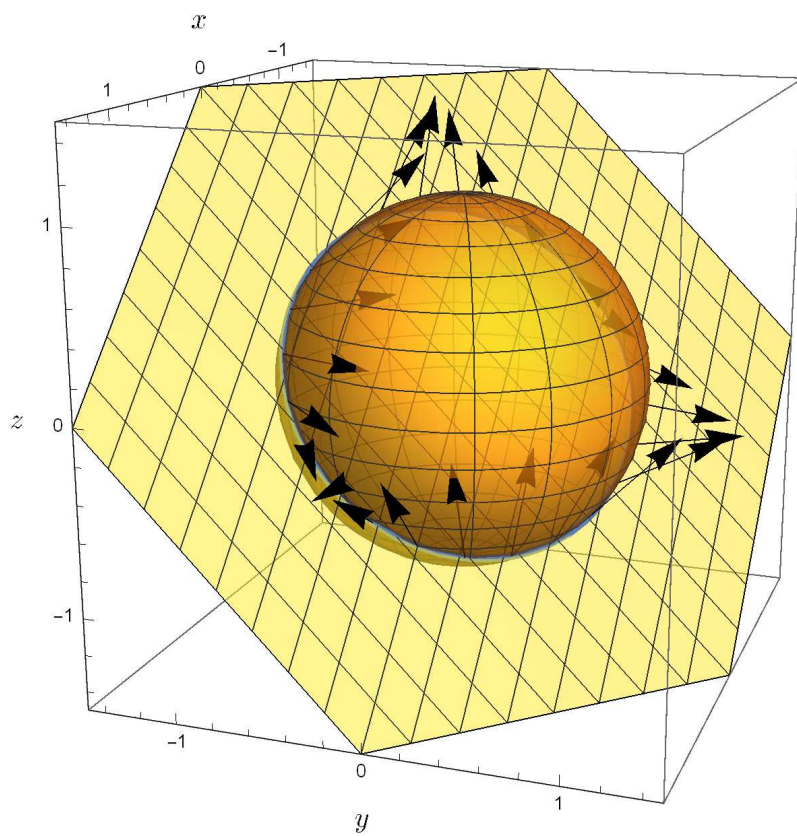


Vektorilaskenta

Jyrki Lahtonen



Turun yliopisto, elokuu 2020

Sisältö

1	Avaruus $\mathbb{R}^n$ ja jatkuvat funktiot	4
1.1	Avaruuden $\mathbb{R}^n$ metriikka	4
1.2	Avaruuden $\mathbb{R}^n$ topologian peruskäsitteitä	9
1.3	Vektorit ja funktiot	13
1.4	Jatkuvuus	15
1.5	Kompakteista joukoista	19
2	Usean muuttujan funktioiden differentiaalilaskentaa	21
2.1	Osittaisderivaatoista	21
2.2	Vektorimuuttujan funktion differentioituvuus	24
2.3	Gradientti ja suunnattu derivaatta	31
2.4	Vektoriarvoisen funktion differentioituvuus	36
2.5	Ketjusääntö	40
2.6	Korkeamman kertaluvun osittaisderivaatoista	42
3	Usean muuttujan funktion integraalilaskentaa	45
3.1	Moniulotteisen integraalin määritelmä	45
3.2	Iteroitu integraali	50
3.3	Integrointi yli yleisemmän alueen	58
3.3.1	Riemannin summista ja suureiden keskiarvoista	72
3.4	Sijoitus moniulotteiseen integraaliin	75
3.5	Integraalilla määritellyn funktion derivointi	91
4	Ääriarvot ja Implisiittifunktiolause	93
4.1	Lokaaleista ääriarvoista	93
4.2	Implisiittifunktiolauseesta	101
4.2.1	Implisiittifunktiolause tasossa	101
4.2.2	Implisiittifunktiolause korkeampiulotteisessa avaruudessa	106
4.3	Sidotuista ääriarvoista	120

5	Vektorikenttien käyräintegraaleista	126
5.1	Käyrästä	126
5.2	Käyrän pituus	131
5.3	Käyräintegraali	134
5.4	Greenin lause tasossa	138
5.5	Potentiaaleista	147
6	Vektorikenttien pintaintegraaleista	158
6.1	Parametrisoitu pinta ja pinta-alkio	158
6.2	Parametrisoidun pinnan ala	162
6.3	Vektorikentän pintaintegraali	166
6.4	Divergenssilause	173
6.5	Stokesin lause	177

Luku 1

Avaruus $\mathbb{R}^n$ ja jatkuvat funktiot

1.1 Avaruuden $\mathbb{R}^n$ metriikka

Jos n on jokin positiivinen kokonaisluku, niin avaruudella $\mathbb{R}^n$ tarkoitetaan reaalityyppisten muodostettujen n -tuplien eli vektorien joukkoa

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Tällä on vektoriavaruuden rakenne, eli voimme muodostaa kahden vektorin summan tai kertoa vektorin skalaarilla luonnolliseen tapaan komponenteittain.

Avaruudella $\mathbb{R}^n$ on *luonnollinen kanta*, jonka muodostavat vektorit $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Tällä kurssilla hyvin usein (etenkin kuviin tukeuduttaessa) $n = 2$ tai $n = 3$, jolloin käytössä ovat myös koulusta tutut merkinnät $\mathbf{i} = e_1$, $\mathbf{j} = e_2$ ja $\mathbf{k} = e_3$.

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on myös määritelty kahden vektorin välinen *sisätulo*. Jos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ovat jotkin kaksi vektoria, niin niiden välinen sisätulo $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ on kaavan

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

määrittää reaalityyppinen luku. Sisätulon asemesta puhutaan myös *pistetulosta* tai *skalaaritulosta*, ja kyseessä on lukiokursseilta tutun 2- ja 3-ulotteisen pistetulon n -ulotteinen yleistys. Sillä on seuraavat ominaisuudet:

- Kaikille vektoreille $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ on voimassa sääntö

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

- Kaikille vektoreille $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ja skalaareille $\lambda \in \mathbb{R}$ on voimassa sääntö

$$(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}).$$

- Kaikille vektoreille $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ on voimassa yhteenlaskusääntö

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Näihin laskusääntöihin viitataan lyhyesti sisätulon *bilinearisuutena*.

Sisätulon avulla saadaan avaruuteen $\mathbb{R}^n$ vektorin pituuden ja kahden pisteen välisen etäisyyden käsitteet.

Vektorin $\mathbf{x}$ *pituus* eli *normi* saadaan Pythagoraan lausetta n -ulotteisesti mukaillen kaavasta

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Helposti näemme, että normilla on seuraavat ominaisuudet:

- Kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on voimassa $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ (joten neliöjuuren ottaminen yllä oli mahdollista). Selvästi $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ vain, jos $\mathbf{x} = \mathbf{0} := (0, 0, \dots, 0)$ on nollavektori. Näin ollen $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, ja tässä on yhtäsuuruus sjsk. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

- Kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on voimassa

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|,$$

eli kerrottaessa vektori skalaarilla, sen pituus tulee kerrottua kyseisen skalaarin itseisarvolla.

Seuraavat sisätulon ja normin ominaisuudet esiintyvät usein.

Lause 1.1. Olkoot $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ mielivaltaisia vektoreita.

Tällöin on voimassa seuraavat epäyhtälöt

$$(i) |(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \text{ (Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö),}$$

$$(ii) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \text{ (kolmioepäyhtälö).}$$

Todistus. Todistetaan ensin Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö. Jos $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, niin väite-epäyhtälön molemmat puolet ovat $= 0$. Muussa tapauksessa sitten $\|\mathbf{y}\| > 0$. Olkoon $t = -(\mathbf{x}, \mathbf{y})/(\mathbf{y}, \mathbf{y})$. Tutkitaan vektoria $\mathbf{u} = \mathbf{x} + t\mathbf{y}$. Saamme epäyhtälön

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + t(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + t^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + t^2\|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2/\|\mathbf{y}\|^2 + (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2/\|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \frac{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{y}\|^2}. \end{aligned}$$

Väite seuraa siitä, että tässä on osoittajan oltava ei-negatiivinen.

Kolmioepäyhtälö puolestaan seuraa Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä seuraavan laskun kolmannella rivillä käyttäen:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2, \end{aligned}$$

ottamalla puolittain neliöjuuret. □

Näiden seurauksena saadaan muun muassa seuraavat arviot:

Seuraus 1.2. *Olkoon $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

(i) *Kaikille i on voimassa $|x_i| \leq \|\mathbf{x}\|$.*

(ii) $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \|\mathbf{x}\|$.

(iii) $\|\mathbf{x}\| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

(iv) $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön seurauksena voidaan myös määritellä vektorien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ välinen kulma, jos kumpikaan vektoreista ei ole nollavektori. Näemme nimittäin, että

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1,$$

joten on olemassa yksikäsitteinen sellainen kulma $\alpha \in [0, \pi]$, jolle

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \alpha.$$

Määritellään $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha$. Kun $n = 2$, tämä vastaa lukiotietojen perusteella tason vektorien välistä kulmaa. Yleisempi tilanne palautuu tähän, kun rajoitamme tarkastelun sopivaan tasoon joka sisältää kummatkin vektorit (jos $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat lineaarisesti riippumattomia, niin kyseinen taso määräytyy yksikäsitteisesti niiden virittämäksi aliavaruudeksi).

