



Vektorilaskenta

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Lukuun 5 liittyvää lisämateriaalia.



Vektorilaskenta

Käyristä

Järkevä käyrä

Tangentti (1/2)

Tangentti (2/2)

Esimerkki 5A.1

Esimerkki 5A.2

Esimerkki 5A.3

Esimerkki 5A.4

Esimerkki 5A.5

Esimerkki 5A.6

Esimerkki 5A.7

Esimerkki 5A.8

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Käyristä



Järkevä käyrä

Vektorilaskenta

Käyristä

Järkevä käyrä

Tangentti (1/2)

Tangentti (2/2)

Esimerkki 5A.1

Esimerkki 5A.2

Esimerkki 5A.3

Esimerkki 5A.4

Esimerkki 5A.5

Esimerkki 5A.6

Esimerkki 5A.7

Esimerkki 5A.8

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Luennolla kohtaamistamme syistä keskitymme käyriin $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jotka ovat riittävän säännöllisiä, eli

- Väli $[a, b]$ voidaan jakaa äärelliseen moneen osaväliin siten, että funktiot γ_i ovat jatkuvasti derivoituvia osavälien sisäpisteissä,
- ja niiden päätepisteissä on toispuoleiset derivaatat,
- ja tangenttivektori $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$ häviää vain äärellisen monella t :n arvolla.

Tällöin käyrällä γ on tangentti äärellistä poikkeuspisteiden joukkoa lukuun ottamatta, ja se voidaan jakaa osiin, joista kullakin muut koordinaatit voidaan esittää yhden jatkuvasti differentioituvana funktiona.



Tangentti (1/2)

Vektorilaskenta

Käyristä

Järkevä käyrä

Tangentti (1/2)

Tangentti (2/2)

Esimerkki 5A.1

Esimerkki 5A.2

Esimerkki 5A.3

Esimerkki 5A.4

Esimerkki 5A.5

Esimerkki 5A.6

Esimerkki 5A.7

Esimerkki 5A.8

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

Oletetaan, että käyrällä on parametrisointi

$\gamma(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))$. Kun tässä $t \rightarrow t_0$, niin käyrän kahden pisteen erotusvektori jaettuna parametrien erotuksella

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\gamma(t_0 + \Delta t) - \gamma(t_0)) \\ &= \left(\frac{c_1(t_0 + \Delta t) - c_1(t_0)}{\Delta t}, \frac{c_2(t_0 + \Delta t) - c_2(t_0)}{\Delta t}, \dots \right) \end{aligned}$$

lähestyy raja-arvonaan vektoria

$$\gamma'(t_0) = (c'_1(t_0), c'_2(t_0), \dots, c'_n(t_0)),$$

jota kutsutaan käyrän tangentiksi pisteessä $\gamma(t_0)$.



Tangentti (2/2)

Vektorilaskenta

Käyristä

Järkevä käyrä

Tangentti (1/2)

Tangentti (2/2)

Esimerkki 5A.1

Esimerkki 5A.2

Esimerkki 5A.3

Esimerkki 5A.4

Esimerkki 5A.5

Esimerkki 5A.6

Esimerkki 5A.7

Esimerkki 5A.8

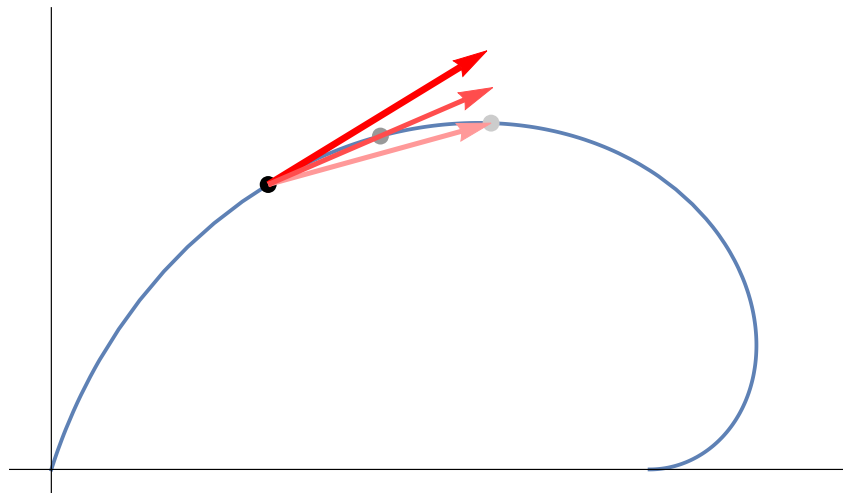
Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Oheisessa kuvassa erään käyrän erääseen pisteeseen piirretty tangentti (punainen) sekä erotusosamäärävektorit (pinkit), jotka saatiin valinnoilla $\Delta t = 1$ ja $\Delta t = 1/2$.





Esimerkki 5A.1

Vektorilaskenta

Käyristä

Järkevä käyrä

Tangentti (1/2)

Tangentti (2/2)

Esimerkki 5A.1

Esimerkki 5A.2

Esimerkki 5A.3

Esimerkki 5A.4

Esimerkki 5A.5

Esimerkki 5A.6

Esimerkki 5A.7

Esimerkki 5A.8

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Tutkitaan ns. *logaritmista spiraalia* (vrt. monisteen kuva 5.5.). Napakoordinaatti $\phi \in (-\infty, \infty)$ parametrizoi nämä, kun määrätään, että toinen napakoordinaatti on kulman eksponenttifunktio:

$$r = e^{k\phi},$$

missä k on jokin vakio. Tällöin saadaan tasokäyrä

$$\begin{cases} x = x(\phi) & = e^{k\phi} \cos \phi, \\ y = y(\phi) & = e^{k\phi} \sin \phi. \end{cases}$$

Koska kaikille kulman ϕ arvoille on voimassa

$$r(\phi + 2\pi) = e^{2k\pi} r(\phi),$$

tämä käyrä siirtyy joka kierroksella kertoimen $e^{2k\pi}$ osoittaman matkan kauemmaksi origosta.



Esimerkki 5A.2

Vektorilaskenta

Käyristä

Järkevä käyrä

Tangentti (1/2)

Tangentti (2/2)

Esimerkki 5A.1

Esimerkki 5A.2

Esimerkki 5A.3

Esimerkki 5A.4

Esimerkki 5A.5

Esimerkki 5A.6

Esimerkki 5A.7

Esimerkki 5A.8

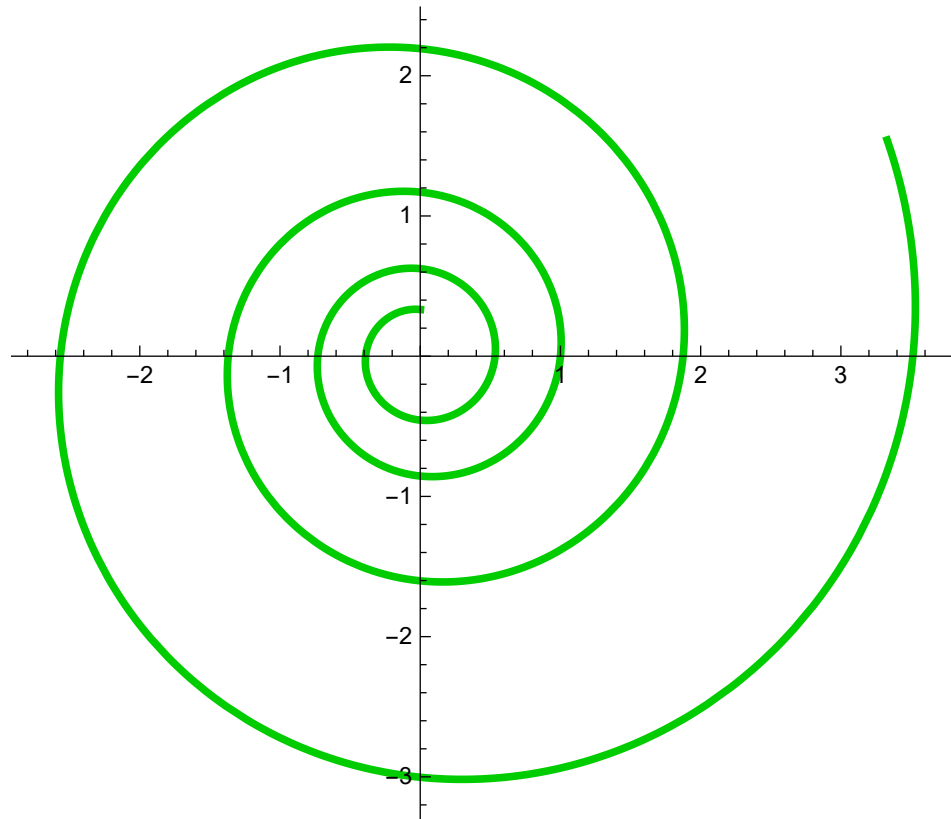
Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Ohessa kuva erästä logaritmisesta spiraalista ($k = 1/10$)





Esimerkki 5A.3

Vektorilaskenta

Käyristä

Järkevä käyrä

Tangentti (1/2)

Tangentti (2/2)

Esimerkki 5A.1

Esimerkki 5A.2

Esimerkki 5A.3

Esimerkki 5A.4

Esimerkki 5A.5

Esimerkki 5A.6

Esimerkki 5A.7

Esimerkki 5A.8

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Johdetaan lauseke logaritmisen spiraalin pisteeseen $(x(\phi), y(\phi))$ piirretylle tangentille.

