf{u}}^2 f(\mathbf{a}_2) > 0$ kaikille $\mathbf{u} \neq (0, 0)$. Voimme siis päätellä, että piste $\mathbf{a}_2$ on lokaali minimikohta.



Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Neliömuodoista



Matriisiesitys 1

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Kuten lineaarialgebrassa neliömuoto

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

voidaan esittää matriisikertolaskun avulla

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$



Matriisiesitys 2

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista
Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

- Koska $x_i x_j = x_j x_i$, niin matriisit A , A^T ja $(A + A^T)/2$ kaikki antavat saman neliömuodon.
- Voidaan siis olettaa, että matriisi A on symmetrinen, eli $A = A^T$ eli $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla i, j .
- Lineaarialgebran tulosten perusteella tämä on etu, sillä symmetristen reaalisten matriisien ominaisarvoteoria saadaan tällöin käyttöön.



Matriisiesitys 2

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista
Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

- Koska $x_i x_j = x_j x_i$, niin matriisit A , A^T ja $(A + A^T)/2$ kaikki antavat saman neliömuodon.
- Voidaan siis olettaa, että matriisi A on symmetrinen, eli $A = A^T$ eli $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla i, j .
- Lineaarialgebran tulosten perusteella tämä on etu, sillä symmetristen reaalisten matriisien ominaisarvoteoria saadaan tällöin käyttöön.
- Algebran puhetapoja: Muoto = usean muuttujan polynomi, jossa kaikkien termien kokonaisaste on sama. Neliömuoto = muoto, jonka aste on kaksi.



Esimerkki 4C.1

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävä: Esitä neliömuoto

$$Q(x, y) = 4x^2 + 4xy + 4y^2$$

symmetrisen 2×2 -matriisin avulla.

Ratkaisu:

$$Q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

mikä voidaan tarkistaa suoraan laskemalla.



Esimerkki 4D.1

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Samoin kolmen muuttujan neliömuoto

$$Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$$

saadaan matriisikertolaskusta

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Huomaa siis, että “sekatermit” (tässä $4xy$, $2xz$ ja $4yz$) jaetaan kahtia symmetrisyyteen pääsemiseksi. Tämä on EHDOTTOMAN VÄLTTÄMÄTÖNTÄ.



Symmetrisistä matriiseista 1

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Oletetaan, että A on symmetrinen reaallinen $n \times n$ -matriisi.

- Symmetrisen matriisin kaikki ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ovat reaalisia.
- Niiden joukossa voi olla monikertaisia ominaisarvoja, mutta lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita löytyy aina riittävä määrä.
- Symmetrinen matriisi on siis aina diagonalisoituva, eli on olemassa sellainen matriisi P , että $P^{-1}AP$ on diagonaalinen.
- Lisäksi eri ominaisarvoihin kuuluvat ominaisvektorit ovat aina ortogonaalisia, joten A :n ominaisvektoreista voidaan muodostaa ortonormaali kanta.
- Tämä tarkoittaa sitä, että diagonalisoiva matriisi P voidaan valita ortogonaaliseksi, eli sellaiseksi, jolle $P^{-1} = P^T$.



Esimerkki 4C.2

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Määrää matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot. Etsi vastaavat ominaisvektorit, ja muodosta niistä $\mathbb{R}^2$:n ortonormaali kanta.

Ratkaisu: Ominaisarvopolynomi on

$$\det(xI - A) = \begin{vmatrix} x - 4 & -2 \\ -2 & x - 4 \end{vmatrix} = (x - 4)^2 - 4 = (x - 6)(x - 2).$$

Ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = 6$ ja $\lambda_2 = 2$.



Esimerkki 4C.3

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Ominaisarvoon $\lambda_1 = 6$ kuuluvat ominaisvektorit ovat yhtälöparin

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ratkaisut. Lineaarialgebran menetelmin nähdään, että tässä tapauksessa ominaisvektorit ovat muotoa $t(1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ parametri. Yksikkövektori tästä saadaan, kun valitaan $t = 1/\sqrt{2}$. Samoin nähdään, että ominaisarvoon $\lambda_2 = 2$ kuuluvat ominaisvektorit ovat muotoa $t(1, -1)$.



Esimerkki 4D.2

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Osoita, että symmetrisen matriisin

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoista yksi on negatiivinen ja kaksi positiivisia.

Ratkaisu: Tällä kertaa ominaisarvopolynomiksi saadaan

$$m(x) = \det(xI - B) = x^3 - 6x^2 + 2x + 1.$$

Tässä $m(-1) = -8 < 0$, $m(0) = 1 > 0$, $m(1) = -2 < 0$ ja $m(6) = 13 > 0$,



Esimerkki 4D.3

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

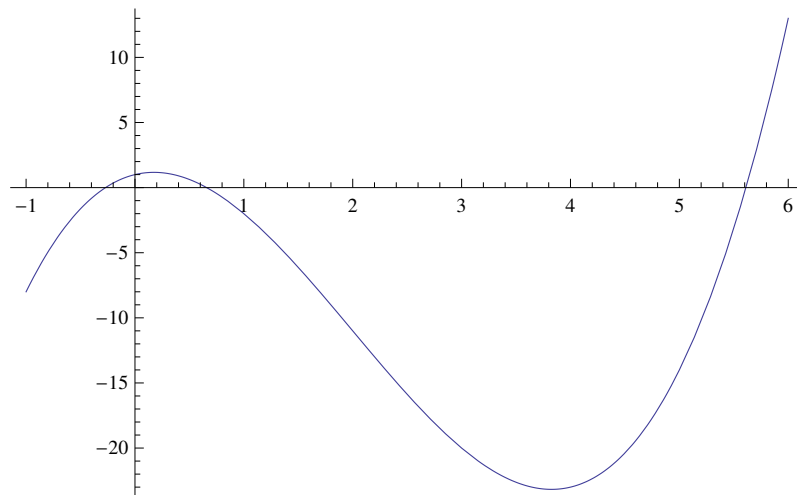
Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

joten Bolzanon lauseen nojalla ominaisarvot $\lambda_1 \in (-1, 0)$, $\lambda_2 \in (0, 1)$ ja $\lambda_3 \in (1, 6)$. Polynomin $m(x)$ kuvaaja alla.