Korkeampiulotteisissa avaruuksissa geometrinen intuitio kahden vektorin välisestä kulmasta on ymmärrettävästi hieman alikehittynyt, sen yleisempi käyttö onkin harvinaisempaa. Tärkeän poikkeuksen muodostaa vektorien kohtisuoruuden käsite. Näemme nimittäin heti, että tässä $\alpha = \pi/2$ silloin ja vain silloin, kun $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Tästä usein esiintyvistä tilanteista käytämme merkintää $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

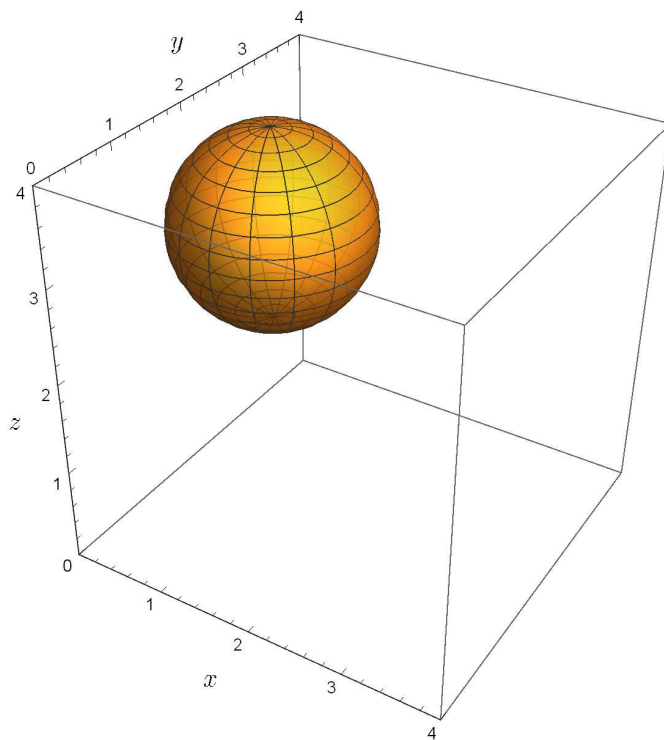
Käytämme samaa vektorimerkintää $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ myös avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteen $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ identifioimiseen. Tällöin on luonnollista määritellä pisteiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ väliseksi *etäisyydeksi* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ niide ero-
tusvektorin pituus

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Tällä etäisyysfunktioilla on seuraavat ominaisuudet:

(i) Kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ on voimassa $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ja $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ silloin ja vain silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(ii) Kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ on voimassa $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.



Kuva 1.1: Pisteestä $(1, 2, 3)$ etäisyydellä 1 olevien pisteiden muodostama pallopinta

(iii) Kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ on voimassa *kolmioepäyhtälö* (todistus harjoitustehtävänä)

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

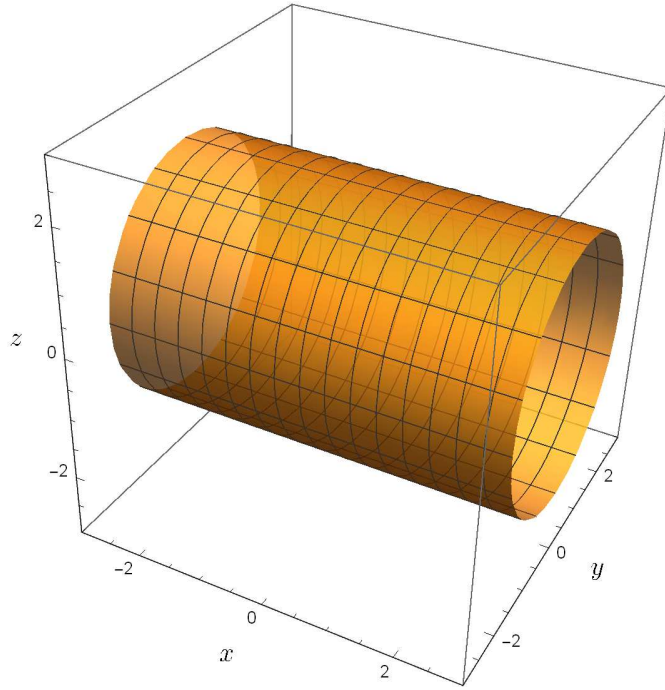
Myöhemmillä kursseilla (*Metriset avaruudet*, *Topologian perusteet*) nämä ominaisuudet määrittelevät ns. *metriikan*.

Esimerkki 1.3. Tämän kurssin materiaalissa on paljon 2- tai 3-ulotteisia olioita esittäviä kuvia. Ne on piirretty Mathematica-ohjelmistolla. Sen 3-ulotteiset kuvat ovat ehkä hieman odotuksista poikkeavia sikäli, että tyypillisesti kuvat on piirretty laatikon sisään, ja pisteiden koordinaattien arvot ovat luettavissa laatikon *särmille* piirretyiltä asteikoilta. Nämä "akselit" eivät tällöin kulje totutusti origon kautta. Kuvan 1.1 pallon keskipiste on siis $P_0 = (1, 2, 3)$, ja sen säde on yksi. Sen piste $P = (x, y, z)$ toteuttaa siis yhtälön $d(P, P_0) = 1$, mikä voidaan koordinaattien avulla kirjoittaa muodossa

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1.$$

Vastaavasti Kuvassa 1.2 on niiden pisteiden joukko, joiden (kohtisuoraan mitattu) etäisyys x -akselista on 2. Pistettä (x, y, z) lähimpänä oleva x -akselin piste on tietenkin $(x, 0, 0)$, joten kyseinen etäisyys on siis $\sqrt{y^2 + z^2}$, ja saadun putken pisteet ovat tarkalleen yhtälön

$$y^2 + z^2 = 2^2 = 4$$



Kuva 1.2: x -akselista etäisyydellä 2 olevien pisteiden muodostama lieriöpinta

ratkaisut.

Palauta mieleen myös *lineaarikuvausten* käsite kurssilta *Lineaarialgebra*. Jos $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus, niin sitä esittää yksikäsitteinen matriisi M , eli se $m \times n$, jolle

$$T(\mathbf{x}) = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

missä $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ on mielivaltainen vektori. Muutamissa kohdissa kurssia tarvitsemme seuraavaa tulosta, joka kertoo, ettei vektorin pituus lineaarikuvauksessa voi kasvaa mielivaltaisesti.

Lause 1.4. Oletetaan, että $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus, ja $M = (a_{ij})_{m \times n}$ sen matriisi (luonnollisten kantojen suhteen). On olemassa sellainen vakio $N > 0$, että $\|T(\mathbf{x})\| \leq N \cdot \|\mathbf{x}\|$ kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

Todistus. Merkitään $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) = T(\mathbf{x})$. Tällöin Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$|y_i| = |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n| = |((a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \mathbf{x})| \leq \|\mathbf{x}\| \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Tästä seuraa, että

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \sum_{i=1}^m y_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \|\mathbf{x}\|^2.$$

Näin ollen väite seuraa, kun asetamme

$$N = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

□

1.2 Avaruuden $\mathbb{R}^n$ topologian peruskäsitteitä

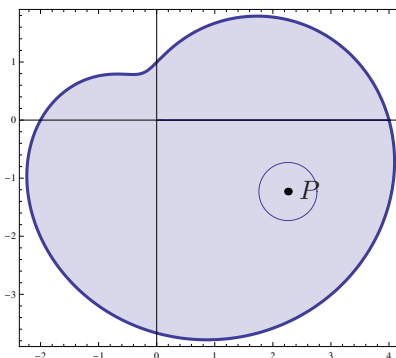
Topologia on matematiikan haara, jossa tutkitaan esim. mitkä kappaleiden ominaisuudet säilyvät tehtäessä niihin ‘jatkuvia muutoksia’ sekä erimuotoisten kappaleiden luokittelua. Tällä kurssilla tarvitsemme muutamien topologisen peruskäsitteen, lähinnä tulosten muotoilemiseen ja niiden muistamisen helpottamiseksi. Käydään ne kursorisesti läpi seuraavaksi. Tarkemmin niihin perehdytään kursseilla *Topologian perusteet* ja *Lebesguen mitta ja integraali*.

Määritelmä 1.5. (i) Jos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$, niin joukkoa

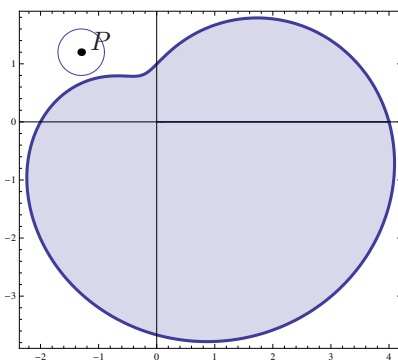
$$B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\}$$

kutsutaan pisteen $\mathbf{x}$ (avoimeksi) r -säteiseksi palloympäristöksi.