Yleisemminkin napakoordinaattikäyrälle

$\gamma(\phi) = r(\phi)(\cos \phi, \sin \phi)$ saadaan derivoimalla ϕ :n suhteen

$$\gamma'(\phi) = r'(\phi)(\cos \phi, \sin \phi) + r(\phi)(-\sin \phi, \cos \phi).$$

Huomaamme, että tässä esiintyvä vektori

$$(-\sin \phi, \cos \phi) = (\cos(\phi + \pi/2), \sin(\phi + \pi/2))$$

saadaan kiertämällä vektoria $(\cos \phi, \sin \phi)$ 90 astetta vastapäivään. Nämä kaksi vektoria ovat siis toisiaan vastaan kohtisuorassa.



Esimerkki 5A.4

Vektorilaskenta

Käyristä

Järkevä käyrä

Tangentti (1/2)

Tangentti (2/2)

Esimerkki 5A.1

Esimerkki 5A.2

Esimerkki 5A.3

Esimerkki 5A.4

Esimerkki 5A.5

Esimerkki 5A.6

Esimerkki 5A.7

Esimerkki 5A.8

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pythagoraan lauseen nojalla vektorin $\gamma'(\phi)$ pituus on siis

$$\|\gamma'(\phi)\| = \sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2}.$$

Logaritmiselle spiraalille $r'(\phi) = ke^{k\phi}$, joten sille
 $\|\gamma'(\phi)\| = e^{k\phi} \sqrt{1 + k^2}.$

Usein halutaan normeerata tangenttivektori yksikkövektoriksi. Tällainen normeerattu tangenttivektori logaritmiselle spiraalille saadaan siis kaavasta

$$\vec{t}(\phi) = \frac{\gamma'(\phi)}{\|\gamma'(\phi)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} ((-\sin \phi, \cos \phi) + k(\cos \phi, \sin \phi)).$$



Esimerkki 5A.5

Vektorilaskenta

Käyristä

Järkevä käyrä

Tangentti (1/2)

Tangentti (2/2)

Esimerkki 5A.1

Esimerkki 5A.2

Esimerkki 5A.3

Esimerkki 5A.4

Esimerkki 5A.5

Esimerkki 5A.6

Esimerkki 5A.7

Esimerkki 5A.8

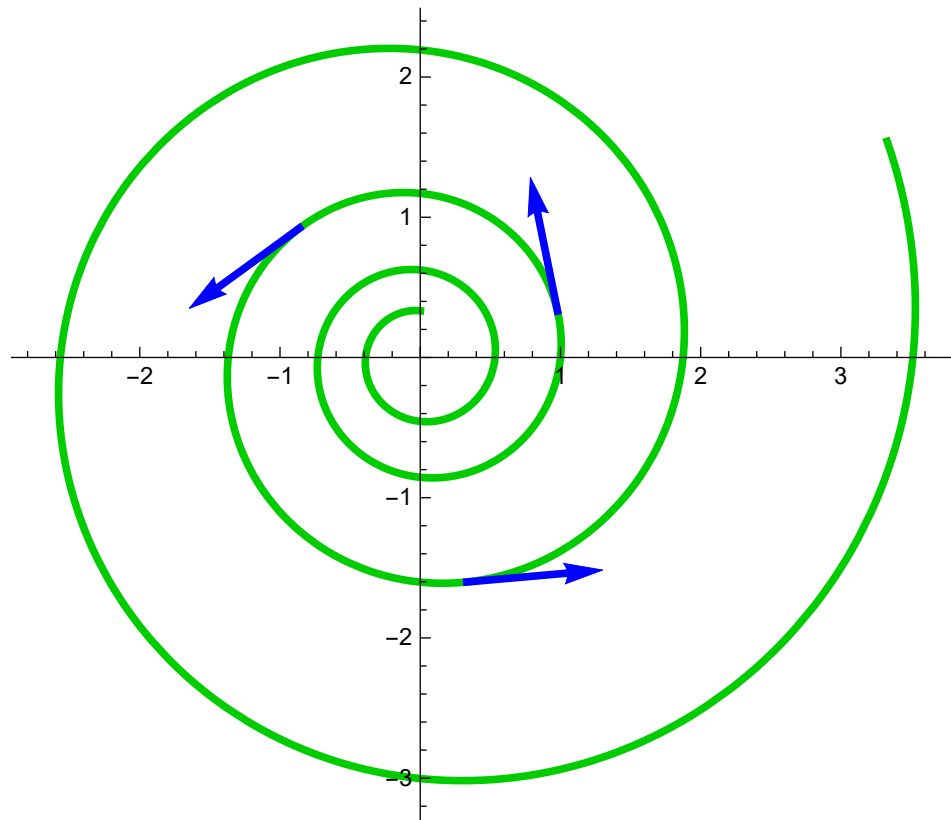
Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Oheisessa kuvassa eräitä logaritmisien spiraalin normeerattuja tangentteja.





Esimerkki 5A.6

Vektorilaskenta

Käyristä

Järkevä käyrä

Tangentti (1/2)

Tangentti (2/2)

Esimerkki 5A.1

Esimerkki 5A.2

Esimerkki 5A.3

Esimerkki 5A.4

Esimerkki 5A.5

Esimerkki 5A.6

Esimerkki 5A.7

Esimerkki 5A.8

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Logaritmisen spiraalin karakterisoi seuraava ominaisuus. Sen pisteeseen $P = (x(\phi), y(\phi))$ piirretyn tangenttivektorin $\vec{t}(\phi)$ ja pisteen P paikkavektorin $\vec{OP} = (x(\phi), y(\phi))$ välinen kulma riippuu vain vakion k arvosta, eikä lainkaan pisteen P (eli kulman ϕ) valinnasta.

Seuraavassa kuvassa siis sinisen tangenttivektorin, ja punaisen paikkavektorin suuntaisen vektorin välinen kulma on sama kaikissa spiraalin pisteissä.

Todistetaan tämä Esimerkin lopuksi.



Esimerkki 5A.7

Vektorilaskenta

Käyristä

Järkevä käyrä

Tangentti (1/2)

Tangentti (2/2)

Esimerkki 5A.1

Esimerkki 5A.2

Esimerkki 5A.3

Esimerkki 5A.4

Esimerkki 5A.5

Esimerkki 5A.6

Esimerkki 5A.7

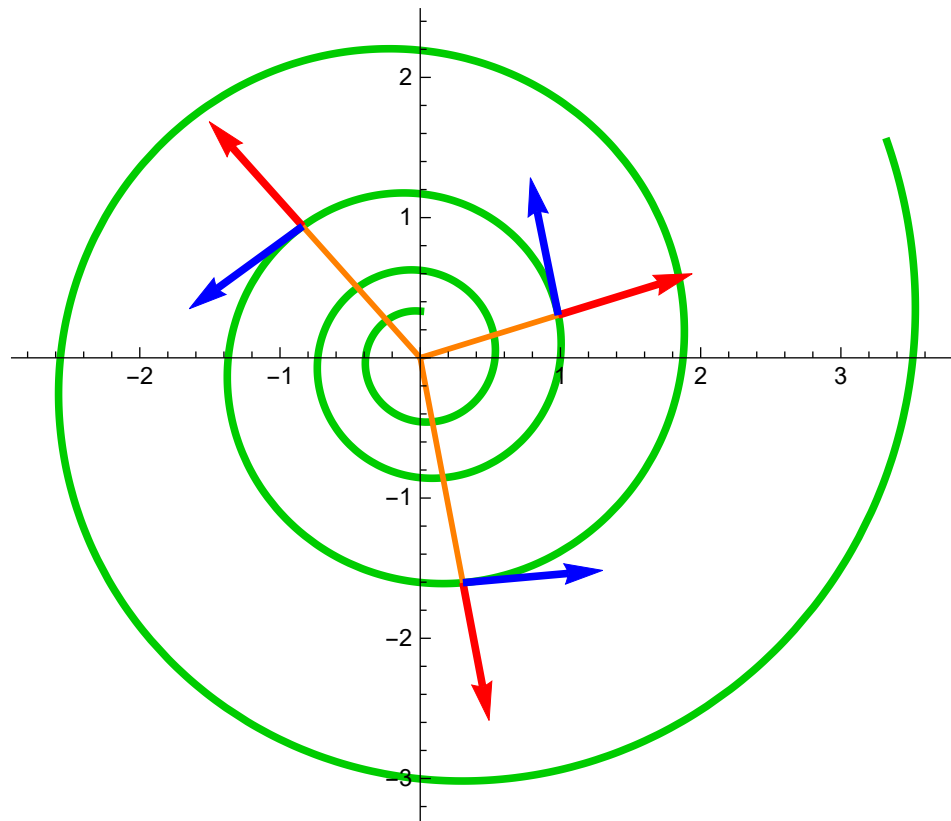
Esimerkki 5A.8

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla





Esimerkki 5A.8

Vektorilaskenta

Käyristä

Järkevä käyrä

Tangentti (1/2)