Symmetrisistä matriiseista 2

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Neliömuodon matriisin diagonalisointi selvittää välittömästi, onko kyseinen muoto positiividefiniitti, negatiividefiniitti, semidefiniitti, indefiniitti.

- Tehdään muuttujanvaihto

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)P^T$, missä P on diagonalisoiva matriisi.

- Tällöin

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}A\mathbf{x}^T = \mathbf{x}'P^T A(\mathbf{x}'P^T)^T \\ &= \mathbf{x}'P^T AP\mathbf{x}'^T \\ &= \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2, \end{aligned}$$

koska $P^T AP$ on diagonaalimatriisi, jonka diagonaali-alkiot ovat $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.



Symmetrisistä matriiseista 3

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tulos

- Jos neliömuotoa vastaavan matriisin kaikki ominaisarvot ovat positiivisia, niin muoto on positiividefiniitti.
- Jos neliömuotoa vastaavan matriisin kaikki ominaisarvot ovat negatiivisia, niin muoto on negatiividefiniitti.
- Jos neliömuotoa vastaavan matriisin ominaisarvojen merkit vaihtelevat, niin muoto on indefiniitti.



Sylvesterin kriteeri

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Ominaisarvojen määrittäminen (etenkin jos $n > 2$) on työlästä, joten tarvitaan yksinkertaisempi metodi.

http://en.wikipedia.org/wiki/Sylvester%27s_criterion

Tulokset:

- Matriisiin A liittyvä neliömuoto on positiividefiniitti sjsk kaikki vasempaan ylänurkkaan rajautuvat k -riviset alideterminantit $\Delta_k, k = 1, 2, \dots, n$ ovat positiivisia.
- Matriisiin A liittyvä neliömuoto on negatiividefiniitti sjsk matriisin $-A$ liittyvä neliömuoto on positiividefiniitti.



Muistisääntö

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

- Neliömuoto $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ on positiividefiniitti. Sitä vastaava matriisi on $A = I$. Identiteettimatriisin vasemman yläkulman $k \times k$ -alideterminantit ovat kaikki $= +1$.
- Neliömuoto $-x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$ on negatiividefiniitti. Sitä vastaava matriisi on $A = -I$. Matriisin $-I$ vasemman yläkulman $k \times k$ -alideterminantti $= (-1)^k$.



Esimerkki 4C.4

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Aiemman perusteella neliömuoto

$$Q(x, y) = 4x^2 + 4xy + 4y^2$$

on positiividefiniitti. Muuttujien

$$\begin{aligned}(x', y') &= (x \ y)P = \frac{1}{\sqrt{2}}(x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right)\end{aligned}$$

avulla kirjoitettuna se saa muodon $Q'(x', y') = 6x'^2 + 2y'^2$.

Sylvesterin kriteeri antaa saman tuloksen, sillä $\Delta_1 = 4 > 0$ ja $\Delta_2 = 12 > 0$.



Esimerkki 4D.4

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Matriisiesitys 1

Matriisiesitys 2

Esimerkki 4C.1

Esimerkki 4D.1

Linistä 1

Esimerkki 4C.2

Esimerkki 4C.3

Esimerkki 4D.2

Esimerkki 4D.3

Linistä 2

Linistä 3

Sylvester

Muistisääntö

Esimerkki 4C.4

Esimerkki 4D.4

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Neliömuoto

$$Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$$

on indefiniitti, koska sen matriisilla on yksi negatiivinen ja kaksi positiivista ominaisarvoa. Sylvesterin kriteeri antaa saman tuloksen. $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = 1 \cdot 3 - 2^2 = -1 < 0$ (lukua Δ_3 ei edes tarvitse laskea).



Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Hessen muoto
Ääriarvokriteeri

Esimerkki 4E.1

Esimerkki 4E.2

Esimerkki 4E.3

Esimerkki 4E.4

Esimerkki 4E.5

Esimerkki 4E.6

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Hessen muodon käyttö



Hessen muoto

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Hessen muoto

Ääriarvokriteeri

Esimerkki 4E.1

Esimerkki 4E.2

Esimerkki 4E.3

Esimerkki 4E.4

Esimerkki 4E.5

Esimerkki 4E.6

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on toisen kertaluvun derivaattoineen jatkuva, ja $\mathbf{p} \in A^\circ$ on funktion f kriittinen piste. Neliömuotoa

$$H(f, \mathbf{p}) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}) x_i x_j$$

sanotaan funktion f *Hessen muodoksi* pisteessä $\mathbf{p}$.