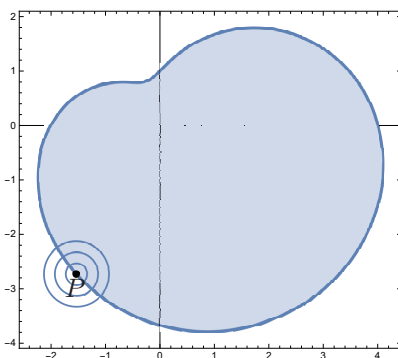
- (ii) Piste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *sisäpiste*, jos on olemassa sellainen luku $r > 0$, jolle $B(\mathbf{x}, r) \subseteq A$.
- (iii) Piste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ulkopiste*, jos se on joukon $\mathbb{R}^n \setminus A$ sisäpiste. Yhtäpitävästi: on olemassa sellainen luku $r > 0$, jolle $B(\mathbf{x}, r) \cap A = \emptyset$.
- (iv) Piste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *reunapiste*, jos se ei ole joukon A sisäpiste eikä ulkopiste. Yhtäpitävästi tällöin kaikilla $r > 0$ leikkaukset $B(\mathbf{x}, r) \cap A$ ja $B(\mathbf{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$ ovat molemmat epätyhjiä.
- (v) Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on *avoin*, jos sen jokainen piste $\mathbf{x} \in A$ on sen sisäpiste.
- (vi) Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on *suljettu*, jos sen komplementti $\mathbb{R}^n \setminus A$ on avoin.



Kuva 1.3: Kun pisteen P jokin ympäristö sisältyy kokonaisuudessaan joukkoon A , niin P on A :n sisäpiste



Kuva 1.4: Kun pisteen P jokin ympäristö on kokonaisuudessaan joukon A ulkopuolella, niin P on A :n ulkopiste



Kuva 1.5: Kun pisteen P jokainen ympäristö sisältää pisteitä joukosta A ja sen ulkopuolelta, niin P on A :n reunapiste

Huomautus 1.6. Kysymys siitä, onko annettu piste $\mathbf{x}$ annetun joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sisä-, ulko-, vai reunapiste voidaan selvittää seuraavasti. Jos löytyy jokin sellainen luku $r > 0$, että palloympäristö $B(\mathbf{x}, r)$ on kokonaisuudessaan joukossa A , niin $\mathbf{x}$ on sisäpiste. Jos taas löytyy jokin sellainen luku $r > 0$, että palloympäristö $B(\mathbf{x}, r)$ on kokonaisuudessaan joukon A ulkopuolella (eli ei lainkaan leikkaa sen kanssa), niin $\mathbf{x}$ on A :n ulkopiste. Jos kumpikaan näistä ehdoista ei toteudu millään luvun $r > 0$ valinnalla, niin $\mathbf{x}$ on A :n reunapiste. Tällöin jokainen palloista $B(\mathbf{x}, r)$ sisältää sekä joukon A pisteitä että siihen kuulumattomia pisteitä.

Nämä kolme vaihtoehtoa ovat toisensa poissulkevia, eli jokainen piste $\mathbf{x}$ on joko joukon A sisäpiste, reunapiste tai ulkopiste.

Joukon A sisäpisteiden joukosta käytetään merkintää A° . Joukon A reunapisteiden joukosta eli joukon A reunasta käytetään merkintää ∂A .

Esimerkki 1.7. Olkoon A tason neliö $[0, 2] \times [0, 2] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [0, 2]\}$. Selitä, miksi $P = (1, 1)$ on A :n sisäpiste, $Q = (-1, -1)$ ulkopiste, ja $R = (0, 0)$ reunapiste.

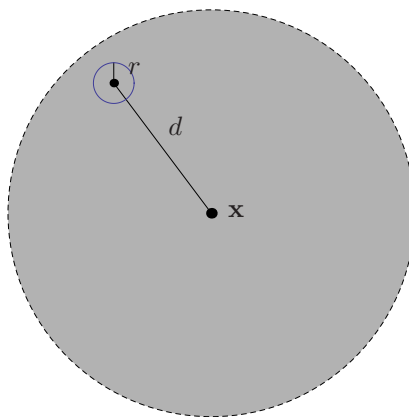
Ratkaisu. Muista, että joukko U osoitetaan toisen joukon V osajoukoksi tarkistamalla, että mielivaltainen joukon U alkio on myös joukon V alkio.

Pallo $B(P, 1/2)$ on kokonaisuudessaan neliössä A . Jos nimittäin (x, y) on etäisyydellä $< 1/2$ pisteestä P , niin tällöin $|x - 1| < 1/2$ ja $|y - 1| < 1/2$. Näin ollen x ja y ovat molemmat välillä $(1/2, 3/2)$, joten $(x, y) \in A$. Koska tässä (x, y) oli pallon $B(P, 1/2)$ mielivaltainen piste, niin olemme perustelleet, miksi $B(P, 1/2) \subseteq A$. Tässä pallon säde $r = 1/2 > 0$, joten P täyttää sisäpisteen vaatimukset.

Pallo $B(Q, 1/2)$ puolestaan on kokonaan neliön A ulkopuolella. Jos (x, y) on etäisyydellä $< 1/2$ pisteestä Q , niin x ja y ovat molemmat negatiivisia. Näin ollen $(x, y) \notin A$. Tästä seuraa, että $B(Q, 1/2) \cap A = \emptyset$, ja Q täyttää ulkopisteen vaatimukset.

Sitä vastoin, olipa $r > 0$ kuinka pieni tahansa, niin pisteet $\mathbf{x}_1 = (r/2, r/2)$ ja $\mathbf{x}_2 = (-r/2, -r/2)$ kumpikin ovat etäisyydellä $\sqrt{(r/2)^2 + (r/2)^2} < r$ origosta R . Näistä $\mathbf{x}_1 \in A$ ja $\mathbf{x}_2 \notin A$. Näin ollen pallossa $B(R, r)$ on sekä A :han kuuluvia, että A :han kuulumattomia pisteitä valittiinpa r miten tahansa. Tästä syystä R on neliön A reunapiste.

Esimerkki 1.8. Olkoot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $R > 0$ mielivaltaisia. Osoitetaan, että avoin pallo $B(\mathbf{x}, R) \in \mathbb{R}^n$ on avoin joukko.



Kuva 1.6: Jos piste on etäisyydellä $d < R$ pallon keskipisteestä, niin sen $r = (R - d)/2$ -säteinen ympäristö sisältyy palloon

Ratkaisu. Tehtävänä on osoittaa, että jokaista joukon $B(\mathbf{x}, R)$ pistettä P kohti löytyy $r > 0$, jolle $B(P, r) \subseteq B(\mathbf{x}, R)$. Kiinnitetään mielivaltainen piste $P \in B(\mathbf{x}, R)$. Tällöin $d(P, \mathbf{x}) = d < R$. Sen seurauksena luku $r = (R - d)/2 > 0$. Kuvan 1.6 perusteella on ilmeistä, että $B(P, r) \subseteq B(\mathbf{x}, R)$. Tarkempi perustelu saadaan kolmioepäyhtälöstä. Jos $\mathbf{y} \in B(P, r)$ on mielivaltainen, niin tällöin $d(\mathbf{y}, P) < r$. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, P) + d(P, \mathbf{y}) \leq d + r = \frac{2d + (R - d)}{2} = \frac{R + d}{2}.$$

Koska $d < R$, niin tässä $(R + d)/2 < R$. Näin ollen $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, R)$. Koska $\mathbf{y}$ oli pienemmän pallon $B(P, r)$ mielivaltainen piste, niin olemme osoittaneet, että $B(P, r) \subseteq B(\mathbf{x}, R)$.

Lemma 1.9. Avoimien joukkojen leikkauksille ja unioneille on voimassa seuraavat säännöt.

(i) Jos joukot $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ovat molemmat avoimia, niin niiden leikkaus $U \cap V$ on sekin avoin.

(ii) Jos $\mathcal{I}$ on jokin indeksijoukko, ja $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin joukko kaikille $i \in \mathcal{I}$, niin unioni $U := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$ on sekin avoin.

Todistus. Ensimmäisen väitteen todistamiseksi tarkastellaan leikkausjoukon $U \cap V$ mielivaltaista pistettä $\mathbf{x}$. Koska $\mathbf{x} \in U$ ja U on avoin, on olemassa sellainen luku $r_1 > 0$, että $B(\mathbf{x}, r_1) \subseteq U$. Koska myös $\mathbf{x} \in V$ ja V on avoin, on olemassa sellainen luku $r_2 > 0$, että $B(\mathbf{x}, r_2) \subseteq V$. Olkoon r pienempi luvuista r_1 ja r_2 . Tällöin $B(\mathbf{x}, r) \subseteq B(\mathbf{x}, r_1) \subseteq U$ ja $B(\mathbf{x}, r) \subseteq B(\mathbf{x}, r_2) \subseteq V$. Näin ollen $B(\mathbf{x}, r) \subseteq U \cap V$, ja $\mathbf{x}$ on siis joukon $U \cap V$ sisäpiste. Koska $\mathbf{x}$ oli joukon $U \cap V$ mielivaltainen piste, on leikkausjoukko nähty avoimeksi.

Jälkimmäinen väite on helpompi. Jos $\mathbf{x} \in U$ on mielivaltainen, niin löytyy indeksi i jolle $\mathbf{x} \in U_i$. Koska U_i on avoin, niin on olemassa $r > 0$, jolle $B(\mathbf{x}, r) \subseteq U_i$. Koska $U_i \subseteq U$, niin $B(\mathbf{x}, r) \subseteq U$. Näin ollen $\mathbf{x}$ on unionin U sisäpiste. Koska $\mathbf{x} \in U$ oli mielivaltainen, on U avoin. $\square$

Huomautus 1.10. Esimerkiksi induktiolla nähdään (harjoitustehtävä), että *äärellisen monen* avoimen joukon leikkaus on avoin. Äsken näimme, että mielivaltaisen monen (=äärellisen monen, numeroituvasti äärettömän monen, ylinumeroituvan ...) avoimen joukon unioni on avoin. Sitä vastoin *äärttömän monen* avoimen joukon leikkaus ei välttämättä ole avoin. Harjoitustehtävänä voit osoittaa, että $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(\mathbf{0}, 1/n) = \{\mathbf{0}\}$, ja että tämä joukko ei ole avoin.