Tangentti (2/2)

Esimerkki 5A.1

Esimerkki 5A.2

Esimerkki 5A.3

Esimerkki 5A.4

Esimerkki 5A.5

Esimerkki 5A.6

Esimerkki 5A.7

Esimerkki 5A.8

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Tämä seuraa aiemmista laskuistamme helposti. Kiinnitetään piste $P = \gamma(\phi) = e^{k\phi}(\cos \phi, \sin \phi)$. Ortonormaalin kannan $\{(\cos \phi, \sin \phi), (-\sin \phi, \cos \phi)\}$ suhteen origosta ulospäin suuntautuva säde on vektori $(1, 0)$ ja normeerattu tangenttivektori puolestaan $\frac{1}{k^2 + 1}(k, 1)$. Näiden vektorien sisätulo $= k/\sqrt{k^2 + 1}$, mikä ei riipu parametrasta ϕ . Väite seuraa tästä.

Voidaan sanoa tarkemmin, että kyseinen vakiokulma $\alpha = \arccos(k/\sqrt{k^2 + 1})$. Rajatapauksessa $k = 0$ logaritminen spiraali muuttuu ympyräksi, ja tällöin $\alpha = \pi/2$. Vastaten sitä, että ympyrä tangentti ja säde ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.



Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Yleistä

Laskeminen

Esimerkki 5B.1

Esimerkki 5B.2

Esimerkki 5B.3

Esimerkki 5B.4

Käyrien summa

1

Käyrien summa

2

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Käyräintegraali



Yleistä

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Yleistä

Laskeminen

Esimerkki 5B.1

Esimerkki 5B.2

Esimerkki 5B.3

Esimerkki 5B.4

Käyrien summa

1

Käyrien summa

2

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

- Kehitetään käsite: vektorikentän $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ integraali yli käyrän $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.
- Idea: Ynnäillään sisätuloja lyhyistä käyrän pätkistä vektorikentästä ko. pätkältä valitussa pisteessä (vrt. Riemannin summa).
- Toivomme, että jakoa tihentämällä (pätkät lyhenevät, mutta niiden lukumäärä kasvaa) mainittujen sisätulojen summat lähestyvät jotakin raja-arvoa, joka määritellään käyräintegraalin arvoksi:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f_1(\mathbf{x}) dx_1 + f_2(\mathbf{x}) dx_2 + \dots + f_n(\mathbf{x}) dx_n.$$

- Toive toteutuu, jos käyrä on paloittain derivoituva polku, ja f on jatkuva.



Käyräintegraalin laskeminen

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Yleistä

Laskeminen

Esimerkki 5B.1

Esimerkki 5B.2

Esimerkki 5B.3

Esimerkki 5B.4

Käyrien summa

1

Käyrien summa

2

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

Oletetaan, että γ on derivoituva koko välillä (yleisemmässä tapauksessa lasketaan integraali paloittain). Tällöin parametrin t infinitesimaalista muutosta dt vastaa:

- käyrän pätkä $\gamma'(t) dt = (\gamma'_1(t) dt, \dots, \gamma'_n(t) dt)$
- kenttä $f(\gamma(t)) = (f_1(\gamma(t)), f_2(\gamma(t)), \dots, f_n(\gamma(t)))$
- näiden sisätulo $(f(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt$, ja
- niiden summana saatava käyräintegraali

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=a}^b \left[\sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \right] dt.$$



Esimerkki 5B.1

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Yleistä

Laskeminen

Esimerkki 5B.1

Esimerkki 5B.2

Esimerkki 5B.3

Esimerkki 5B.4

Käyrien summa

1

Käyrien summa

2

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Tehtävä: Totea, että käyrät $\gamma : t \mapsto (t, 0), t \in [1, e]$ ja $\psi : t \mapsto e^{t/(2\pi)}(\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$ kumpikin alkavat pisteestä $(1, 0)$ ja päättyvät pisteeseen $(e, 0)$. Laske vektorikentän $f(x, y) = (x, y)$ käyräintegraalit yli polkujen γ ja ψ .

Ratkaisu: Sijoittamalla nähdään, että $\gamma(1) = \psi(0) = (1, 0)$, ja $\gamma(e) = \psi(2\pi) = (e, 0)$, joten käyrien alku- ja loppupisteet ovat väitetyt.

Käyrällä γ on $\gamma'_1(t) = 1$ ja $\gamma'_2(t) = 0$, joten integroitavaksi funktioksi saadaan

$$(f(\gamma(t)), \gamma'(t)) = ((x(\gamma(t)), y(\gamma(t))), (1, 0)) = t \cdot 1 + 0 = t.$$



Esimerkki 5B.2

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Yleistä

Laskeminen

Esimerkki 5B.1

Esimerkki 5B.2

Esimerkki 5B.3

Esimerkki 5B.4

Käyrien summa

1

Käyrien summa

2

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

Näin ollen

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} x dx + y dy = \int_{t=1}^e t dt = \frac{1}{2}(e^2 - 1).$$

Käyrällä ψ sitä vastoin $x = e^{t/2\pi} \cos t$, $y = e^{t/2\pi} \sin t$ ja edelleen (derivoimalla)

$$dx = e^{t/(2\pi)} \left(\frac{\cos t}{2\pi} - \sin t \right) dt,$$

$$dy = e^{t/(2\pi)} \left(\frac{\sin t}{2\pi} + \cos t \right) dt,$$

$$\begin{aligned} x dx + y dy &= e^{t/\pi} \left(\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{2\pi} + [\cos t \cdot (-\sin t) + \sin t \cos t] \right) \\ &= \frac{e^{t/\pi}}{2\pi}. \end{aligned}$$



Esimerkki 5B.3

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Yleistä

Laskeminen

Esimerkki 5B.1

Esimerkki 5B.2

Esimerkki 5B.3

Esimerkki 5B.4

Käyrien summa

1

Käyrien summa

2

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Tämä sieveni mukavasti, joten käyräintegraalin arvoksi tulee

$$\begin{aligned}\int_{\psi} f &= \int_{t=0}^{2\pi} \frac{e^{t/\pi}}{2\pi} dt \\ &= \left|_0^{2\pi} \frac{e^{t/\pi}}{2} = \frac{1}{2}(e^2 - 1).\end{aligned}$$

Integraalit $\int_{\gamma} f$ ja $\int_{\psi} f$ ovat yhtä suuria. Pohdimme tätä kurssin lopuksi. Seuraavan kalvon kuvasta näemme, että vaikka ψ on paljon pidempi polku kuin γ , niin se kulkee melkein kohtisuorassa kenttää f vastaan. Näin ollen sisätulot $(f(\psi(t)), \psi'(t))$ ovat suhteellisen pieniä, ja pidemmältä matkalta kertyy sama lopputulos.



