

0.1 Yksinkertaisista trigonometrisista integraaleista

Seuraava integraali esiintyy sängen usein, ja monet integraalit palautuvat tätä tyyppiä olevaan integraaliin trigonometrisen sijoituksen jälkeen.

Esimerkki 0.1. Olkoon $n \in \mathbf{N}$ luonnollinen luku. Johda kaava määrätyle integraalille

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

Ratkaisu. Sovelletaan osittaisintegrointia. Oletetaan ensin, että $n \geq 2$, ja valitaan $u = \sin^{n-1} x$ ja $v' = \sin x$. Tällöin $u' = (n-1) \cos x \sin^{n-2} x$ ja $v = -\cos x$, joten osittaisintegrointi antaa yhtälön

$$I_n = \left[-\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx.$$

Selvästi ensimmäinen termi (sijoitus) on nolla. Käytetään jälkimmäisessä integraalissa identiteettiä $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Äskeinen yhtälö saa silloin muodon

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

jonka ratkaisuna saamme *palautuskaavan*

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Toisaalta saamme helposti, että $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \pi/2$ ja $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$. Palautuskaavan avulla näistä saadaan yleiset tulokset (todistus harjoitustehtävänä induktiolla)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{\pi}{2}$$

parillisille potensseille ($k \in \mathbf{N}$), ja parittomille vastaavasti (edelleen kaikille $k \in \mathbf{N}$)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x \, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2k}{2k+1}.$$

Esimerkki 0.2. Määritellään lukujono $a_k, k \in \mathbf{N}$, kaavalla

$$a_k = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2k-2}{2k-3} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k-1}.$$

Todistetaan ns. Wallisin kaava, joka sanoo, että tämä jono suppenee, ja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \frac{\pi}{2}.$$

Ratkaisu. Esimerkin 0.1 tulokset voidaan kirjoittaa muodossa ($k > 0$)

$$\frac{I_{2k-1}}{I_{2k}} = \frac{2a_k}{\pi}.$$

Toisaalta kaikille $x \in [0, \pi/2]$ on voimassa $\sin x \in [0, 1]$ ja sen seurauksena

$$0 \leq \sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x.$$

Integraalin monotonisuuden seurauksena saadaan epäyhtälöketju $0 < I_{2k+1} \leq I_{2k} \leq I_{2k-1}$. Jakamalla tämä puolittain luvulla I_{2k-1} saadaan palautuskaava huomioon ottaen

$$\frac{2k}{2k+1} \leq \frac{I_{2k-1}}{I_{2k}} \leq 1$$

kaikille kokonaisluvuille $k > 0$. Tässä vasemmanpuoleisimpien lukujen muodostama jono lähestyy rajarvonaan lukua 1, joten sandwich-lauseen nojalla $\lim_{k \rightarrow \infty} (I_{2k-1}/I_{2k}) = 1 = (2/\pi) \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$. Väite seuraa.

Esimerkki 0.3. Osoita, että kaikilla eksponentin $n \in \mathbf{N}$ arvoilla on voimassa

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

Siis Esimerkin 0.1 tulokset ovat voimassa myös kosinin potenssien määrättyille integraaleille.

Ratkaisu. Käytetään sijoitusta $x = g(t) = \pi/2 - t$. Tällöin $\cos g(t) = \sin t$, $g'(t) = -1$, $g(\pi/2) = 0$, ja $g(0) = \pi/2$, joten $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx \stackrel{\text{sij. } x = \pi/2 - t}{=} \int_{\pi/2}^0 (-1) \sin^n t \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt.$$