Ääriarvokriteeri

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Hessen muoto
Ääriarvokriteeri

Esimerkki 4E.1

Esimerkki 4E.2

Esimerkki 4E.3

Esimerkki 4E.4

Esimerkki 4E.5

Esimerkki 4E.6

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Edellisen kalvon tilanteessa:

- Jos Hessen muoto $H(f, \mathbf{p})$ on positiividefiniitti, niin $\mathbf{p}$ on lokaali minimi.
- Jos Hessen muoto $H(f, \mathbf{p})$ on negatiividefiniitti, niin $\mathbf{p}$ on lokaali maksimi.
- Jos Hessen muoto on indefiniitti (molemmat etumerkit esiintyvät), niin $\mathbf{p}$ on satulapiste.
- Todistus vaatii sarjateorian/Taylorin polynomin alkeita, ja kompaktisuustarkastelun. Sivuutetaan.
- Heuristinen perustelu saadaan siitä, että Hessen muodon arvot ovat suunnattuja toisia derivaattoja. Jos ne ovat kaikki positiivisia, meillä on syytä epäillä löytäneemme lokaalin minimin. Jos ne ovat kaikki negatiivisia, lienemme lokaalissa maksimissa. Jos kumpikin etumerkki esiintyy, olemme satulapisteessä



Esimerkki 4E.1

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Hessen muoto
Ääriarvokriteeri

Esimerkki 4E.1

Esimerkki 4E.2

Esimerkki 4E.3

Esimerkki 4E.4

Esimerkki 4E.5

Esimerkki 4E.6

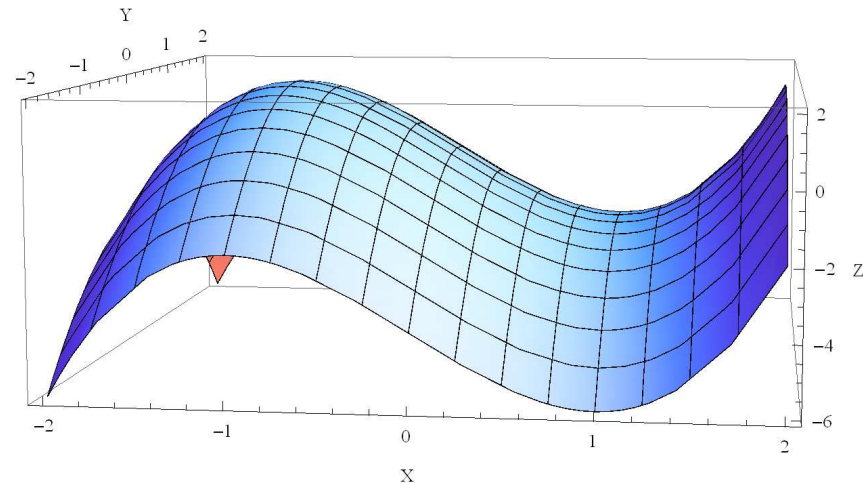
Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Määrätään funktion

$$f(x, y) = x^3 - 3x - y^2$$

kriittiset pisteet ja selvitetään niiden luonne Hessen muotoa
tutkimalla. Funktion kuvaaja alla





Esimerkki 4E.2

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Hessen muoto

Ääriarvokriteeri

Esimerkki 4E.1

Esimerkki 4E.2

Esimerkki 4E.3

Esimerkki 4E.4

Esimerkki 4E.5

Esimerkki 4E.6

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Ratkaisu: Gradientti

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3, -2y)$$

häviää kriittisissä pisteissä $\mathbf{p}_1 = (1, 0)$ ja $\mathbf{p}_2 = (-1, 0)$.

Katsotaan miltä funktio $f(x, y)$ näyttää pisteen $\mathbf{p}_1$ lähistöllä.

Olkoon $x = 1 + h$ ja $y = k$, jolloin $h \approx 0, k \approx 0$. Nyt

$$f(1 + h, k) = -2 + (3h^2 - k^2) + h^3.$$

Tässä ensimmäisen asteen termejä ei näy (lineaarinen derivaatta häviää kriittisessä pisteessä). Toisen asteen termit $3h^2 - k^2$ vastaavat Hessen neliömuotoa (ääriarvotarkastelussa merkittäviä nyt kun lineaarisia termejä ei ole).

Korkeampiasteiset ovat pientä pihinää.



Esimerkki 4E.3

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Hessen muoto
Ääriarvokriteeri

Esimerkki 4E.1

Esimerkki 4E.2

Esimerkki 4E.3

Esimerkki 4E.4

Esimerkki 4E.5

Esimerkki 4E.6

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Osittaisderivaatat ovat $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = -2$, joten Hessen matriisi pisteessä $\mathbf{p}_1$ on

$$H(f, \mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

mistä ottamalla huomioon tekijä 2 saadaan juuri laskemallakin saatu $3h^2 - k^2$. Seuraavalla kalvolla on funktion kuvaaja sekä sitä pisteessä $\mathbf{p}_1$ peesaavan toisen asteen polynomin

$$g(x, y) = -2 + 3(x - 1)^2 - y^2$$

kuvaajat.



Esimerkki 4E.4

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Hessen muoto
Ääriarvokriteeri

Esimerkki 4E.1

Esimerkki 4E.2

Esimerkki 4E.3

Esimerkki 4E.4

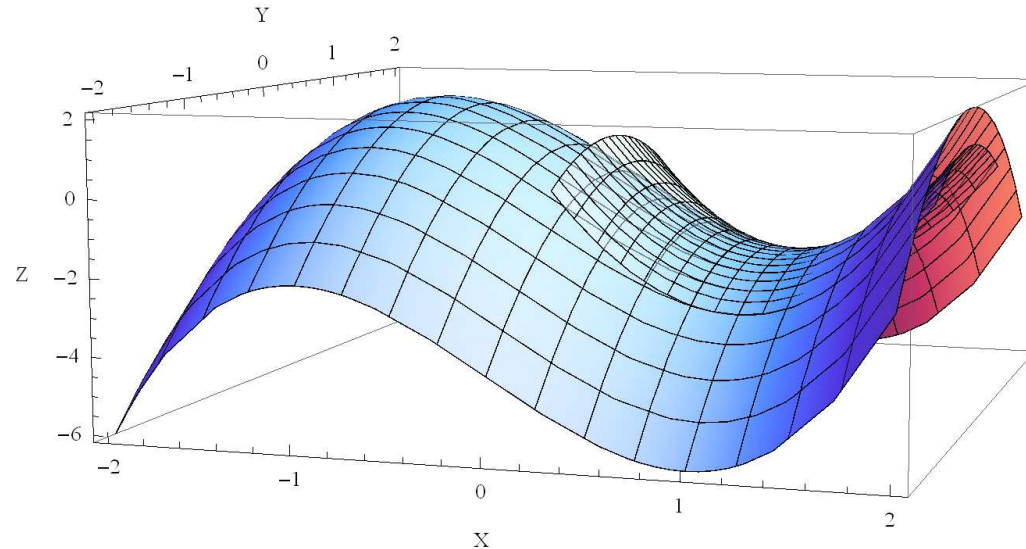
Esimerkki 4E.5

Esimerkki 4E.6

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Muoto $3h^2 - k^2$ on indefiniitti, joten kyseessä on satulapiste