Esimerkki 5B.4

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Yleistä

Laskeminen

Esimerkki 5B.1

Esimerkki 5B.2

Esimerkki 5B.3

Esimerkki 5B.4

Käyrien summa

1

Käyrien summa

2

Greenin lause

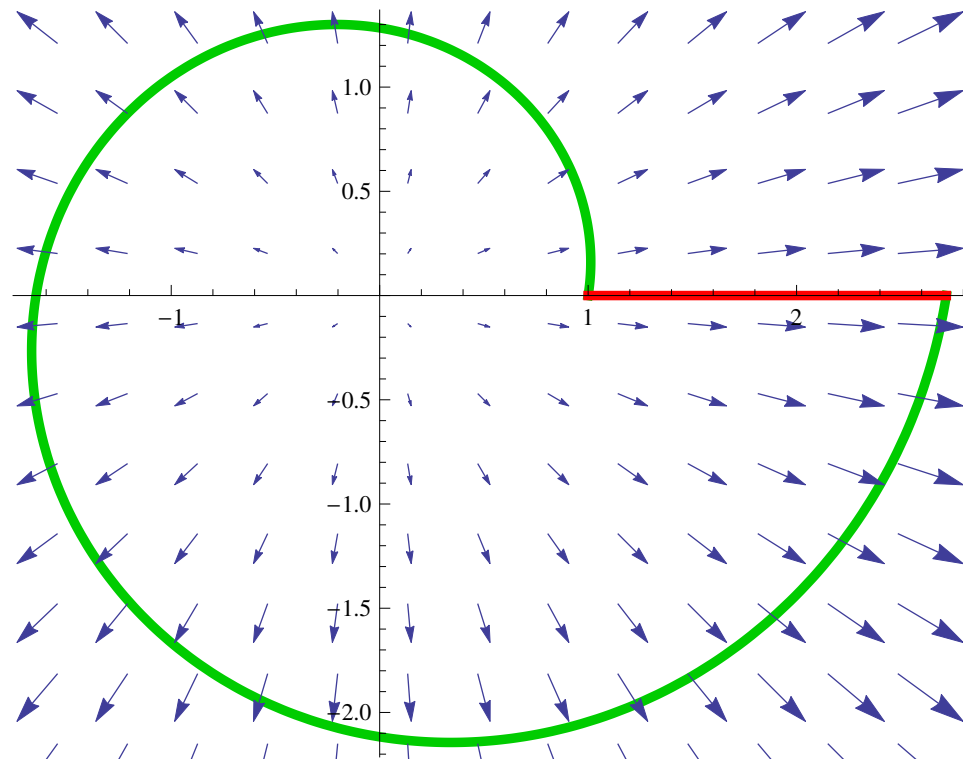
Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli
integroimalla



Kuvassa kenttä f muodostuu sinisistä nuolista, käyrä γ on punainen jana, ja käyrä ψ on vihreä spiraali.



Käyrien summa 1

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Yleistä

Laskeminen

Esimerkki 5B.1

Esimerkki 5B.2

Esimerkki 5B.3

Esimerkki 5B.4

Käyrien summa

1

Käyrien summa

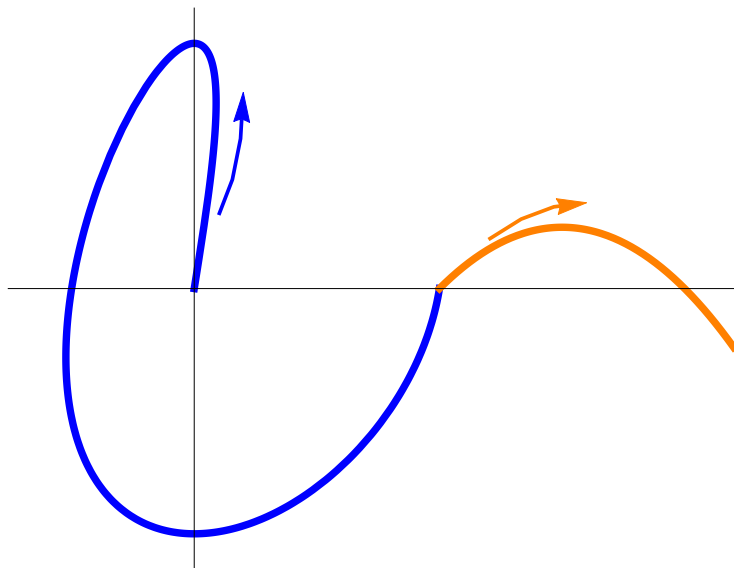
2

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Jos käyrät $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $\psi : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^n$ toteuttavat ehdon $\gamma(b) = \psi(a')$ voidaan muodostaa yhdistetty käyrä $\gamma + \psi$ kulkemalla ensin käyrä γ (sininen) ja sitten käyrä ψ (oranssi)





Käyrien summa 2

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Yleistä

Laskeminen

Esimerkki 5B.1

Esimerkki 5B.2

Esimerkki 5B.3

Esimerkki 5B.4

Käyrien summa

1

Käyrien summa

2

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Yhdistetylle käyrälle nähdään helposti laskusääntö

$$\int_{\gamma+\psi} f = \int_{\gamma} f + \int_{\psi} f.$$

Vertaa: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

Edelleen *vastakäyrälle* $\overleftarrow{\gamma}$ (sama käyrä vastakkaiseen suuntaan kuljettuna) on voimassa

$$\int_{\gamma} f = - \int_{\overleftarrow{\gamma}} f.$$

Vertaa: $\int_a^b f = - \int_b^a f.$



Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppeli 1

Simppeli 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

Greenin lause



Greenin lause

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppeli 1

Simppeli 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

- Pyrimme kuvaamaan ns. Greenin lauseen, joka sitoo integraalin yli tasoalueen käyräintegraaliin yli kyseisen alueen reunan.

$$\int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial A} g dx + f dy.$$

- Kiinnitämme erityistä huomiota reunan suunnastukseen.
- Etenemme vaiheittain. Ensin käsitellään yksinkertainen alueiden tyyppi, ja siitä edetään monimutkaisempiin.
- Mutta yleisin mahdollinen muotoilu jää hämäräksi.
- Suunnastuksiin liittyviltä ja muilta ongelmilta voi välttyä muotoilemalla tuloksen ns. singulaaristen 2-kuutioiden avulla (vrt. Kari Ylisen UMF-moniste). Täsmällisyydessä voittava lähestymistapa kuitenkin häviää havainnollisuudessa.



Yksinkertainen alue1

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppli 1

Simppli 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Käsitlemme ensin sellaista tason osajoukkoa A , jonka yläreuna, alareuna, vasen reuna ja oikea reuna ovat kaikki derivoituvan funktion kuvaajia, eli

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \in [c, d], x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\} \end{aligned}$$

derivoituville funktioille $y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_1, x_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Tässä $y_1 \leq y_2$, $y_1(a) = y_2(a)$, $y_1(b) = y_2(b)$ ja $x_1 \leq x_2$, $x_1(c) = x_2(c)$, $x_1(d) = x_2(d)$ tarkasteluväleillä. Funktio $y_1(x)$ määrää alueen alareunan, $y_2(x)$ yläreunan, $x_1(y)$ vasemman reunan ja $x_2(y)$ oikean.

Jokainen koordinaattiakselin suuntainen suora leikkaa A :n reunaa yhdessä tai kahdessa pisteessä.



Yksinkertainen alue 2

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppele 1

Simppele 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

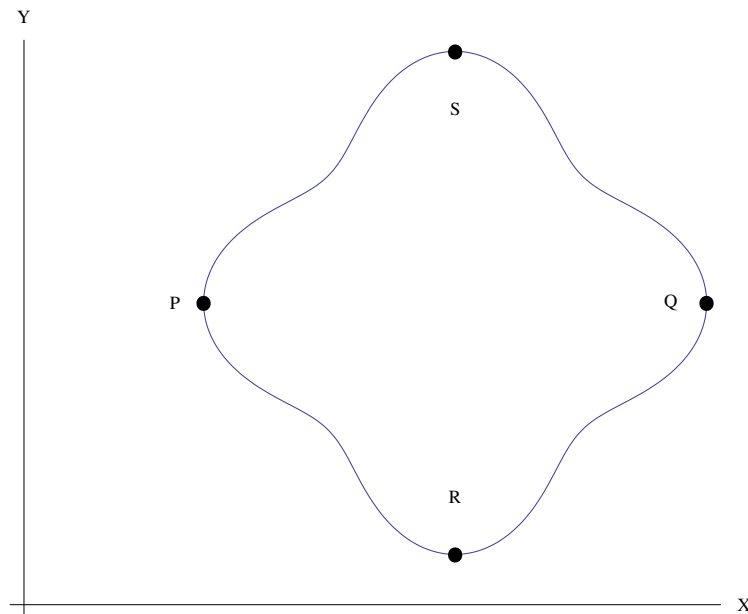
Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla



Kuvassa siis $P = (a, y_1(a)) = (a, y_2(a))$,
 $Q = (b, y_1(b)) = (b, y_2(b))$, $R = (x_1(c), c) = (x_2(c), c)$,
 $S = (x_1(d), d) = (x_2(d), d)$.

dx-komponentti 1

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppele 1

Simppele 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

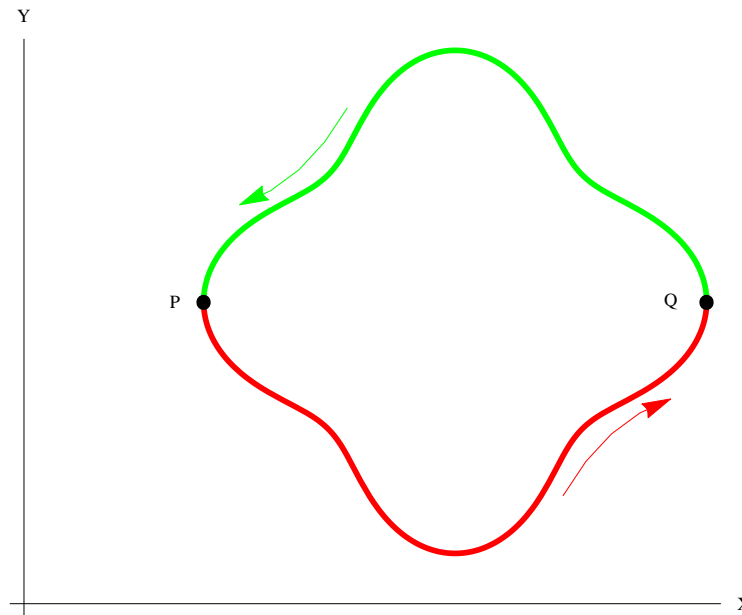
Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla



Lasketaan funktion $-\partial g / \partial y$ integraali yli alueen A .