Esimerkki 1.11. Osoitetaan, että n -ulotteisen avaruuden pallokuori (ns. *yksikköpallo* S^{n-1})

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

on suljettu.

Ratkaisu. Tehtävänä on osoittaa, että komplementtijoukko $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \neq 1\}$ on avoin. Olkoon $R = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$. Jos $R < 1$, niin kuten Esimerkissä 1.8, näemme, että joukko $B(\mathbf{x}, (1-R)/2)$ sisältyy palloon $B(\mathbf{0}, 1)$, eikä näin leikkaa pallopintaa S^{n-1} . Jos taas $R > 1$, niin tällöin $r = (R-1)/2 > 0$ toimii, koska jokainen piste $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$ toteuttaa epäyhtälön $\|\mathbf{y}\| > 1$. Jos nimittäin olisikin $d(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \leq 1$, niin kolmioepäyhtälön nojalla

$$R = d(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{0}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) < 1 + r = \frac{2 + (R-1)}{2} = \frac{1+R}{2}.$$

Koska $R > 1$, tämä on ristiriita.

Lemma 1.12. Suljettujen joukkojen leikkauksille ja unioneille on voimassa seuraavat säännöt.

(i) Jos joukot $F_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $F_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ ovat molemmat suljettuja, niin niiden unioni $F_1 \cup F_2$ on sekin suljettu.

(ii) Jos $\mathcal{I}$ on jokin indeksijoukko, ja $F_i \subseteq \mathbb{R}^n$ on suljettu joukko kaikille $i \in \mathcal{I}$, niin leikkaus $F := \bigcap_{i \in \mathcal{I}} F_i$ on sekin suljettu.

Todistus. Seuraa de Morganin kaavoista $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ ja $\bigcup_i A_i^c = (\bigcap_i A_i)^c$. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Huomautus 1.13. Suhteellisen helposti nähdään, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko on suljettu, jos kaikki sen reunapisteet kuuluvat siihen. Vastaavasti joukko on avoin, jos se ei sisällä ainuttakaan reunapisteistään. Käytännössä joukot usein kuvaillaan niiden reunan avulla, joten tämä on hyvin käyttökelpoinen havainto.

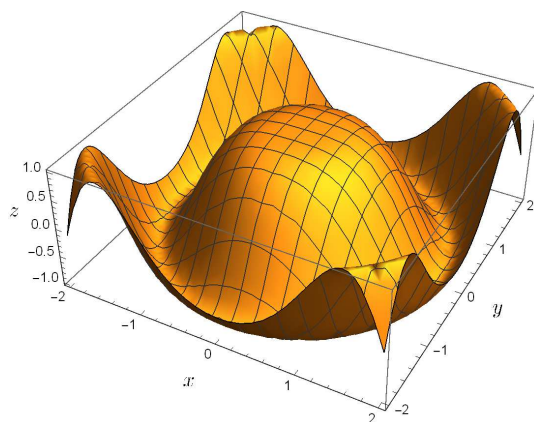
1.3 Vektorit ja funktiot

Kurssilla käsitellään paljon *vektorimuuttujan funktioita* eli *usean muuttujan funktioita*. Nämä ovat funktioita $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, missä $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on funktion f lähtöjoukko. Kun kirjoitetaan $f(\mathbf{x})$, missä $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ niin on luontevaa puhua vektorimuuttujan funktiosta. Käytettäessä merkintää $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on usein luontevampaa ajatella muuttujia $x_1, x_2, \dots, x_n$ riippumattomina muuttujina, ja puhua usean muuttujan funktiosta. Puhetavan valinta riippuu asiayhteydestä.

Esimerkki 1.14. Ideaalikaasulaki sanoo, että jos ainemäärä n kaasua on lämpötilassa T ja vaatii tilavuuden V , niin sen paine p saadaan kaavasta

$$p = \frac{nRT}{V},$$

missä R on ns. kaasuvakio. Voimme tässä ajatella, että $p = p(n, V, T)$ on kolmen muuttujan, n, V, T , funktio, joka on määritelty ehdoilla $n > 0, V > 0, T > 0$, tai vaihtoehtoisesti voimme ajatella sitä vektorin $\mathbf{x} = (n, V, T) \in \mathbb{R}^3$ funktiona. Koska ainemäärä, tilavuus ja lämpötila ovat luonteiltaan täysin erilaisia suureita, tässä yhteydessä niiden niputtaminen yhdeksi vektorimuuttujaksi tuntuu keinotekoiselta, vaikka mitään matemaattista estettä ei vektorimuuttujan $\mathbf{x}$ käytölle ole. Siirtyminen yhdestä merkintätavasta toiseen on suoraviivaista, joten käytämme aina kuhunkin tilanteeseen sopivaa merkintää ja puhetapaa.



Kuva 1.7: Kaavan $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ määrittelemän funktion $f : [-2, 2] \times [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaaja

Kun $n = 1$ (kurssien Analyysi I–II tilanne), niin usein hyödynsimme funktion *kuvaajaa*, eli joukkoa

$$C_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}.$$

Kun $n > 1$, niin kuvaajan käyttäminen on vähemmän havainnollista paperin 2-ulotteisuuden vuoksi. Kun $n = 2$ voimme edelleen yrittää hahmotella kuvaajaa

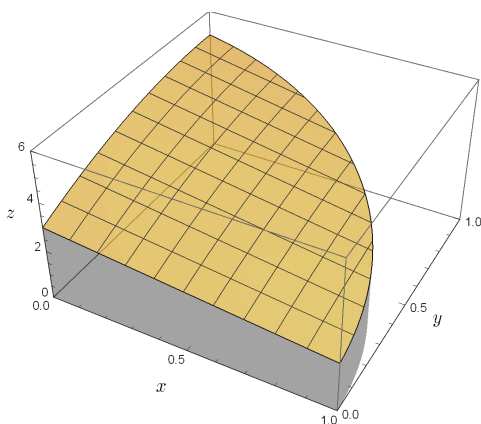
$$C_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A\}$$

3-ulotteisessa avaruudessa vaikka sen projisoiminen paperille, liitutaululle tai näytölle antaakin vähemmän täydellisen kuvan.

Niinpä Kuvassa 1.7 asteikkoja lukemalla nähdään, että laatikon pohja on tasolla $z = -1$, kansi tasolla $z = 1$, oikealla edessä alanurkassa on piste $(x, y, z) = (2, -2, -1)$ jne. Jos lähtöjoukko A ei ole suorakaide, niin pyrin lisäämään kuvaan muita elementtejä kuten reuna-alueiden läpinäkyviä varjostuksia, jotka toivottavasti helpottavat hahmottamista. Kuvassa 1.8 on lähtöjoukkona

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

yksikköympyrän ensimmäisessä neljänneksessä rajaama alue.



Kuva 1.8: Erään kahden muuttujan polynomin kuvaaja neljännesympyrässä

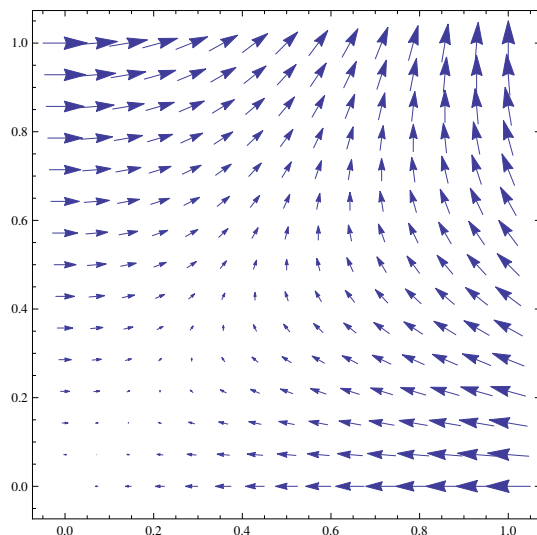
Kun lähtöjoukko on n -ulotteisen avaruuden osajoukko, $n \geq 3$, niin kuvaaja on väistämättä vähintään 4-ulotteinen, ja sen piirtäminen havainnollisesti on liian vaikeaa.

Tällä kurssilla käsitellään myös vektoriarvoisia funktioita $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m, m > 1, A \subseteq \mathbb{R}^n$. Tällöin funktion kuvatkin ovat vektoreita. Usein ne esitetään komponenteittain

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})),$$

missä $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$. Näidenkin kuvaajien piirtäminen on mahdotonta, koska tällöin yleensä $m + n \geq 4$. Jos $n = m$ on 2 (tai 3), voidaan funktiota yrittää hahmotella valitsemalla joukko lähtöjoukon

pisteitä $P_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, N$, ja piirtää kuvaan nuolia siten, että pisteestä P_i alkava nuoli kertoo jotakin funktion arvona saatavasta vektorista $f(P_i) \in \mathbb{R}^2$. Käyttämäni piirto-ohjelma piirtää vektorien $f(P_i)$ suunnat oikein, mutta skaalaa niiden pituudet jollakin logiikalla valitulla kertoimella. Yleensä ko. kerroin on < 1 , jotta nuolista ei tulisi liian pitkiä jolloin nuolen $f(P_i)$ yhteys alkupisteeseen P_i hämärtyisi. Kuvat ovat hyvin samanlaisia kuin ne, joilla (lukion) fysiikan kursseilla hahmoteltiin voimakenttiä. Usein puhutaankin vektorikentästä f .