Esimerkki 4E.5

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Hessen muoto
Ääriarvokriteeri

Esimerkki 4E.1

Esimerkki 4E.2

Esimerkki 4E.3

Esimerkki 4E.4

Esimerkki 4E.5

Esimerkki 4E.6

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Toisessa kriittisessä pisteessä $\mathbf{p}_2 = (-1, 0)$ sitä vastoin saamme

$$f(-1 + h, k) = 2 - (3h^2 + k^2) + h^3$$

vastaten Hessen matriisia

$$H(f, \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$



Esimerkki 4E.6

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Hessen muoto
Ääriarvokriteeri

Esimerkki 4E.1

Esimerkki 4E.2

Esimerkki 4E.3

Esimerkki 4E.4

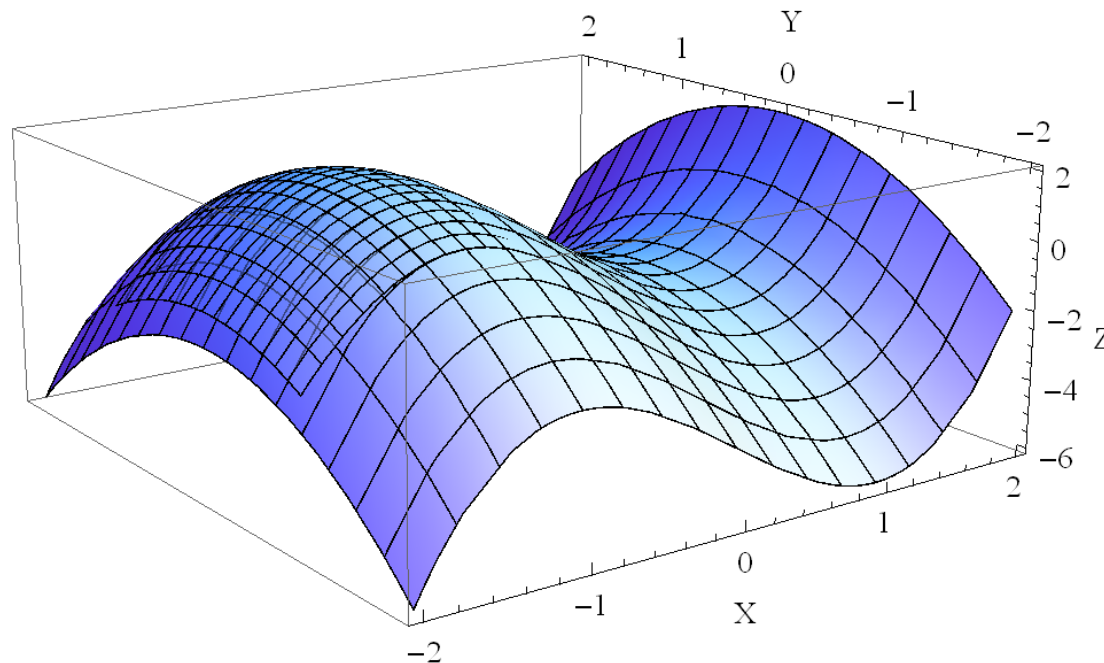
Esimerkki 4E.5

Esimerkki 4E.6

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Muoto $-3h^2 - k^2$ on negatiividefiniitti, joten $\mathbf{p}_2$ on lokaali maksimi. Ohessa funktion ja toisen asteen polynomin $g(x, y) = 2 - 3(x + 1)^2 - y^2$ kuvaajat.





Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Esimerkki 4F.1

Esimerkki 4F.2

Esimerkki 4F.3

Esimerkki 4G.1

Esimerkki 4G.2

Esimerkki 4G.3

Esimerkki 4G.4

Sidotuista
ääriarvoista

Esimerkkejä



Esimerkki 4F.1

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Esimerkki 4F.1

Esimerkki 4F.2

Esimerkki 4F.3

Esimerkki 4G.1

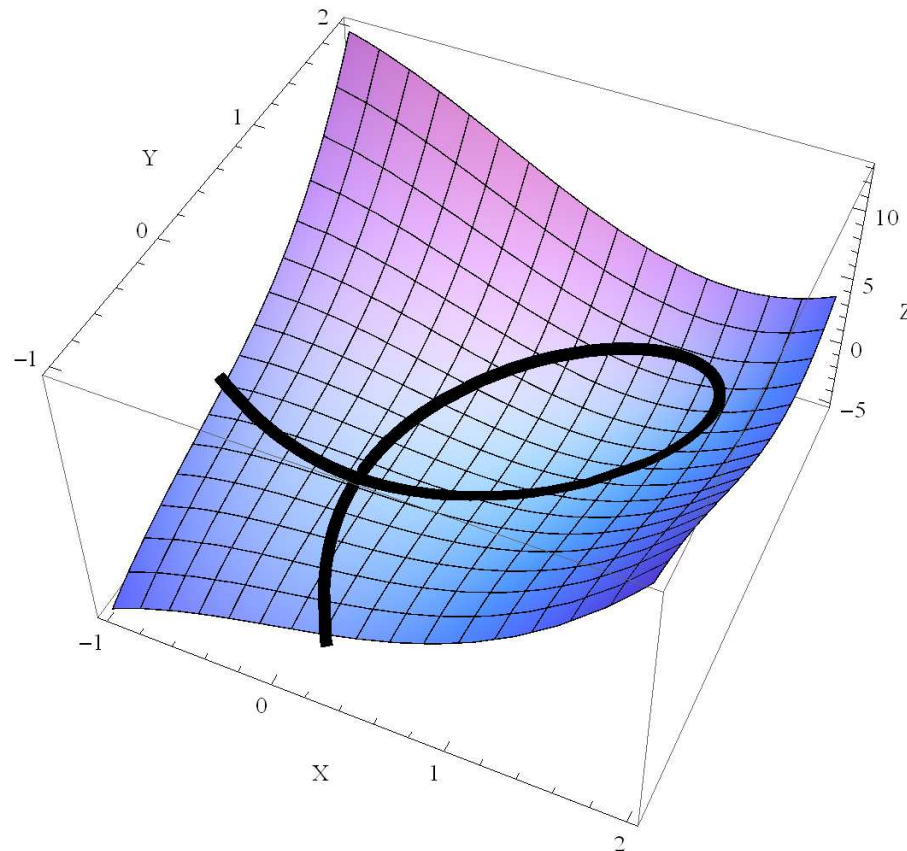
Esimerkki 4G.2

Esimerkki 4G.3

Esimerkki 4G.4

Sidotuista
ääriarvoista

Ohessa funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ kuvaaja ja vahvistettuna käyrä, jossa se arvon nolla (vrt. Esimerkki 6B).





Esimerkki 4F.2

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Esimerkki 4F.1

Esimerkki 4F.2

Esimerkki 4F.3

Esimerkki 4G.1

Esimerkki 4G.2

Esimerkki 4G.3

Esimerkki 4G.4

Sidotuista
ääriarvoista

Esimerkissä 6B selvitimme funktion f kriittiset pisteet. Ne ovat $\mathbf{p}_1 = (0, 0)$ ja $\mathbf{p}_2 = (1, 1)$. Toisen kertaluvun derivaattojen avulla saadaan Hessen matriisiksi

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Pisteessä $\mathbf{p}_1 = (0, 0)$ saadaan $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = -9$. Hessen muoto ei tässä pisteessä siis ole definiitti. Ominaisarvot $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$ kertovat, että kyseessä on satulapiste.



Esimerkki 4F.3

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista
Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Esimerkki 4F.1

Esimerkki 4F.2

Esimerkki 4F.3

Esimerkki 4G.1

Esimerkki 4G.2

Esimerkki 4G.3

Esimerkki 4G.4

Sidotuista
ääriarvoista

Pisteessä $\mathbf{p}_2 = (1, 1)$ sitä vastoin

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Näin ollen tässä pisteessä $\Delta_1 = 6$ ja $\Delta_2 = 6^2 - (-3)^2 = 27$, joten Hessen muoto on positiividefiniitti, ja kyseessä on lokaali minimikohta.

Kuvaajan perusteella nollakohtakäyrän itseleikkauspisteen lähistöllä funktio saa kummankin merkkisiä arvoja. Sitä vastoin piste $\mathbf{p}_2$ on silmukan rajaaman kuopan pohjalla. Nämä tukevat laskumme tuloksia.



Esimerkki 4G.1

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Esimerkki 4F.1

Esimerkki 4F.2

Esimerkki 4F.3

Esimerkki 4G.1

Esimerkki 4G.2

Esimerkki 4G.3

Esimerkki 4G.4

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävä: Etsi funktion

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z)e^{-(x^2+2y^2+2z^2)/7}$$

kriittiset pisteet, ja selvitä niiden luonne.

Ratkaisu: Funktion gradientti on

$$\begin{aligned}\nabla f = e^{-(x^2+2y^2+2z^2)/7} & \left(1 - \frac{2}{7}x(x - y + 2z), \right. \\ & \left. -1 - \frac{4}{7}y(x - y + 2z), 2 - \frac{4}{7}z(x - y + 2z)\right).\end{aligned}$$

Jos tässä esiintyvä tekijä $u = x - y + 2z$ häviää, niin gradientti $\neq \vec{0}$.



Esimerkki 4G.2

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Esimerkki 4F.1

Esimerkki 4F.2

Esimerkki 4F.3

Esimerkki 4G.1

Esimerkki 4G.2

Esimerkki 4G.3

Esimerkki 4G.4

Sidotuista
ääriarvoista

Koska eksponenttifunktio $\neq 0$, niin saadaan siis $x = 7/(2u)$, $y = -7/(4u)$ ja $z = 7/(2u)$, eli $x = z$ ja $y = -z/2$. Tällöin $u = x - y + 2z = 7z/2$. Näin saadaan

$$z = \frac{7}{2u} = \frac{7}{2(7z/2)} = \frac{1}{z},$$

josta ratkeaa $z = 1$. Kriittiset pisteet ovat siis $\mathbf{p}_1 = (1, -1/2, 1)$ ja $\mathbf{p}_2 = (-1, 1/2, -1)$.