Käytetään ala- ja yläreunoista merkintöjä:

$$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_1(t) = (t, y_1(t)),$$

$$\gamma_2 : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) = (-t, y_2(-t)).$$

Kummallakin reunalla t kasvaa nuolen suuntaan.



dx-komponentti 2

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppeli 1

Simppeli 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

$$\begin{aligned}\int_A \left(-\frac{\partial g}{\partial y}\right) dx dy &= \int_{x=a}^b \left(-\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial g}{\partial y} dy\right) dx \\&= \int_{x=a}^b \left(-\left[g(x, y_2(x)) - g(x, y_1(x))\right]\right) dx \\&= \int_{x=a}^b (g(x, y_1(x)) - g(x, y_2(x))) dx \\&= \int_{t=a}^b g(\gamma_1(t)) dt + \int_{t=-b}^{-a} g(\gamma_2(t)) dt \\&= \int_{\gamma_1} g(x, y) dx + \int_{\gamma_2} g(x, y) dx.\end{aligned}$$



dy-komponentti 1

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppele 1

Simppele 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

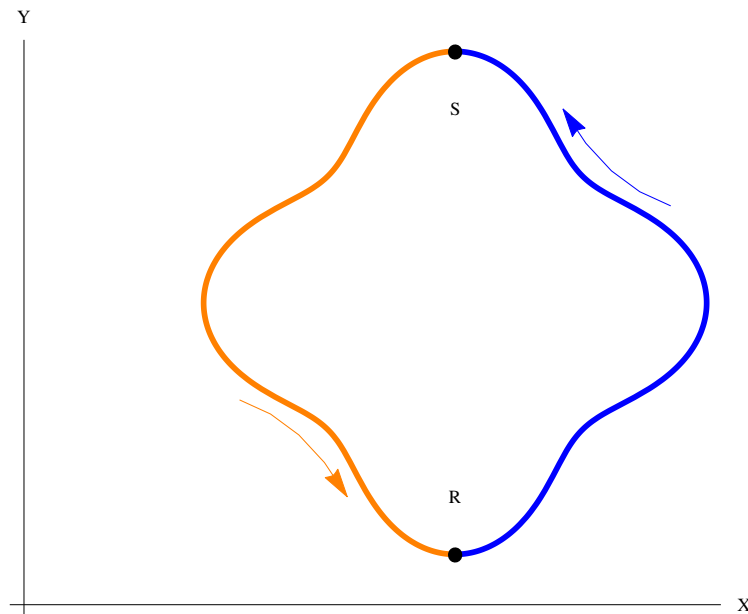
Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla



Lasketaan funktion $\partial f / \partial x$ integraali yli alueen A . Käytetään oikeasta ja vasemmasta reunasta merkintöjä:

$$\gamma_3 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_3(t) = (x_2(t), t),$$

$$\gamma_4 : [-d, -c] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_4(t) = (x_1(-t), -t).$$

Kummallakin reunalla t kasvaa nuolen suuntaan.



dy-komponentti 2

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppeli 1

Simppeli 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

$$\begin{aligned}\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy &= \int_{y=c}^d \left(\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) dy \\&= \int_{y=c}^d \left(\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \right) dy \\&= \int_{y=c}^d (f(x_2(y), y) - f(x_1(y), y)) dy \\&= \int_{t=c}^d f(\gamma_3(t)) dt + \int_{t=-d}^{-c} f(\gamma_4(t)) dt \\&= \int_{\gamma_3} f(x, y) dy + \int_{\gamma_4} f(x, y) dy.\end{aligned}$$



Summa

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppli 1

Simppli 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

- Polkusummat $\gamma_2 + \gamma_1$ ja $\gamma_4 + \gamma_3$ muodostavat kumpikin alueen reunakäyrän (sulkeutuva!) positiiviseen kiertosuuntaan — toinen alkaen ja päättyen pisteestä P , toinen alkaen ja päättyen pisteestä R .
- Käyräintegraalin arvo yli suljetun käyrän ei riipu alku(=loppu)pisteen valinnasta.
- Näin ollen laskemalla yhteen edellisten kalvojen integraalit saadaan Greenin lause yksinkertaisille alueille

$$\int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} g dx + f dy.$$



Esimerkki 5C.1

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppeli 1

Simppeli 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

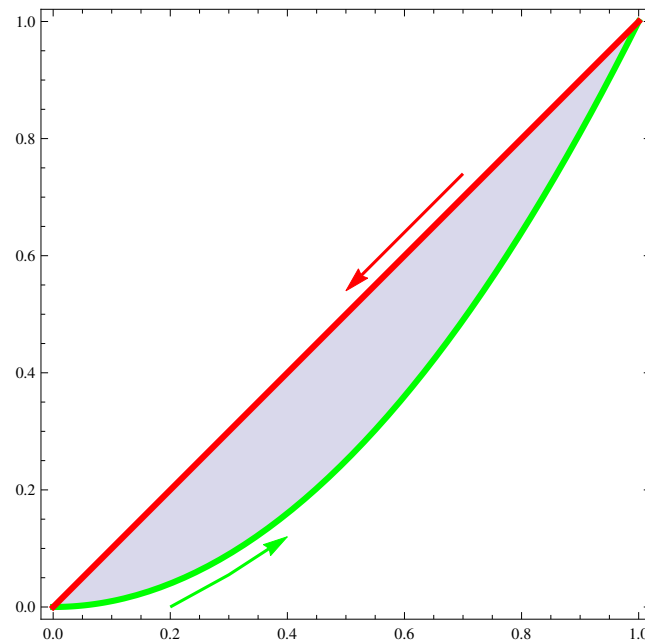
laskeminen

reunan yli

integroimalla

Tehtävä: Tarkista Greenin lauseen voimassaolo, kun $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $g(x, y) = x + y$, ja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}.$$





Esimerkki 5C.2

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppele 1

Simppele 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

Nyt

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 2x + y - 1,$$

joten

$$\begin{aligned} \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x (2x + y - 1) dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x (2xy + y^2/2 - y) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(-x + \frac{7x^2}{2} - 2x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$



Esimerkki 5C.3

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppli 1

Simppli 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

Alareunalla $\gamma_1(t) = (t, t^2)$, $dx = dt$, $dy = 2t dt$,
 $f(\gamma_1(t)) = t^2 + t^3 + t^4$ ja $g(\gamma_1(t)) = t + t^2$, joten

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} g dx + f dy &= \int_{t=0}^1 ([t + t^2] \cdot 1 + [t^2 + t^3 + t^4] \cdot 2t) dt \\ &= \int_{t=0}^1 (2t^5 + 2t^4 + 2t^3 + t^2 + t) dt = 31/15.\end{aligned}$$

ja yläreunalla $\gamma_2^{\leftarrow}(t) = (t, t)$, $dx = dy = dt$, $f = 3t^2$, $g = t^2$, ja

$$\int_{\gamma_2} g dx + f dy = - \int_{t=0}^1 (3t^2 + 2t) dt = -2.$$

Siis myös

$$\int_{\gamma} g dx + f dy = \frac{31}{15} - 2 = \frac{1}{15}.$$



Laajennuksia

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppli 1

Simppli 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

- Toistamalla yllä tehdyt laskut nähdään, ettei haittaa vaikka jollakin reunan osalla olisikin x tai y -koordinaatti vakio. Se muuttaa hieman laskun yksityiskohtia: joko y_1, y_2 tai x_1, x_2 -pari eivät saa jommassa kummassa reunapisteessä samoja arvoja, mutta tämä ei haittaa, koska vaakasuoralla (vast. pystysuoralla) osuudella $dy = 0$ (vast. $dx = 0$).
- Monimutkaisemmat alueet voidaan käsitellä jakamalla ne yksinkertaisiin osiin, joille Greenin lause on jo todistettu. Tällöin lisätään väliaikaisesti reunakäyrään ylimääräisiä osia, jotka kuljetaan kahdesti, kerran kumpaankin suuntaan, jolloin näiden ylimääräisten osien vaikutus käyräintegraaliin kumoutuu.