Kuva 1.9: Vektorikenttä $f = (y - x, xy)$ joukossa $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$

Kuvassa 1.9 on esitetty kenttä $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (y - x, xy)$ tällä tavoin. Tässä siis $f(0, 0) = (0, 0)$ ja kuvassa onkin pisteestä $(0, 0)$ piirretty alkamaan nollavektori. Sitä vastoin pisteestä $(1, 1)$ alkava vektori on selvästi lyhyempi kuin $f(1, 1) = (0, 1)$. Huomaat kuitenkin, että pisteestä $(1, 1)$ alkava nuoli on pystysuora kuten myös $f(1, 1)$. Tekemällä lisää vastaavia laskuja lähtöjoukon $A = [0, 1] \times [0, 1]$ eri pisteissä huomaat, että suunta on aina oikein, ja nuolien pituuksien *suhteet* ovat kuvassa oikein.

1.4 Jatkuvuus

Funktion jatkuvuus pisteessä määritellään melkein analogisesti kurssin Analyysi I määritelmän kanssa. Tutut ε - ja δ -välit korvataan palloympäristöillä. Lisäksi otamme huomioon lähtöjoukon.

Määritelmä 1.15. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathbf{x} \in A$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Sanotaan, että f on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen $\delta > 0$, että $f(\mathbf{y}) \in B(f(\mathbf{x}), \varepsilon)$ aina, kun $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap A$. Sanotaan, että funktio f on jatkuva, jos se on jatkuva kaikissa pisteissä $\mathbf{x} \in A$.

Esimerkki 1.16. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 2x + y^2$ on jatkuva pisteessä $P = (2, 1)$.

Ratkaisu. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Olkoon (x, y) jokin $(P$:tä lähellä oleva) piste. Selvästi $f(P) = 5$, joten haluamme verrata lukuja $f(x, y)$ ja 5.

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 5| &= |2x + y^2 - 5| \\ &= |(2x - 4) + (y^2 - 1)| \leq |2x - 4| + |y^2 - 1| \\ &= 2|x - 2| + |y + 1| \cdot |y - 1|. \end{aligned}$$

Normaalit arviointitekniikat toimivat tässä. Koska $d((x, y), P) = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$, niin $|x - 2| \leq d((x, y), P)$ ja $|y - 1| \leq d((x, y), P)$. Jos oletamme, että $|y - 1| < 1$, niin tällöin $|y + 1| = |(y - 1) + 2| < 3$. Laskumme osoittaa, että jos $|x - 2| < \varepsilon/4$ ja $|y - 1| < \varepsilon/6$, niin sekä $2|x - 2| < \varepsilon/2$ että $3|y - 1| < \varepsilon/2$. Valinta $\delta = \min\{1, \varepsilon/6\}$ takaa sen, että kaikki vaaditut epäyhtälöt ovat tosia, kun $d((x, y), (2, 1)) < \delta$.

Seuraavaksi palautetaan vektoriarvoisen funktion jatkuvuus komponenttifunktioiden jatkuvuuteen.

Lause 1.17. *Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Vektoriarvoinen funktio $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva, jos ja vain jos jokainen komponenttifunktio $f_1, f_2, \dots, f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva.*

Todistus. Oletetaan ensin, että f on jatkuva, ja osoitetaan, että tällöin komponenttifunktiot f_i ovat välttämättä nekin jatkuvia. Kaikille indekseille $i = 1, 2, \dots, m$ ja pisteille $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ saadaan joko suoraan määritelmistä tai Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöstä arvio

$$|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{y})| = |(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}), e_i)| \leq \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \cdot \|e_i\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|.$$

Jos siis $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$ aina, kun $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \Leftrightarrow \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta)$, niin samoin edellytyksin myös $|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{y})| < \varepsilon$. Näin ollen f_i on jatkuva.

Oletetaan sitten, että funktiot $f_i, i = 1, 2, \dots, m$, ovat kaikki jatkuvia, ja että $\mathbf{x} \in A$ ja $\varepsilon > 0$ ovat mielivaltaisia. Funktion f_i jatkuvuuden perusteella löytyy vakio $\delta_i > 0$, jolle

$$|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{y})| < \varepsilon/m \quad \text{aina, kun } \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta_i). \quad (*)$$

Valitaan sitten $\delta = \min_{i=1,2,\dots,n} \delta_i$. Tällöin $\delta > 0$ ja kaikkien epäyhtälöjen $(*)$ ehdot toteutuvat kun $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta)$. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq \sum_{i=1}^m |f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{y})| < m \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$$

aina, kun $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. Väite seuraa. □

Kahden jatkuvan funktion yhdistettynä funktiona muodostettu funktio nähdään jatkuvaksi kuten Analyysi I:n tilanteessakin.

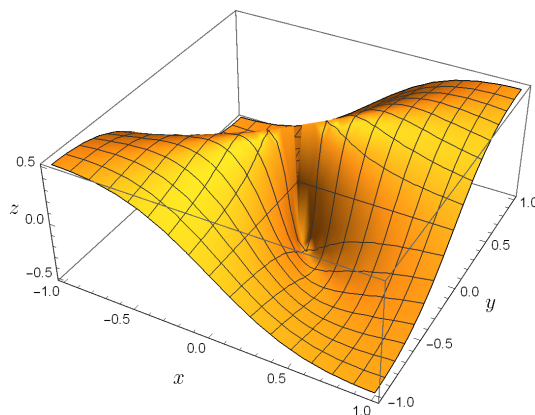
Lause 1.18. *Olkoot $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Oletetaan, että funktiot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ ovat jatkuvia. Tällöin yhdistetty funktio $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ on sekin jatkuva.*

Todistus. Olkoot $\mathbf{x} \in A$ ja $\varepsilon > 0$ mielivaltaisia. Merkitään $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in B$ ja $\mathbf{z} = g(\mathbf{y}) = (g \circ f)(\mathbf{x})$. Koska g on jatkuva pisteessä $\mathbf{y}$, löytyy sellainen $\delta_1 > 0$ jolle $g(\mathbf{y}') \in B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ aina, kun $\mathbf{y}' \in B(\mathbf{y}, \delta_1)$. Koska f on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}$ löytyy sellainen $\delta_2 > 0$, että $f(\mathbf{x}') \in B(\mathbf{y}, \delta_1)$ aina, kun $\mathbf{x}' \in B(\mathbf{x}, \delta_2) \cap A$. Koska $f : A \rightarrow B$, niin myös $f(\mathbf{x}') \in B$ aina, kun $\mathbf{x}' \in B(\mathbf{x}, \delta_2) \cap A$. Yhdistelemällä kaikki nämä havainnot voimme päätellä, että $(g \circ f)(\mathbf{x}') \in B(\mathbf{z}, \varepsilon)$ aina, kun $\mathbf{x}' \in A \cap B(\mathbf{x}, \delta_2)$. Yhdistetyn funktion jatkuvuus pisteessä $\mathbf{x}$ on näin perusteltu, ja väite seuraa. $\square$

Kuten kurssilla Analyysi I nähdään, että jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden summa, erotus, tulo ja osamäärä ovat jatkuvia (kunhan vältetään nollalla jakamista). Samoin muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_n$ trigonometriset funktiot, logaritmfunktiot, näiden käänteisfunktiot ja ylipäätään kaikki alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan.

Yhden reaaliuuttujan funktion jatkuvuutta tarkastettiin joskus tutkimalla toispuoleisia raja-arvoja. Tässä suhteessa useamman muuttujan funktiot ovat mutkikkaampia. Voimme nimittäin vasemmalta/oikealta vaihtoehtojen lisäksi korkeampiulotteisessa avaruudessa lähestyä pistettä äärettömän monesta eri suunnasta. Seuraava esimerkki valaiskoon tätä ilmiötä (törmäämme samaan ilmiöön ääriarvoja pohtiessamme).

Esimerkki 1.19. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ saa kaikki arvot väliltä $[-1/2, 1/2]$ kaikissa origon puhkaistuissa ympäristöissä $B((0, 0), r) \setminus \{(0, 0)\}$.



Kuva 1.10: Funktio $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ käyttäytyy oudosti origon lähellä

Ratkaisu. Käyttämällä napakoordinaatteja $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$ nähdään

$$f(r \cos \phi, r \sin \phi) = \frac{r^2 \cos \phi \sin \phi}{r^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} = \cos \phi \sin \phi = \frac{1}{2} \sin 2\phi.$$

Nähdään, että funktio saa siis vakioarvon $\frac{1}{2} \sin 2\phi_0$ säteellä $\phi = \phi_0$. Sinifunktion ominaisuuksien perusteella tässä kaikki luvut välillä $[-1/2, 1/2]$ esiintyvät. Kuvasta 1.10 näet, että piirto-ohjelmalla on epäjatkuvuuden vuoksi vaikeuksia origon lähistöllä.