Esimerkki 4G.3

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Esimerkki 4F.1

Esimerkki 4F.2

Esimerkki 4F.3

Esimerkki 4G.1

Esimerkki 4G.2

Esimerkki 4G.3

Esimerkki 4G.4

Sidotuista
ääriarvoista

Hessen matriisiksi pisteessä (x, y, z) saadaan

$$H = \frac{e^{-(x^2+2y^2+2z^2)/7}}{49} \begin{pmatrix} 4x^3 - 4yx^2 + 8zx^2 - 42x + 14y - 28z & 8yx^2 - 8y^2x + 16yzx + 14x - 28y & 8zx^2 + 16z^2x - 8yzx - 28x - 28z \\ 8yx^2 - 8y^2x + 16yzx + 14x - 28y & -16y^3 + 16xy^2 + 32zy^2 + 84y - 28x - 56z & -16zy^2 + 32z^2y + 16xzy - 56y + 28z \\ 8zx^2 + 16z^2x - 8yzx - 28x - 28z & -16zy^2 + 32z^2y + 16xzy - 56y + 28z & 32z^3 + 16xz^2 - 16yz^2 - 168z - 28x + 28y \end{pmatrix}.$$



Esimerkki 4G.4

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Esimerkki 4F.1

Esimerkki 4F.2

Esimerkki 4F.3

Esimerkki 4G.1

Esimerkki 4G.2

Esimerkki 4G.3

Esimerkki 4G.4

Sidotuista
ääriarvoista

Kriittisissä pisteissä saadaan

$$H(\mathbf{p}_1) = \frac{e^{-7/2}}{7} \begin{pmatrix} -9 & 2 & -4 \\ 2 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & -22 \end{pmatrix} = -H(\mathbf{p}_2)$$

Unohdetaan positiivinen vakiotekijä edestä, jolloin pisteessä $\mathbf{p}_2$ saadaan $\Delta_1 = 9 > 0$, $\Delta_2 = 9 \cdot 16 - 2^2 = 140 > 0$ ja $\Delta_3 = \det(H(\mathbf{p}_2)) = 2744 > 0$. Näin ollen Sylvesterin kriteetin nojalla $H(\mathbf{p}_2)$ on positiividefiniitti, ja $\mathbf{p}_2$ siis lokaali minimikohta. Selvästi nyt $H(\mathbf{p}_1) = -H(\mathbf{p}_2)$ on negatiividefiniitti, ja $\mathbf{p}_1$ siis lokaali maksimikohta.



Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

Sidotuista ääriarvoista



Tehtävätyyppi

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

- Piste (x, y) sidottu saamaan arvoja $\mathbb{R}^2$ osajoukosta N , joka muodostuu $C^{r \geq 1}$ -luokan funktion $G(x, y)$ nollakohdista.
- Kysymys: Etsi suurin/pienin $C^{r \geq 1}$ -luokan funktion $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ (=tavoitefunktio) joukossa N saamista arvoista.
- Piste $\mathbf{p} \in N$ on sidottu (lokaali) ääriarvokohta, jos suurin/pienin arvo saavutetaan siinä (lokaali= rajoitutaan joukkoon $N \cap U$, missä U on $\mathbf{p}$:n ympäristö).



Filosofiaa 1

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

- Jos $\mathbf{p} \in N$, niin joukossa voidaan liikkua $\mathbf{p}$:n lähellä pitkin $G(x, y)$:n tasa-arvokäyrää. Muistamme, että kun gradientti $\nabla G(\mathbf{p}) \neq (0, 0)$, niin gradientti on kohtisuorassa tasa-arvokäyrää vastaan. Tarkempi todistus tälle edellyttää implisiittifunktiolauseetta, ja sivuutetaan.
- Lokaalissa sidotussa ääriarvokohdassa on suunnatun derivaatan $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{p})$ hävittävä niissä suunnissa $\mathbf{u}$ joihin joukossa N voidaan liikkua.
- On siis oltava $\nabla f(\mathbf{p}) \perp \mathbf{u}$ kaikilla vektoreilla $\mathbf{u} \perp \nabla G(\mathbf{p})$.
- Kunhan $\nabla G(\mathbf{p}) \neq (0, 0)$ tämä tarkoittaa sitä, että lokaalissa sidotussa ääriarvokohdassa $\mathbf{p}$ on gradienttien $\nabla f(\mathbf{p})$ ja $\nabla G(\mathbf{p})$ oltava yhdensuuntaisia.



Filosofiaa 2

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

- Gradienttien yhdensuuntaisuus ei takaa, että kyseessä on (lokaali) sidottu ääriarvo. Tilanne analoginen derivaatan nollakohdan kanssa.
- Tehtävä voidaan kuitenkin ratkaista tällä tekniikalla, jos näemme että joukko N on kompakti.
- Jatkuvana funktiona f saavuttaa kompaktissa joukossa suurimman ja pienimmän arvonsa.
- Edellisen kalvon tarkastelun perusteella suurin/pienin arvo voidaan saavuttaa vain joko sellaisessa pisteessä $\mathbf{p}$, jolle $\nabla G(\mathbf{p}) \parallel \nabla f(\mathbf{p})$ tai jolle $\nabla G(\mathbf{p}) = (0, 0)$ (tai pisteessä, jossa f ei ole differentioituva).
- Joten suunnitelmaksi tulee: 1) Määrää edellisessä kohdassa kuvaillut ns. kandidaattipisteet. Näitä löytyy tyypillisesti vain äärellisen monta. 2) Laske tavoitefunktion f arvot näissä pisteissä ja etsi niiden joukosta suurin ja pienin.



Esimerkki 4H.1

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

Tehtävä: Missä käyrän

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 5xy + 5y^2 = 30\}$$

pisteessä funktio $f(x, y) = x + y$ saavuttaa suurimman arvonsa?

Ratkaisu: Koska voimme kirjoittaa käyrän E yhtälön muodossa

$$5\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 = 30,$$

näemme, että luvut $|y + \frac{x}{2}|$ ja $|x|$ ovat käyrällä rajoitettuja. Tämän seurauksena sama koskee koordinaatteja $|y|$ ja $|x|$, ja näin ollen E on rajoitettu joukko. Koska E on suljettu, se on kompakti. Näin ollen suurin arvo saavutetaan jossakin käyrän E pisteessä.