Esimerkki 5D.1

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppeli 1

Simppeli 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen

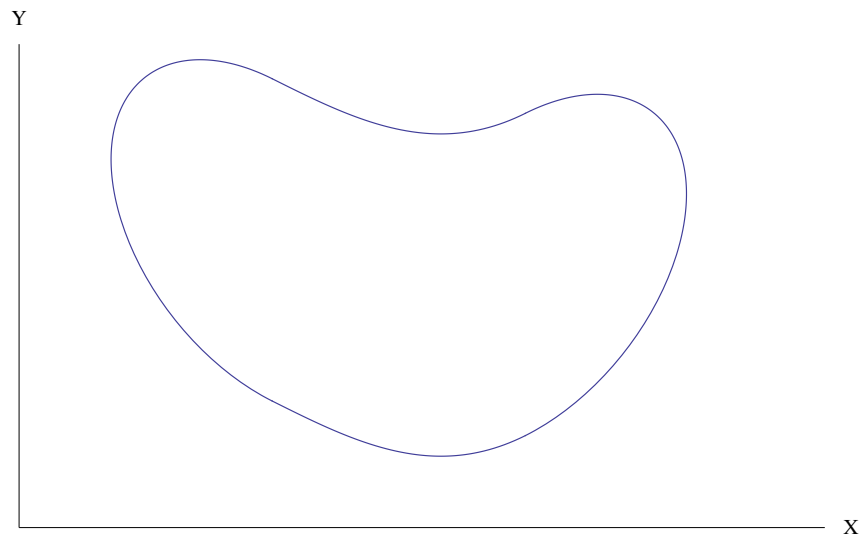
pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

Tehtävä: Selitä, miksi Greenin lause on voimassa myös kuvan alueelle U , vaikka sen reuna ei jakaudukaan vasempaan ja oikeaan reunaan kuten yllä.



Esimerkki 5D.2

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppele 1

Simppele 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

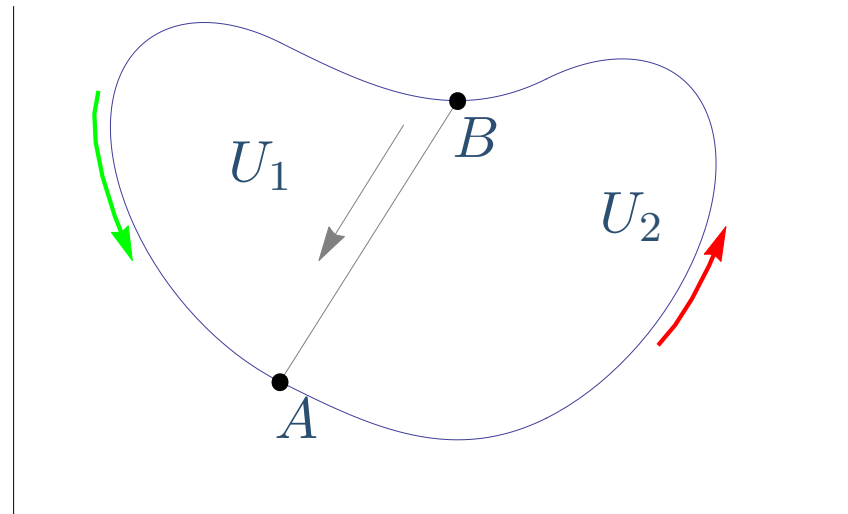
Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Ratkaisu: Halkaistaan alue janalla $L(A, B)$ kahteen osaan U_1 ja U_2



Tässä U_1 ja U_2 molemmat ovat ‘yksinkertaisia’.



Esimerkki 5D.3

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppele 1

Simppele 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

Merkitään: kaari $A \rightarrow B = \gamma_1$, kaari $B \rightarrow A = \gamma_2$, jana $BA = \gamma_3$. Tällöin yhdistetty polku $\gamma_3 + \gamma_1$ on alueen U_2 reuna. Vastaavasti $\overleftarrow{\gamma_3} + \gamma_2$ on alueen U_1 reuna (positiiviseen kiertosuuntaan).

Lyhennetään $h = \partial f / \partial x - \partial g / \partial y$ ja $\omega = g dx + f dy$. Greenin lauseen yksinkertaista aluetta koskevan version mukaan

$$\int_{U_2} h = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_3} \omega$$

ja

$$\begin{aligned} \int_{U_1} h &= \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\overleftarrow{\gamma_3}} \omega \\ &= \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_3} \omega. \end{aligned}$$



Esimerkki 5D.4

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Greenin lause

Simppeli 1

Simppeli 2

x-suunta 1

x-suunta 2

y-suunta 1

y-suunta 2

Summa

Esimerkki 5C.1

Esimerkki 5C.2

Esimerkki 5C.3

Laajennuksia

Esimerkki 5D.1

Esimerkki 5D.2

Esimerkki 5D.3

Esimerkki 5D.4

Reikä alueessa

Tasoalueen

pinta-alan

laskeminen

reunan yli

integroimalla

Näin ollen

$$\begin{aligned}\int_U h &= \int_{U_2} h + \int_{U_1} h \\ &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_3} \omega - \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_2} \omega \\ &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega \\ &= \int_{\gamma_2 + \gamma_1} \omega.\end{aligned}$$

Tässä yhdistetty polku $\gamma_2 + \gamma_1$ on alueen U reuna positiiviseen suuntaan kierrettynä.



Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Esimerkki 5E.1

Esimerkki 5E.2

Esimerkki 5E.3

Esimerkki 5E.4

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Reikä alueessa



Esimerkki 5E.1

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Esimerkki 5E.1

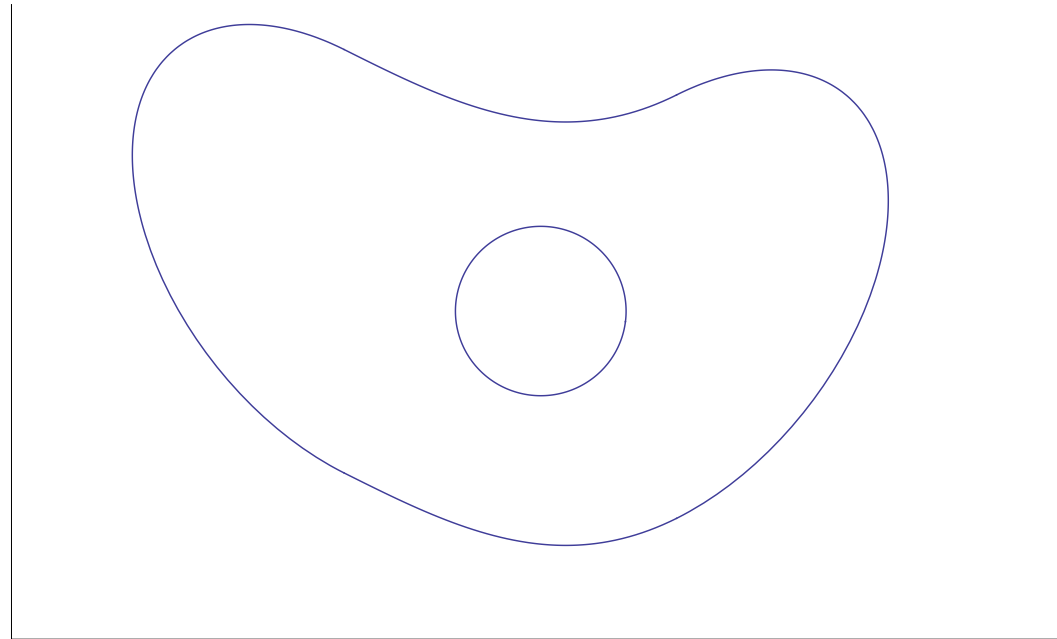
Esimerkki 5E.2

Esimerkki 5E.3

Esimerkki 5E.4

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Tehtävä: Selvitä millaisen muodon Greenin lause saa oheisen kuvan alueelle U ?