Karakterisoidaan vielä jatkuvuus avoimien joukkojen avulla. Topologian kurssilla tämä otetaan jatkuvuuden määritelmäksi.

Lause 1.20. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ jatkuva funktio. Tällöin jokaista avointa joukkoa $U \subseteq \mathbb{R}^m$ kohti on olemassa sellainen avoin joukko $V \subseteq \mathbb{R}^n$, että alkukuva*

$$f^{-1}(U) = \{\mathbf{x} \in A \mid f(\mathbf{x}) \in U\} = A \cap V.$$

Erityisesti jos A on itse avoin, niin $f^{-1}(U)$ on avoin — avoimen joukon alkukuva jatkuvassa kuvauksessa on avoin.

Todistus. Olkoon $\mathbf{x} \in f^{-1}(U)$ mielivaltainen. Tällöin $f(\mathbf{x}) \in U$. Koska U on avoin, on olemassa luku $r_{\mathbf{x}} > 0$, jolle $B(f(\mathbf{x}), r_{\mathbf{x}}) \subseteq U$. Koska f on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}$, löytyy sellainen $\delta_{\mathbf{x}} > 0$, että $f(\mathbf{x}') \in B(f(\mathbf{x}), r_{\mathbf{x}})$ aina, kun $\mathbf{x}' \in B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}) \cap A$. Erityisesti siis $B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}) \cap A \subseteq f^{-1}(U)$.

Asetetaan

$$V = \bigcup_{\mathbf{x} \in f^{-1}(U)} B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}).$$

Jokainen palloista $B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}})$ on avoin Esimerkin 1.8 nojalla. Näin ollen joukko V on avoin Lauseen 1.9 nojalla. Koska $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}})$, niin jokainen joukon $f^{-1}(U)$ piste kuuluu joukkoon V . Kääntäen, jos $\mathbf{x}' \in V \cap A$, niin $\mathbf{x}' \in A \cap B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}})$ jollekin $\mathbf{x} \in f^{-1}(U)$. Tällöin luvun $\delta_{\mathbf{x}}$ valinnan nojalla $f(\mathbf{x}') \in B(f(\mathbf{x}), r_{\mathbf{x}}) \subseteq U$. Näin ollen $\mathbf{x}' \in f^{-1}(U)$. $\square$

Lause 1.21. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ jatkuva funktio. Tällöin jokaista suljettua joukkoa $C \subseteq \mathbb{R}^m$ kohti on olemassa sellainen suljettu joukko $D \subseteq \mathbb{R}^n$, että alkukuva*

$$f^{-1}(C) = \{\mathbf{x} \in A \mid f(\mathbf{x}) \in C\} = A \cap D.$$

Erityisesti jos A on itse suljettu, niin $f^{-1}(C)$ on suljettu — suljetun joukon alkukuva jatkuvassa kuvauksessa on suljettu.

Todistus. Sovelletaan Lausetta 1.20 funktioon f ja joukon C komplementtiin $U = \mathbb{R}^m \setminus C$, joka on avoin. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Esimerkki 1.22. Olkoot $a < b$ ja $c < d$ reaalityyppisiä lukuja. Osoitetaan, että laatikko

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

on suljettu.

Ratkaisu. Helposti nähdään, että kaavojen $p_1(x, y) = x$ ja $p_2(x, y) = y$ määrittelemät funktiot $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ja $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvia. Edelleen välit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ja $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ ovat suljettuja. Lauseen 1.21 nojalla joukot

$$C_1 := p_1^{-1}([a, b]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b\}$$

ja

$$C_2 := p_2^{-1}([c, d]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d\}$$

ovat suljettuja. Tutkittava laatikko $[a, b] \times [c, d] = C_1 \cap C_2$ on kahden suljetun joukon leikkauksena suljettu Lauseen 1.12 nojalla.

Helposti nähdään, että Esimerkin 1.22 tuloksella on vastineensa myös avaruuksissa $\mathbb{R}^n, n > 2$. Samoin helposti nähdään avoimien välien karteesisia tuloja koskeva vastine.

Jatkossa tarvitsemme joidenkin tilanteiden täsmälliseen kuvaamiseen myös vektorimuuttujan funktion raja-arvon käsitettä.

Määritelmä 1.23. Olkoot $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in A^\circ$, $f : A \setminus \{\mathbf{a}\} \rightarrow \mathbb{R}$, ja . Sanotaan, että luku a on funktion f raja-arvo pisteessä $\mathbf{a}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen $\delta > 0$, jolle

$$|f(\mathbf{x}) - a| < \varepsilon$$

aina, kun $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta), \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$. Käytetään tästä merkintää

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = a.$$

Kuten kurssilla Analyysi I voidaan sitten todistaa (harjoitustehtävä) tulos:

$$\text{Funktio } f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ on jatkuva pisteessä } \mathbf{a} \in A^\circ \text{ sjsk } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Vektorimuuttujan funktion raja-arvoja koskevat samat yleiset tulokset ja laskusäännöt jotka kurssilla Analyysi I johdettiin reaaliomuuttujan funktioiden raja-arvoille. Edelleen huomautan, että Esimerkin 1.19 tarkastelun tuloksena nähdään, ettei kyseisellä funktiolla ole lainkaan raja-arvoa origossa (vrt. topologin sinikäyrä).

1.5 Kompakteista joukoista

Esittelemme vielä lyhyesti kompaktin joukon käsitteen. Se on moniulotteinen vastine yhden muuttujan tapauksessa käyttökelpoisesta suljetusta rajoitetusta välistä $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Topologiassa kompakti joukko määritellään toisin, joukon ns. avoimien peitteiden avulla. Jätämme näin suurimman osan todistuksista sovinnolla Topologian kursseille.

Määritelmä 1.24. Joukkoa $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sanotaan *rajoitetuksi*, jos on olemassa sellainen luku M , että $\|\mathbf{x}\| \leq M$ kaikille $\mathbf{x} \in K$. Joukkoa K sanotaan *kompaktiksi*, jos se on suljettu ja rajoitettu.

Lause 1.25. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja että $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva. Jos $K \subseteq A$ on kompakti, niin tällöin myös kuvajoukko

$$f(K) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in K\}$$

on kompakti — kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.

Todistus. Sivutetaan. □

Lause 1.26. *Jos joukko $K \subset \mathbb{R}$ on kompakti ja epätyhjä, niin sillä on suurin ja pienin alkio.*

Todistus. Joukko K on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, joten reaalilukujen täydellisyysaksiooman nojalla sillä on pienin yläraja $M = \sup K$. Osoitamme, että $M \in K$, jolloin se ylärajana on välttämättä joukon K suurin alkio. Tehdään vastaoletus, että $M \notin K$. Koska K on suljettu, niin sen komplementti on avoin. Löytyy siis sellainen $r > 0$, jolle ympäristö $B(M, r) = (M - r, M + r)$ on kokonaan joukon K ulkopuolella. Erityisesti siis välillä $[M - r/2, M]$ ei ole lainkaan joukon K alkioita. Koska M on joukon K yläraja, niin voimme päätellä, että myös $M - r/2$ on joukon K yläraja. Mutta tämä on ristiriidassa sen kanssa, että M on joukon K ylärajoista pienin. Näin ollen välttämättä $M \in K$.

Pienimmän alkion olemassaolo todistetaan vastaavasti (harjoitustehtävä). □

Seuraus 1.27. *Jos $K \subseteq \mathbb{R}^n$ on epätyhjä kompakti joukko ja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin f saavuttaa joukossa K suurimman ja pienimmän arvonsa.*

Todistus. Lauseen 1.25 nojalla kuvajoukko $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ on kompakti. Lauseen 1.26 nojalla siinä on sekä suurin että pienin alkio. □

Edellinen todistus antaa meille myöhemmin selkänöjan useisiin ääriarvotehtäviin. Se on kurssin Analyysi I tuloksen *suljetulla välillä jatkuva funktio saa kyseisellä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa* moniulotteinen vastine.

Toinen kompaktisuuden liittyvä tulos, jota myöhemmin tarvitsemme, liittyy funktioiden tasaiseen jatkuvuuteen.

Määritelmä 1.28. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sanotaan, että funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on *tasaisesti jatkuva*, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen $\delta > 0$, että $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$ aina, kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ ja $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$.

Ero jatkuvuuden ja tasaisen jatkuvuuden välillä on siinä, että jatkuvuudessa muuttujan δ valinta saa riippua pisteestä $\mathbf{x}$, mutta tasaisessa jatkuvuudessa vaaditaan, että jokin luvun δ valinta toimii ‘tasaisesti’ kaikille lähtöjoukon alkioille. Tasaisesti jatkuva funktio on selvästi jatkuva, mutta toiseen suuntaan implikaatio ei aina ole voimassa (matemaatikkojen versiolla kurssista Analyysi I esiintyi esimerkkejä tästä). Kompaktissa joukossa (erityisesti siis esimerkiksi suljetulla välillä) jatkuvalle funktiolle näin kuitenkin on.