Esimerkki 4H.2

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

Tavotefunktion f gradientti on $\nabla f(x, y) = (1, 1)$.
Side-ehtofunktion $G(x, y) = 2x^2 + 5xy + 5y^2 - 30$ gradientti
on $\nabla G(x, y) = (4x + 5y, 5x + 10y)$. Gradienttien
yhdensuuntaisuus tarkoittaa, että vektori yhtälö

$$(1, 1) = \lambda(4x + 5y, 5x + 10y)$$

toteutuu jollakin kertoimella $\lambda \in \mathbb{R}$ (ns. Lagrangen kerroin).
Ratkaisemalla kummastakin komponentista luku $1/\lambda$ saadaan

$$4x + 5y = \frac{1}{\lambda} = 5x + 10y.$$

Näin ollen yhtälö $4x + 5y = 5x + 10y$ on voimassa. Tästä
saadaan ratkaisemalla $x = -5y$.



Esimerkki 4H.3

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

Sijoittamalla tämä side-ehtoon saadaan

$$0 = G(-5y, y) = 50y^2 - 25y^2 + 5y^2 - 30 = 30y^2 - 30,$$

josta ratkeaa $y = \pm 1$. Kandidaatteja sidotuiksi ääriarvokohdiksi ovat siis pisteet $P_1 = (5, -1)$ ja $P_2 = (-5, 1)$. Laskemalla saadaan $f(P_1) = 4$ ja $f(P_2) = -4$, joten vastaukseksi saadaan, että funktio f saa suurimman arvonsa käyrällä E pisteessä $(5, -1)$. Seuraavalla kalvolla on kuva käyrästä E sekä gradienttien ∇G (punainen) ja ∇f vektorikentistä käyrällä E (edellinen lyhyemmäksi skaalattuna). Näemme, että pisteistä P_1 ja P_2 lähtevät punainen ja musta vektori ovat yhdensuuntaisia.



Esimerkki 4H.4

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

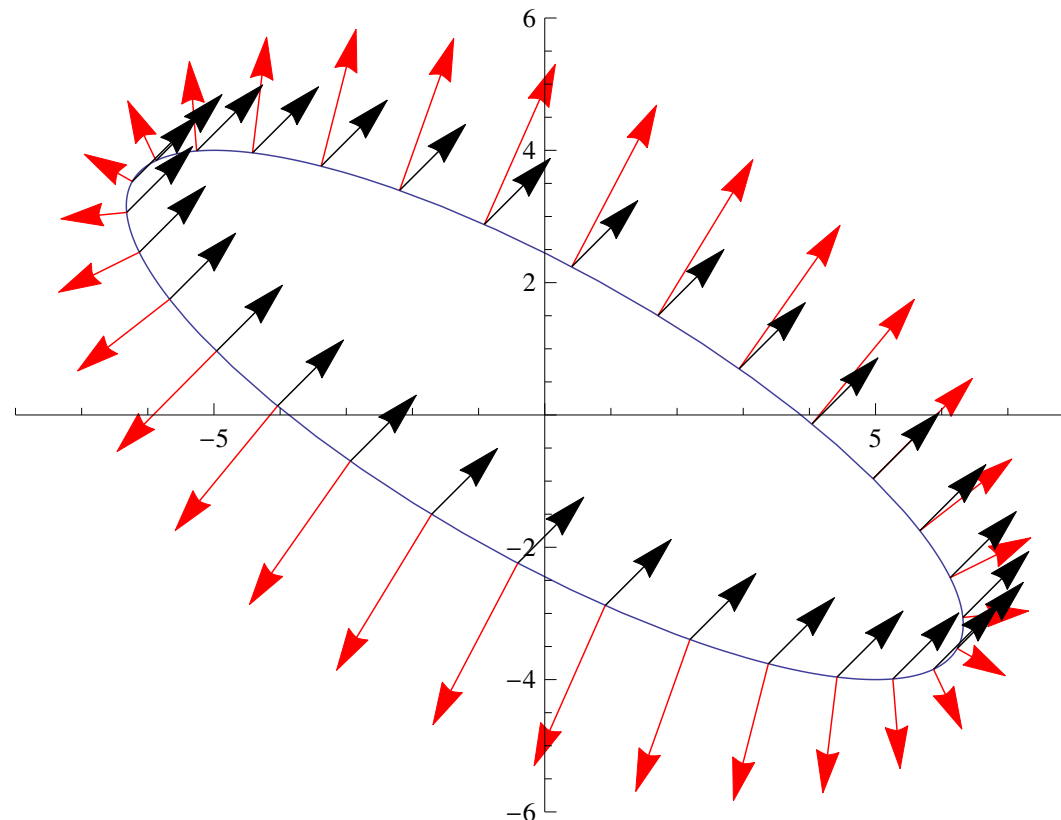
Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6





Muunnelmia

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

- Yhden side-ehdon tapauksessa tekniikka on sama useammassa dimensiossa jolloin $N \subset \mathbb{R}^n, n > 2$: lokaalissa sidotussa ääriarvokohdassa joko $\nabla G = \bar{0}$ tai ∇G ja ∇f ovat yhdensuuntaisia.
- Usean side-ehdon tapauksessa Lagrangen kertoimia tulee useita (ks. moniste).
- Jos tehtävänä on etsiä $C^{\geq 1}$ -luokan funktion f suurin arvo kompaktissa joukossa, jonka reuna voidaan kuvata side-ehtojen avulla, niin tiedetään, että suurin ja pienin arvo saavutetaan jossakin. Näin ollen riittää etsiä kandidaattipisteet. Sisäosassa sellaisia ovat funktion f kriittiset pisteet, reunalla taas sidottuun ääriarvo-ongelmaan liittyvät kandidaattipisteet.