Esimerkki 5E.2

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Esimerkki 5E.1

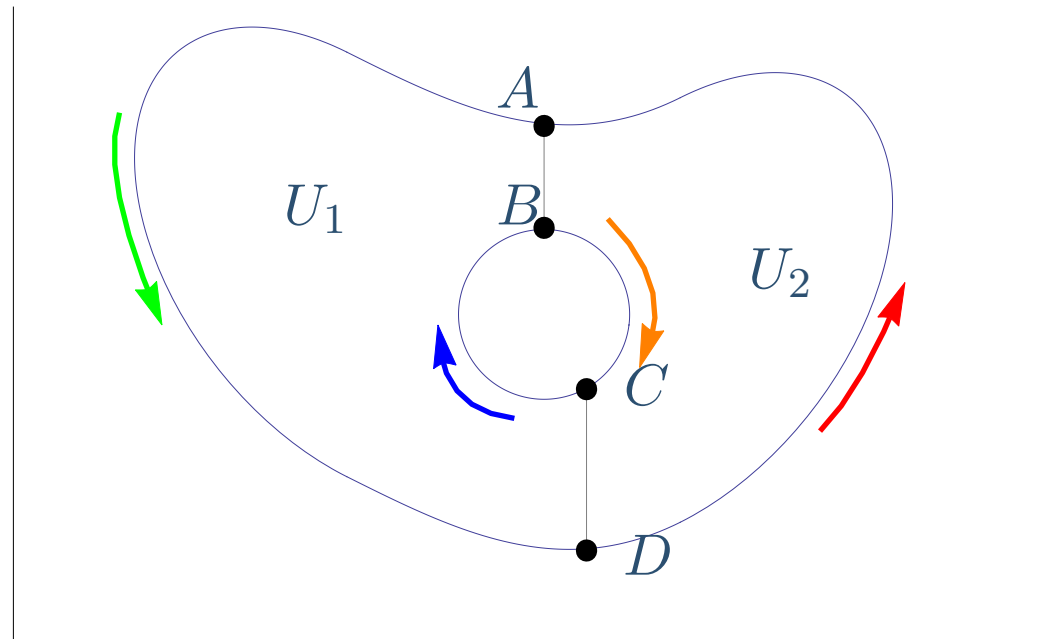
Esimerkki 5E.2

Esimerkki 5E.3

Esimerkki 5E.4

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Käytetään useampia halkaisevia janoja:





Esimerkki 5E.3

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Esimerkki 5E.1

Esimerkki 5E.2

Esimerkki 5E.3

Esimerkki 5E.4

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Merkitään reunakäyrien osia ja lisäjanoja seuraavasti.

$$\gamma_1 = U_2\text{:n reunakaari } D \rightarrow A$$

$$\gamma_2 = U_2\text{:n reunakaari } B \rightarrow C$$

$$\gamma_3 = U_1\text{:n reunakaari } A \rightarrow D$$

$$\gamma_4 = U_1\text{:n reunakaari } C \rightarrow B$$

$$\gamma_5 = \text{jana } A \rightarrow B$$

$$\gamma_6 = \text{jana } C \rightarrow D$$

Nyt yhdistetty polku $\gamma_6 + \gamma_2 + \gamma_5 + \gamma_1$ on alueen U_2 reunaa positiiviseen suuntaan kiertävä Jordanin käyrä. Vastaavasti polku $\gamma_3 + \overleftarrow{\gamma_5} + \gamma_4 + \overleftarrow{\gamma_6}$ on Jordanin käyrä joka rajaa alueen U_1 .



Esimerkki 5E.4

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Esimerkki 5E.1

Esimerkki 5E.2

Esimerkki 5E.3

Esimerkki 5E.4

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Näin ollen (h ja ω kuten aiemmin)

$$\begin{aligned}\int_U h &= \int_{U_1} h + \int_{U_2} h \\ &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_5} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_6} \omega + \\ &\quad - \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_4} \omega - \int_{\gamma_5} \omega + \int_{\gamma_3} \omega \\ &= \int_{\gamma_1 + \gamma_3} \omega + \int_{\gamma_2 + \gamma_4} \omega.\end{aligned}$$

Huomaamme, että $\gamma_1 + \gamma_3$ on ulkoreuna vastapäivään kierrettynä, ja $\gamma_2 + \gamma_4$ on sisäreuna (=reiän ympärys) *myötäpäivään* kierrettynä. Reikä käsitellään siis siten, että sitä vastaava reunan osa saa vastakkaisen suunnastuksen.



Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pinta-ala
Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Tasoalueen pinta-alan laskeminen reunan yli integroimalla



Pinta-ala

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integraalilla

Pinta-ala

Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Havainto: Jos funktiot $f(x, y)$ ja $g(x, y)$ toteuttavat ehdon

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

koko tasossa, niin tällöin alueen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ pinta-ala saadaan integraalista

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{\partial A} g(x, y) dx + f(x, y) dy, \end{aligned}$$

kunhan reunan ∂A osat suunnastetaan Greenin lauseen edellyttämällä tavalla.



Mukavia valintoja

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pinta-ala

Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

- Valinta $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = -y$ johtaa mm. koulusta tuttuun tasoalueen pinta-alan kaavaan.
- Valinta $f(x, y) = x$, $g(x, y) = 0$ johtaa esim. kaavaan missä integrointi tapahtuukin y :n suhteen.
- Symmetrisempi valinta $f(x, y) = x/2$, $g(x, y) = -y/2$ johtaa kaavaan

$$m(A) = \frac{1}{2} \int_{\partial A} x dy - y dx.$$



Esimerkki 5F.1

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pinta-ala
Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Tehtävä: Pitkin x -akselia vierivä R -säteinen ympyrä piirtää syklodiksi kutsutun käyrän. Jos merkitään t :llä ympyrän pyörähtämää kulmaa, niin sykloidin parametrisoinniksi $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ saadaan

$$x(t) = R(t - \sin t), \quad y(t) = R(1 - \cos t).$$

Sykloidi koskettaa x -akselia pisteissä $(0, 0)$ ja $(2R\pi, 0)$ vastaten parametrin vaihteluväliä $t \in [0, 2\pi]$. Laske sykloidin tällä välillä olevan kaaren ja x -akselin rajaaman alueen pinta-ala.



Esimerkki 5F.2

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pinta-ala
Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Kuvasta (siellä $R = 1$) nähdään, että laskettavan alueen reuna muodostuu kahdesta osasta. Palanen x -akselia origosta pisteeseen $(2R\pi, 0)$ ja sen jälkeen palataan syklroidin kaarta oikealta vasemmalle. Vaakasuoralla pätkällä $y = 0$, joten kannattaa käyttää vaihtoehtoa

$$m(A) = \int_{\partial A} (-y) dx = \int_{\gamma} y dx.$$



Esimerkki 5F.3

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen

reunan yli
integroimalla

Pinta-ala

Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Koska $dx = R(1 - \cos t) dt$ vastaukseksi saadaan

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_{\gamma} y \, dx \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} R^2 (1 - \cos t)^2 \, dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} R^2 (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) \, dt = R^2 (2\pi - 0 + \pi) \\ &= 3\pi R^2. \end{aligned}$$



Napakoordinaatit 1

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pinta-ala
Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Kun napakoordinaateilla asetetaan yhteys $r = r(\phi)$, niin tätä vastaa parametrisoitu käyrä

$$x = r \cos \phi = r(\phi) \cos \phi, \quad y = r \sin \phi = r(\phi) \sin \phi.$$

Tällöin symmetrisempi differentiaalimuoto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x \, dy - y \, dx) &= \frac{1}{2} [r^2 \cos^2 \phi + rr' \cos \phi \sin \phi \\ &\quad - (r \sin \phi)r(-\sin \phi) - rr' \sin \phi \cos \phi] \, d\phi \\ &= \frac{1}{2} r^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \, d\phi \\ &= \frac{1}{2} r^2 \, d\phi. \end{aligned}$$



Napakoordinaatit 2

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pinta-ala
Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

Esimerkki 5G.3

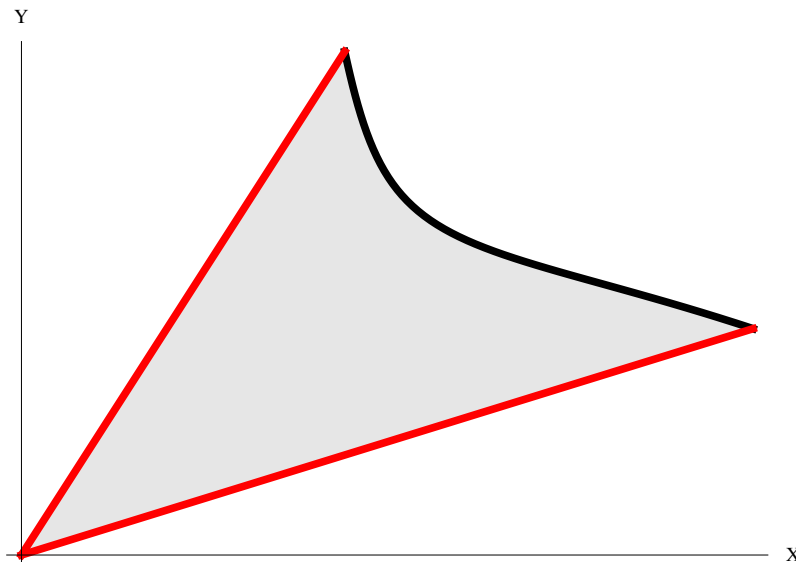
Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Differentiaalimuodolla $(x dy - y dx)/2$ on lisäksi se ominaisuus, että origosta lähtevällä säteellä $x = t \cos \alpha$, $y = t \sin \alpha$, $t \geq 0$, α kiinteä, se häviää:

$$x dy - y dx = (t \cos \alpha \sin \alpha - t \sin \alpha \cos \alpha) dt = 0.$$