Esimerkki 0.4. Laske määrätty integraali

$$I = \int_0^2 x^2(4-x^2)^{5/2} \, dx.$$

Ratkaisu. Käytetään sijoitusta $x = g(t) = 2 \sin t$, jolloin $g(0) = 0$, $g(\pi/2) = 2$, $\sqrt{4-x^2} = 2 \cos t$ ja $dx = 2 \cos t \, dt$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} 2^8 \sin^2 t \cos^6 t \, dt && \sin^2 t = 1 - \cos^2 t \\ &= 256 \int_0^{\pi/2} (\cos^6 t - \cos^8 t) \, dt && \text{Esimerkki 0.3} \\ &= 256 \int_0^{\pi/2} (\sin^6 t - \sin^8 t) \, dt && \text{Esimerkki 0.1: } I_8 = (7/8)I_6 \\ &= 256 \left(1 - \frac{7}{8}\right) \int_0^{\pi/2} \sin^6 t \, dt && \text{Esimerkki 0.1} \\ &= 32 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi. \end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi integroitavaan funktioon liittyvien symmetrioiden käyttöä määrättyjen integraalien laskemisessa. Palautetaan mieleen, että koko reaalisuoralla määriteltyä funktiota f sanotaan parilliseksi, jos $f(-x) = f(x)$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Vastaavasti sanotaan, että funktio f on pariton, jos $f(-x) = -f(x)$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Useimmat funktiot eivät ole parillisia eivätkä parittomia. Tosin jokainen funktio voidaan esittää parillisen ja parittoman funktion summana seuraavasti:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

missä selvästi ensimmäinen yhteenlaskettava on parillinen ja jälkimmäinen pariton. Kahden parillisen funktion tulo on niin ikään parillinen, samoin kahden parittoman funktion. Parillisen ja parittoman funktion tulo sen sijaan on pariton, sillä jos $f(-x) = -f(x)$ ja $g(-x) = g(x)$, niin $(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -(fg)(x)$. Näitä merkisääntöjä yleistäen nähdään heti, että parittoman funktion f potenssi f^n on parillinen tai pariton sen mukaan, onko eksponentti $n \in \mathbf{N}$ parillinen vai pariton.

Jos integrandi on parillinen tai pariton, ja integroimisväli on symmetrinen origon suhteen, eli muotoa $[-a, a]$, niin integroimista voidaan tällöin yksinkertaistaa seuraavasti.

Lause 0.5. Oletetaan, että funktio f on integroitava välillä $[-a, a]$, $a > 0$. Jos f on parillinen, niin

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f.$$

Jos taas f on pariton, niin

$$\int_{-a}^a f = 0.$$

Todistus. Verrataan integraaleja yli osavälien $[-a, 0]$ ja $[0, a]$. Tekemällä sijoitus $t = -x$ saadaan

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 (-1)f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt.$$

Näin ollen

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx.$$

Väite seuraa tästä, sillä viimeisessä muodossa integrandina on $2f(x)$ tai 0 riippuen siitä, oliko kyseessä parillinen vai pariton tapaus. $\square$

Esimerkki 0.6.

$$\int_{-1}^1 (x^4 + x^3 + 7x + 1) dx = 2 \int_0^1 (x^4 + 1) dx = 2 \left| \frac{x^5}{5} + x \right|_0^1 = 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5},$$

sillä funktio $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ on pariton, kun n on pariton, ja parillinen, kun n on parillinen.

Esimerkki 0.7.

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x dx = 0,$$

sillä integrandi on selvästi pariton.

Esimerkki 0.8. Kaikilla luonnollisen luvun $k \in \mathbf{N}$ arvoilla

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k+1} x dx = 0 \quad \text{ja} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k} x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x dx.$$

Toinen integrandin symmetriaominaisuus, joka usein helpottaa integraalien laskemista on sen jaksollisuus. Sanotaan, että reaalfunktiolla f on jakso ω , tai että se on ω -jaksollinen, jos kaikilla muuttujan $x \in \mathbf{R}$ arvoilla

$$f(x) = f(x + \omega).$$

Nähdään helposti induktiolla muuttujan $|k|$ suhteen, että aina, kun $k \in \mathbf{Z}$, ja f on ω -jaksollinen, on voimassa $f(x + k\omega) = f(x)$.

Lause 0.9. Jos f on ω -jaksollinen integroitava funktio, niin $\forall k \in \mathbf{Z}$ ja kaikille $a, b \in \mathbf{R}$ on voimassa

$$\int_a^b f = \int_{a+k\omega}^{b+k\omega} f.$$

Todistus. Sijoitus $x = t - k\omega$ muuttaa vasemmanpuoleisen integraalin oikeanpuoleiseksi. $\square$

Trigonometriset funktiot ovat tietenkin tutuin esimerkki jaksollisista funktioista. Sinillä ja kosinilla on jakso 2π , ja niiden parillisilla potensseilla on jaksona π . Yleisemmin funktioilla $\sin ax$ ja $\cos ax$ on jaksona $2\pi/a$. Tässä $a > 0$ on jokin vakio.

Esimerkki 0.10.

$$\int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \sin^3 x \, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = 0,$$

missä viimeinen yhtälö seuraa integroimisvälin symmetrisyydestä ja integrandin parittomuudesta.