Esimerkki 4I.1

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

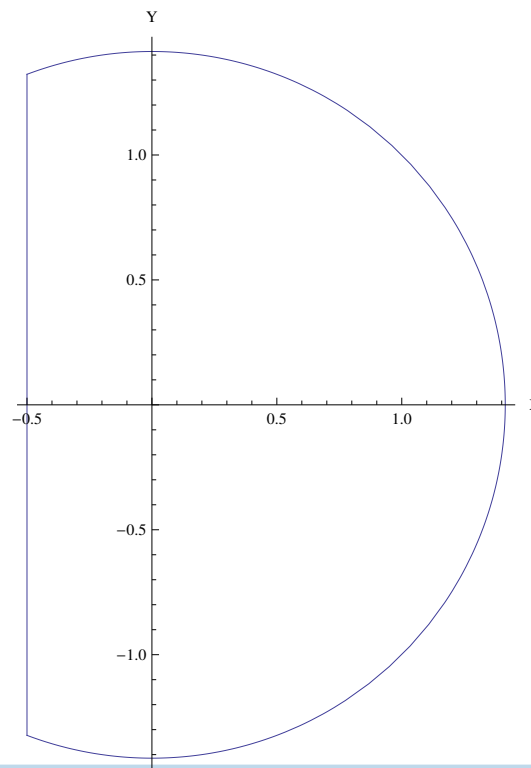
Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

Olkoon S epäyhtälön $x \geq -1/2$ origokeskisestä $\sqrt{2}$ -säteisestä ympyrälevystä rajaama alue

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -1/2, x^2 + y^2 \leq 2\}.$$





Esimerkki 4I.2

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi
Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

Tehtävä: Etsi funktion $f(x, y) = 3 - (x^2 + xy + y^2)$ joukossa S saamista arvoista suurin ja pienin.

Ratkaisu: Joukko S on selvästi kompakti, joten suurin ja pienin arvo saavutetaan jossakin. Haetaan kandidaattipisteitä.

Määrätään ensin funktion f mahdolliset kriittiset pisteet.

Osittaisderivaatat ovat $f_x = -2x - y$ ja $f_y = -x - 2y$.

Helposti nähdään, että origo on ainoa piste, jossa $f_x = f_y = 0$.

Koska origo kuuluu joukkoon S , se on eräs kandidaateista $P_1 = (0, 0)$. Toteamme, että $f(P_1) = 3$.



Esimerkki 4I.3

Vektorilaskenta
Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

Maksimi/minimi voidaan saavuttaa myös alueen S reunalla. Tällöin ratkaistavanamme on sidottu ääriarvotehtävä.

Osa reunasta on suoralla $C_1 : x = -1/2$. Reunaa ovat suoran ja ympyrä leikkauspisteiden $(-1/2, \pm\sqrt{7}/2)$ väliin jäävä osa.

Loput reunasta ovat ympyrällä $C_2 : x^2 + y^2 = 2$.



Esimerkki 4I.4

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

Suoralla C_1 saa funktio arvoja

$$h(y) = f(x, y) = f(-1/2, y) = 11/4 + y/2 - y^2,$$

mitä on turha käsitellä sidottuna ääriarvotehtävänä vaan pikemminkin suljetulla välillä jatkuvan yhden muuttujan funktion ääriarvotehtävänä.

Derivaatta $dh/dy = 1/2 - 2y = 0$ sjsk $y = 1/4$. Saamme kandidaattipisteen $P_2 = (-1/2, 1/4)$, jossa $f(P_2) = 45/16 < 3$. Koska $y \in [-\sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2]$, saamme myös kandidaattipisteet (välin päätepisteet) $P_3 = (-1/2, -\sqrt{7}/2)$ ja $P_4 = (-1/2, \sqrt{7}/2)$. Näille $f(P_3) = 1 - \sqrt{7}/4$ ja $f(P_4) = 1 + \sqrt{7}/4$. Toteamme, että $0 < f(P_3) < 1$ ja $1 < f(P_4) < 2$.



Esimerkki 4I.5

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

Käyrällä C_2 ratkaisemme sidotun ääriarvotehtävän, jossa side-ehtona on $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$. Nyt $\nabla\phi = (2x, 2y)$ ja $\nabla f = (-2x - y, -x - 2y)$. Nämä gradientit ovat yhdensuuntaisia sjsk

$$-(2x + y)2y = -2x(x + 2y) \Leftrightarrow x^2 = y^2.$$

Ottamalla huomioon side-ehto $x^2 + y^2 = 2$, saadaan $x^2 = y^2 = 1$. Tästä saadaan kandidaattipisteet $P_5 = (1, 1)$, $P_6 = (1, -1)$, $P_7 = (-1, 1)$ ja $P_8 = (-1, -1)$. Näistä P_7 ja P_8 eivät kuulu joukkoon S , joten riittää laskea $f(P_5) = 0$ ja $f(P_6) = 2$.

Vastaukseksi saamme, että suurin joukossa S saaduista arvoista on $f(0, 0) = 3$ ja pienin on $f(1, 1) = 0$



Esimerkki 4I.6

Vektorilaskenta

Lokaaleista
ääriarvoista

Neliömuodoista

Hessen muodon
käyttö

Esimerkkejä

Sidotuista
ääriarvoista

Tehtävätyyppi

Filosofiaa 1

Filosofiaa 2

Esimerkki 4H.1

Esimerkki 4H.2

Esimerkki 4H.3

Esimerkki 4H.4

Muunnelmia

Esimerkki 4I.1

Esimerkki 4I.2

Esimerkki 4I.3

Esimerkki 4I.4

Esimerkki 4I.5

Esimerkki 4I.6