Lause 1.29. *Oletetaan, että $K \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti joukko. Jos $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva funktio, niin tällöin f on myös tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Sivutetaan. Tähän palataan Topologian kurssilla. □

Luku 2

Usean muuttujan funktioiden differentiaalilaskentaa

2.1 Osittaisderivaatoista

Yhden reaaliuuttujan funktiota tutkittaessa derivaatta osoittautui hyödylliseksi työkaluksi, jolla esimerkiksi funktion kuvaaja voitiin (lokaalisti eli paikallisesti) ‘linearisoida’. Pyrimme tuottamaan vastaavanlaisen työkalun usean muuttujan funktiolle. Ensimmäisenä askeleena määrittelemme funktion *osittaisderivaatat*.

Määritelmä 2.1. Olkoot $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x} \in A^\circ$. Jos raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + he_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

on olemassa, sitä sanotaan funktion f osittaisderivaataksi j :n muuttujan x_j suhteen pisteessä $\mathbf{x}$. Sille käytetään merkintöjä

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}), f_{x_j}(\mathbf{x}), D_{x_j}f(\mathbf{x}), D_jf(\mathbf{x}), \partial_jf(\mathbf{x}).$$

Oletus siitä, että $\mathbf{x}$ on joukon A sisäpiste tuli käyttöön siinä, että sen seurauksena piste $\mathbf{x} + he_j$ on funktion f määrittelyjoukossa aina, kun h on itseisarvoltaan tarpeeksi pieni. Kyseisessä erotusosamäärässä siis ainoastaan muuttujan x_j arvo muuttuu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

Tällä on se miellyttävä seuraus, ettei meidän tarvitse johtaa erikseen osittaisderivointisääntöjä. Tavalliset derivointisäännöt riittävät, kunhan muistaa pitää laskun aikana muita muuttujia $x_i, i \neq j$, vakioina. Eri-tyisesti summan, tulon ja osamäärän derivointikaavat toimivat myös osittaisderivaatoille. Ketjusääntökin toimii kurssilta Analyysi I tutulla tavalla *kunhan tarkastelemme yhden (ei-vakioisen) muuttujan reaaliarvoista funktiota*. Usean muuttujan funktioiden yhdistettyyn funktioon liittyvästä ketjusäännöstä enemmän myöhemmin tässä luvussa.

Esimerkki 2.2. Määrätään funktion

$$f(x, y) = y^2 + xy - x^3 + x^2$$

osittaisderivaatat f_x ja f_y .

Ratkaisu. Kun osittaisderivoimme muuttujan x suhteen, niin pidämme y :tä vakiona. Näin ollen myös y^2 on vakio, joten $D_x(y^2) = 0$. Termi xy on x :n suhteen ensimmäisen asteen polynomi, joten sen osittaisderivaatta on x :n kerroin, joka tällä kertaa on $D_x(xy) = y$, mutta voi riippua y :stä (tai toisessa tilanteessa muista läsnäolevista muuttujista) mutkikkaammallakin tavalla. Viimeiset kaksi termiä riippuvat vain x :stä, ja voidaan derivoida normaalisti. Saamme siis

$$f_x = y - 3x^2 + 2x.$$

Vastaavasti, kun osittaisderivoimme y :n suhteen, niin pidämme x :ää vakiona. Näin ollen $D_y(x^3) = 0$, $D_y(xy) = x$ jne. Vastaukseksi saadaan

$$f_y = 2y + x.$$

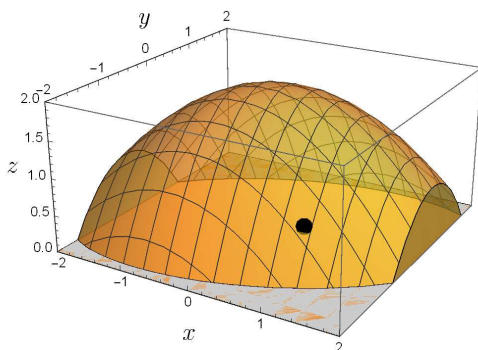
Yhden muuttujan funktion derivaatta annetussa pisteessä $\mathbf{a}$ tulkitaan usein sen kuvaajan tangentin kulmakertoimeksi. Osittaisderivaatat voidaan tulkita samoin, kun rajoitetaan funktio $\mathbf{a}$:n kautta kulkevalle suoralle, jossa muilla koordinaateilla on vakioarvo. Käytän tällaisessa tapauksessa usein kuvaa, jossa kuvaajapinnasta otetaan sopiva *poikkileikkaus*. Tällöin on mielestäni havainnollistavaa jättää kuvaan mukaan poikkileikkauspinnan takana oleva kuvaajan osa. Seuraava esimerkki valottaa tätä.

Esimerkki 2.3. Havainnollistetaan kuvaillulla tavalla polynomin

$$f(x, y) = \frac{6 - x^2 + xy - 2y^2}{3}$$

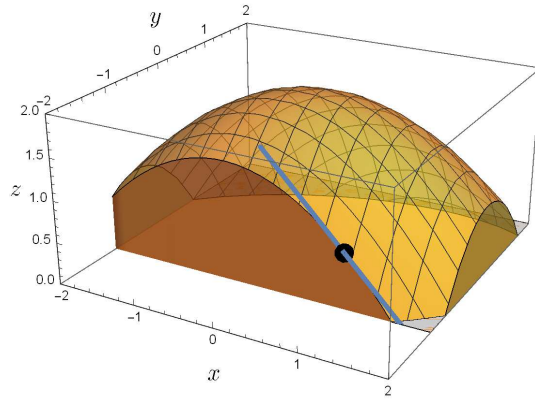
osittaisderivaattoja pisteessä $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Ratkaisu. Suoraan laskemalla nähdään, että $f(1, -1) = 2/3$. Näin ollen piste $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (1, -1, 2/3)$ on kuvaajalla, ja liikumme sen lähistöllä.

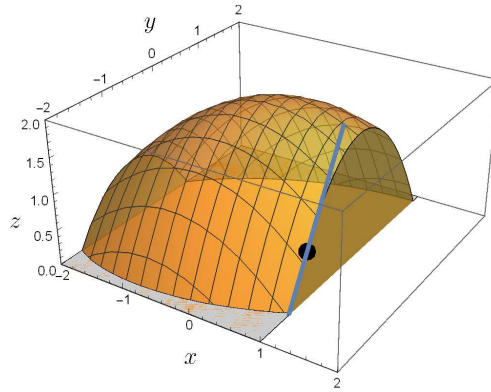


Kuva 2.1: Funktion $f(x, y) = (6 - x^2 + xy - 2y^2)/3$ kuvaaja pisteen $P = (1, -1, 2/3)$ lähistöllä

Kuvassa 2.1 on funktion $f(x, y)$ kuvaaja alueella $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$. Osittaisderivoimalla näemme, että $f_x(x, y) = (-2x + y)/3$ ja $f_y(x, y) = (x - 4y)/3$. Näin ollen $f_x(1, -1) = -1$ ja $f_y(1, -1) = 5/3$.



Kuva 2.2: Funktion $f(x, y)$ kuvaajan poikkileikkaus sen tason kanssa, joka kulkee pisteen P kautta ja, jolla y -koordinaatti on vakio



Kuva 2.3: Funktion $f(x, y)$ kuvaajan poikkileikkaus sen tason kanssa, joka kulkee pisteen P kautta ja, jolla x -koordinaatti on vakio

Nämä näkyvät Kuvissa 2.2 ja 2.3. Ensin mainitussa tason $y = -1$ antamalla poikkileikkauksella (vastaten sitä, että tätä osittaisderivaattaa laskettaessa y :llä oli vakioarvo -1) "vapaan" muuttujan x funktion $f(x, -1)$ kuvaajan tangentin kulmakerroin on 1. Jälkimmäisessä puolestaan poikkileikkaus muodostetaan tason $x = 1$ kanssa, ja funktion $f(1, y)$ kuvaajan tangentilla on kulmakerroin $5/3$. Tangenttisuorien kulmakertoimien tulkinnessa on pidettävä mielessä, että oheisissa kuvissa x -koordinaatti kasvaa oikealle liikuttaessa, ja y -koordinaatti katsojasta pois päin liikuttaessa (vrt. asteikot särmillä).

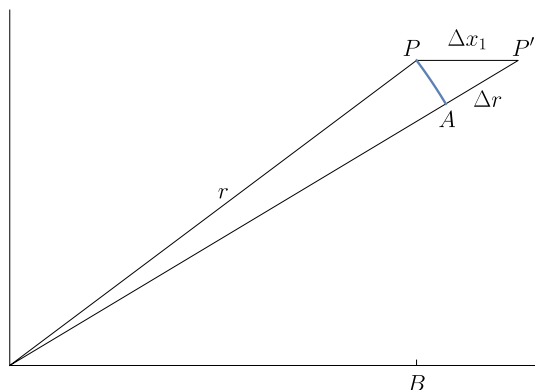
Esimerkki 2.4. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ pisteen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ etäisyys origosta on

$$r = r(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Fysiikassa, etenkin kun $n = 3$, usea funktio (tai vektorikenttä) on ilmaistavissa r :n funktiona, ja osittaisderivaatat $\partial r / \partial x_i$. Tulevat käyttöön. Johdetaan kaava

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$$

ja annetaan geometrinen selitys tälle osittaisderivaatalle.