Napakoordinaatit 3

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pinta-ala
Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Näin ollen aluetta A rajaavat kulmia α ja β vastaavat säteet (punaisia) ja käyrä $r = r(\phi) \geq 0$ (musta), joka välillä $\phi \in [\alpha, \beta]$ saa ei-negatiivisia arvoja. Greenin lauseen nojalla sen pinta-alaksi saadaan

$$\begin{aligned} m(A) &= \frac{1}{2} \int_{\partial A} x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{säde } \phi=\alpha} + \frac{1}{2} \int_{\text{käyrä } r=r(\phi), \alpha \leq \phi \leq \beta} + \frac{1}{2} \int_{\text{säde}^{\leftarrow} \phi=\beta} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\phi=\alpha}^{\beta} r^2(\phi) d\phi. \end{aligned}$$



Esimerkki 5G.1

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pinta-ala
Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

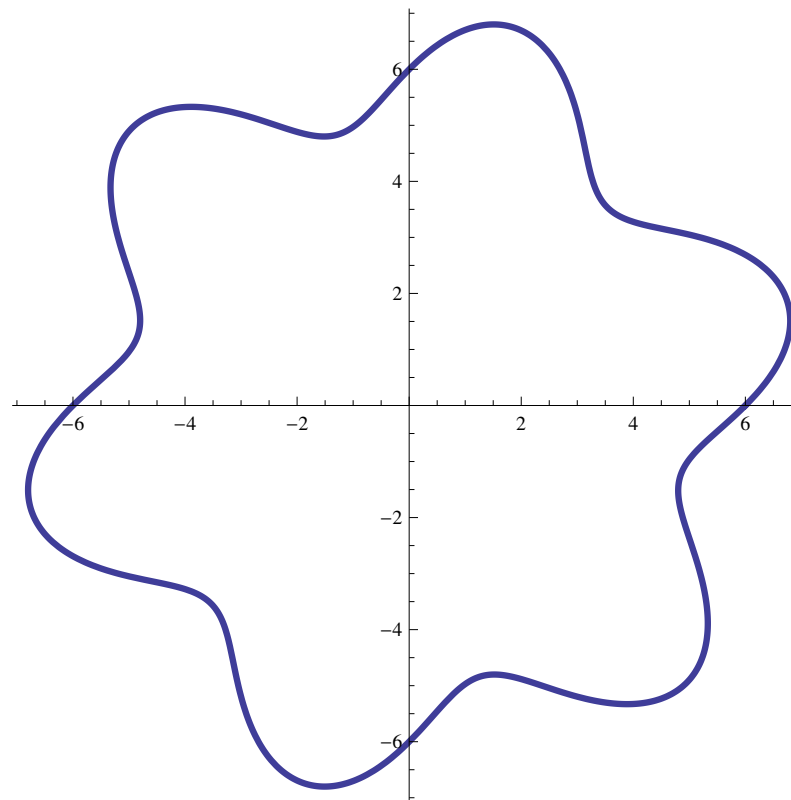
Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Selitä, miksi napakoordinaattiyhtälö $r = 6 + \sin 6\phi$ rajaa oheisen kuvan mukaisen piparinmuotoisen alueen ja laske sen pinta-ala.





Esimerkki 5G.2

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pinta-ala
Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

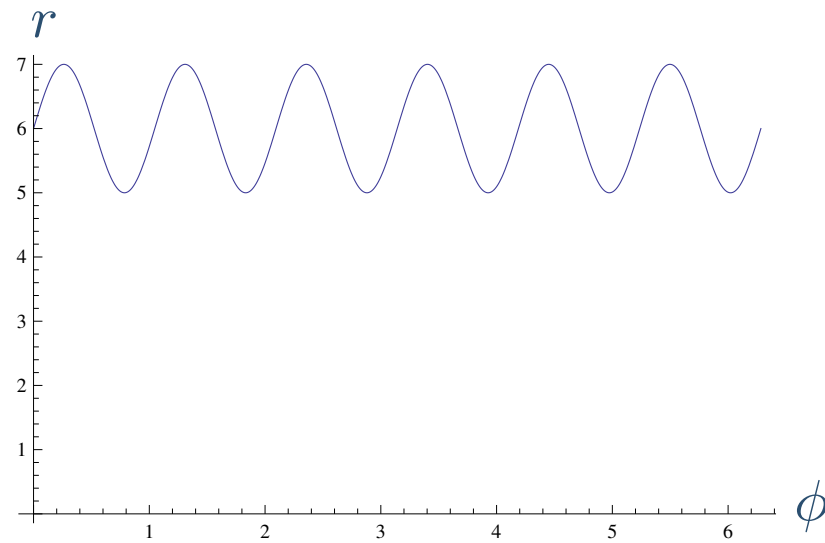
Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Funktion $r = 6 + \sin 6\phi$ kuvaaja ϕr -tasossa olisi normaali sinikäyrä, joka heilahtelee välillä $r \in [5, 7]$.



Näin ollen vastaava napakoordinaattikäyrä heilahtelee etäisyydellä $r \in [5, 7]$ origosta. Koska 2π on funktion $\sin 6\phi$ eräs jakso, napakoordinaattikäyrä alkaa toistaa itseään täyden kierroksen jälkeen.



Esimerkki 5G.3

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pinta-ala
Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Piparin alaksi tulee näin

$$\begin{aligned} m(P) &= \frac{1}{2} \int_{\phi=0}^{2\pi} (6 + \sin 6\phi)^2 d\phi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (36 + 12 \sin 6\phi + \sin^2 6\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2} (72\pi + 0 + \pi) = \frac{73\pi}{2}. \end{aligned}$$

6-säteisen ympyrän ala olisi 36π . Pipari on siis aavistuksen verran isompi.



Potentiaali 1

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pinta-ala
Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Oletetaan, että $U \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin ja yhtenäinen (topologinen käsite, johon emme ehdi paneutua). C^2 -luokan funktiota $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ sanotaan vektorikentän $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ potentiaaliksi joukossa U , jos

$$\nabla F = f.$$

- Jos kentällä $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ on potentiaali, niin sekaderivaattojen yhtäsuuruuden vuoksi on oltava

$$\partial_j f_i(\mathbf{x}) = \partial_i f_j(\mathbf{x})$$

kaikille $\mathbf{x} \in U$.

- ns. Poincarén lemmän nojalla sama tulos on voimassa kääntäen, jos alueessa U ei ole reikiä. Todistus ja reiättömyyden tarkempi kuvaus sivuutetaan.



Potentiaali 2

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pinta-ala
Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Oletetaan, että $U \subseteq \mathbb{R}^n$ on alue, ja $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ on vektorikentän f potentiaali. Oletetaan lisäksi, että $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ on paloittain differentioituva polku. Tällöin ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma'_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t))\gamma'_i(t).\end{aligned}$$

Näin ollen Analyysin peruslauseen nojalla

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_{\gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n.$$



Riippumattomuus tiestä

Vektorilaskenta

Käyristä

Käyräintegraali

Greenin lause

Reikä alueessa

Tasoalueen
pinta-alan
laskeminen
reunan yli
integroimalla

Pinta-ala
Mukavia
valintoja

Esimerkki 5F.1

Esimerkki 5F.2

Esimerkki 5F.3

Polar 1

Polar 2

Polar 3

Esimerkki 5G.1

Esimerkki 5G.2

Esimerkki 5G.3

Potentiaali 1

Potentiaali 2

Independence

Sanotaan, että vektorikentän f käyräintegraalit avoimessa joukossa U ovat *riippumattomia tiestä*, jos $\int_{\gamma} f$ riippuu vain γ :n alku- ja loppupisteistä, mutta ei käyrästä γ .
Edellisen kalvon havainnon seurauksena kentän käyräintegraalit ovat riippumattomia tiestä, jos kentällä f on potentiaali joukossa U .
Sama pätee myös kääntäen (vaikka joukossa U olisikin reikiä).