Seuraavassa esimerkissä tavallaan kombinoidaan parittomuus ja jaksollisuusargumentit.

Esimerkki 0.11. Jos $n = 2k + 1$ on pariton, niin osoita, että

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x \, dx = 0.$$

Ratkaisu. Sini- ja kosinifunktio molemmat toteuttavat yhtälön $f(x + \pi) = -f(x)$, ja näin ollen sama relaatio on voimassa myös silloin, kun funktiona f on jommankumman pariton potenssi. Tämän relaation toteuttavan funktion integraali jakson yli häviää, sillä

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx &= \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \, dx && \text{sijoitetaan jälkimmäiseen } x = t + \pi, \, dx = dt \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \int_0^{\pi} f(t + \pi) \, dt && \text{vaihdetaan muuttuja takaisin } x\text{:ksi} \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \int_0^{\pi} f(x + \pi) \, dx \\ &= \int_0^{\pi} (f(x) + f(x + \pi)) \, dx = 0, \end{aligned}$$

koska viimeisen integraalin integrandi häviää koko integroimisvälillä relaation $f(x + \pi) = -f(x)$ seurauksena.

Sinin ja kosinin parillisen potenssin tapauksessa voidaan puolestaan todeta, että väli $[0, \pi/2]$ on jo ‘edustava’ siinä mielessä että integraalit yli välin, jonka pituus on luvun $\pi/2$ kokonaislukumonikerta palautuvat tunnettuihin Esimerkkien 0.1 ja 0.3 tuloksiin.

Esimerkki 0.12. Olkoon $f(x)$ joko $\sin^{2k} x$ tai $\cos^{2k} x$, $k \in \mathbf{N}$. Selitä, miksi tällöin

$$\int_0^{\pi} f = 2 \int_0^{\pi/2} f \quad \text{ja} \quad \int_0^{2\pi} f = 4 \int_0^{\pi/2} f.$$

Ratkaisu. Koska funktiolla f on jaksona π , niin $\int_{\pi/2}^{\pi} f = \int_{-\pi/2}^0 f$. Näin ollen ensimmäinen yhtälö seuraa siitä, että kyseinen funktio on parillinen.

Jälkimmäinen yhtälö seuraa ensimmäisestä ja π -jaksollisuudesta, sillä $\int_{\pi}^{2\pi} f = \int_0^{\pi} f$.

Esimerkki 0.13. Laske määrätty integraali

$$\int_0^{2\pi} (1 + \cos x)^4 \, dx.$$

Ratkaisu. Binomikaavan ja kahden edellisen esimerkin ja Esimerkin 0.1 nojalla

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (1 + \cos x)^4 \, dx &= \int_0^{2\pi} (1 + 4 \cos x + 6 \cos^2 x + 4 \cos^3 x + \cos^4 x) \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + 6 \cos^2 x + \cos^4 x) \, dx \\ &= 4 \left(\int_0^{\pi/2} (1 + 6 \cos^2 x + \cos^4 x) \, dx \right) \\ &= 4 \left(\frac{\pi}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = 35\pi/4. \end{aligned}$$

Kun laskettavana on muotoa $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$ oleva integraali, voidaan sellainen palauttaa jo käsiteltyyn muotoon, jos jompikumpi luvuista m tai n on parillinen. Riittää käyttää kaavaa $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Esimerkki 0.14. Laske määrätty integraali

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x dx.$$

Ratkaisu. Tässä

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 = (1 - \sin^2 x)^2 \\ &= 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} (\sin^3 x - 2\sin^5 x + \sin^7 x) dx \\ &= \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{8}{15} + \frac{16}{35} = \frac{2}{35}. \end{aligned}$$

Paritonta eksponenttia voidaan hyödyntää samalla tavalla, kun muistetaan että etumerkkiä vaille sini ja kosini ovat toistensa derivaattoja, joten kaavan

$$\int f' f = \frac{1}{n+1} f^{n+1}$$

seurauksena

$$\int \cos x \sin^n x dx = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x$$

ja

$$\int \sin x \cos^n x dx = -\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x.$$

Esimerkki 0.15. Laske integraali

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^5 x dx.$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin x (1 - \cos^2) \cos^5 x dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (\sin x \cos^5 x - \sin x \cos^7 x) dx \\ &= \left|_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{8} \cos^8 x - \frac{1}{6} \cos^6 x \right) \right. \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$