Kuva 2.4: Etäisyyden osittaisderivaatta koordinaatin suhteen

Ratkaisu. Käytetään koordinaattien neliöiden summasta merkintää

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

jolloin r on yhdistetty funktio $r(\mathbf{x}) = \sqrt{q(\mathbf{x})}$. Selvästi $\partial q / \partial x_i = 2x_i$ kaikilla $i = 1, 2, \dots, n$. Koska $D\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, niin Analyysi I:n ketjusäännön nojalla

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_i}{\sqrt{q(\mathbf{x})}} = \frac{x_i}{r}.$$

Kuvassa 2.4 tätä havainnollistetaan seuraavasti. Piste $P = (x_1, x_2)$, ja $P' = (x_1 + \Delta x_1, x_2)$ on piste, joka saadaan kasvattamalla P :n 1. koordinaattia vähän. Kuvan piste A on origon ja P' :n yhdistävällä janalla, etäisyydellä $r = |OP|$ origosta. Näin ollen etäisyyden muutos $\Delta r = |AP'|$. Kun muutos Δx_1 on pieni, niin ympyrän kaari PA on käytännössä suora jana, joka on kohtisuorassa janaa AP' vastaan. Olkoon pisteen P suuntakulma ϕ . Kun $\Delta x_1 \approx 0$, niin hyvällä tarkkuudella myös pisteen P' suuntakulma on ϕ . Näin ollen sen kanssa samankohmainen kulma $\angle AP'P = \phi$. Kuvaan on merkitty piste $B = (x_1, 0)$. Suorakulmaiset kolmiot $\triangle OPB$ ja $\triangle P'PA$ ovat (likimain) yhdenmuotoisia, joten vastinosien suhteet

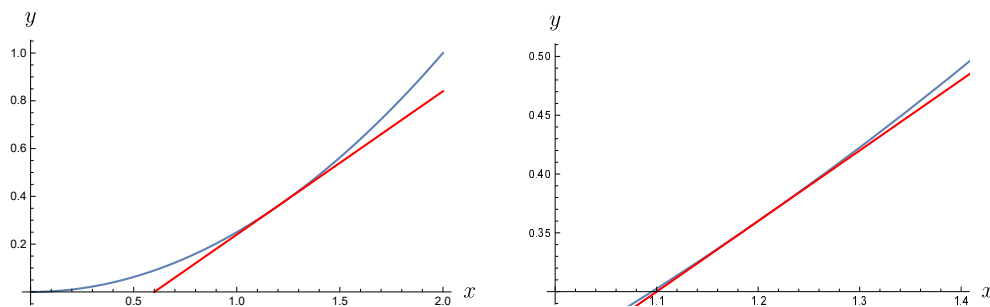
$$\frac{x_1}{r} = \frac{|OB|}{|OP|} \approx \frac{|PA|}{|PP'|} = \frac{\Delta r}{\Delta x_1}.$$

Kun $\Delta x_1 \rightarrow 0$, niin tehdyt approksimointivirheet lähestyvät nollaa, ja raja-arvona saamme

$$\frac{x_1}{r} = \frac{\partial r}{\partial x_1}.$$

2.2 Vektorimuuttujan funktion differentioituvuus

Yhden reaaliuuttujan funktion tapauksessa derivoituvuus (pisteessä) takaa aina funktion jatkuvuuden (pisteessä). Kahden tai useamman muuttujan tapauksessa funktion osittaisderivaattojen olemassaolo ei takaa



Kuva 2.5: Yhden muuttujan differentioituvan funktion kuvaaja ja sen yhteen pisteeseen piirretty tangentti (punaisella). Oikealla osasuurennos, josta käy ilmi miten zoomattaessa tangentti tulee lähemmäs ja lähemmäs kuvaajaa

jatkuvuutta. Helppo esimerkki tästä on funktio $f(x, y)$ joka saa arvon nolla molemmilla koordinaattiakseleilla ja arvon yksi muualla. Tässä $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$, mutta selvästi f ei ole jatkuva origossa. Ongelma aiheutuu jälleen siitä, että origoa voidaan lähestyä äärettömän monesta eri suunnista, mutta osittaisderivaatat kertovat ainoastaan jotakin siitä mitä tapahtuu silloin, kun lähestytään akselien suunnassa.

Erotusosamäärän $(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}))/\mathbf{h}$ käyttö yleisemmän käsitteen pohjana on sikäli mahdoton ajatus, että funktion arvon muutos $\mathbf{h}$ on vektori, eikä vektoreiden jakolasku ole määritelty. Tämä lähestymistapa kuitenkin toimii hyvin. kompleksimuuttujan tapauksessa. Siitä enemmän kurssilla *Funktioteoria*

Sellainen differentioituvuuden käsite, joka välttää mainitut ongelmat, saadaan, kun tutkitaan funktion arvojen muuttumista tutkittavan pisteen jossakin ympäristössä. Yhden muuttujan funktion tapauksessa tätä vastaa derivaatan tulkinta funktion kuvaajan tangenttisuoran kulmakertoimenä. Kiinnitämme huomiota siihen, että tällöin tangenttisuora approksimoi kuvaajaa hyvin. Suhteellinen virhe on sitä pienempi, mitä pienempää aluetta katsotaan kuten Kuvassa 2.5.

Esimerkki 2.5. Tutkitaan Esimerkin 2.3 funktion

$$f(x, y) = \frac{6 - x^2 + xy - 2y^2}{3}$$

approksimointia pisteen $(x_0, y_0) = (1, -1)$ läheisyydessä.

Ratkaisu. Sijoitetaan funktioon $(x, y) = (1, -1) + (h_1, h_2) = (1 + h_1, -1 + h_2)$. Arvoksi saadaan

$$f(1 + h_1, -1 + h_2) = \frac{2}{3} + \left(-h_1 + \frac{5}{3}h_2\right) + \frac{1}{3}(-h_1^2 + h_1h_2 - 2h_2^2).$$

Ensimmäisenä oikella puolella on funktion arvo $f(1, -1) = 2/3$. Muissa termeissä ryhmittelin ensimmäiseen sulkulausekkeeseen muutosvektorin $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ komponenttien ensimmäisen asteen termit ja jälkimmäiseen toiseen asteen termit. Jos skaalaamme muutosvektorin pienemmäksi jakamalla sen luvulla 10, niin ensimmäinen sulkulauseke pienenee kymmenenteen osaan, mutta jälkimmäinen sadasosaan sen nykyisestä arvosta. Näin ollen muutosvektorin ollessa pieni, ensimmäinen sulkulauseke on isommassa roolissa. Käytetään siitä

merkintää

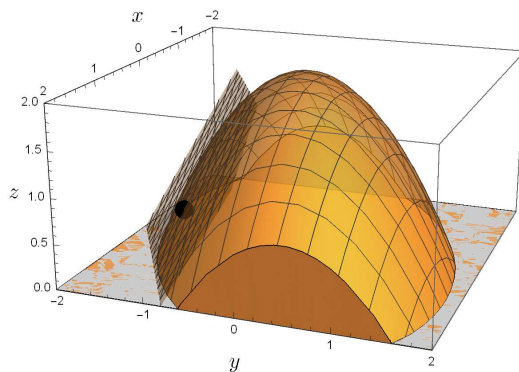
$$T(\mathbf{h}) = T(h_1, h_2) = -h_1 + \frac{5}{3}h_2.$$

Tämä on vektorin $\mathbf{h}$ lineaarifunktio ja antaa aiheen tarkastella funktiota f approksimoivaa funktiota

$$L(1 + h_1, -1 + h_2) = f(1, -1) + T(\mathbf{h}).$$

Tässä $h_1 = x - x_0 = x - 1$ ja $h_2 = y - y_0 = y + 1$, joten

$$L(x, y) = \frac{2}{3} - (x - 1) + \frac{5}{3}(y + 1) = \frac{10 - 3x + 5y}{3}.$$



Kuva 2.6: Funktion $f(x, y)$ kuvaaja ja sitä pisteen $(1, -1)$ lähistöllä seuraava tangenttitaso

Funktion $L(x, y)$ kuvaaja on taso. Kuvassa 2.6 on funktioiden f ja L kuvaajat. Kuvakulma poikkeaa aiemmista, sillä haluan tällä perustella, miksi funktion L kuvaajatasoa voidaan kutsua funktion f kuvaajan *pisteeseen* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *piirretyksi tangenttitasoksi*.

Määritelmä 2.6. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in A^\circ$. Sanotaan, että funktio f on *differentioituva pisteessä* $\mathbf{x}$, jos on olemassa sellainen lineaarikuvaus $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jolle

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - T(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Tällöin lineaarikuvausta T kutsutaan funktion f *lineaariseksi derivaataksi pisteessä* $\mathbf{x}$, ja funktion $g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) := f(\mathbf{x}) + T(\mathbf{h})$ kuvaajaa kutsutaan funktion f *tangentti(hyper)tasoksi pisteessä* $\mathbf{x}$.

Huomautus 2.7. Lineaarialgebrasta tiedämme, että $T(\mathbf{h})$ on muotoa

$$\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3, \dots, h_n) \mapsto t_1 h_1 + t_2 h_2 + \dots + t_n h_n$$

joillekin yksikäsitteisesti määrätyille vakioille $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$.

Jos $B(\mathbf{x}, r) \subseteq A$ ja määritellään kaikille $\mathbf{h} \in B(\mathbf{0}, r)$, $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ funktio $\eta(\mathbf{h})$ ‘virheterminä’ eli lukuna, joka määräytyy yhtälöstä

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + T(\mathbf{h}) + \eta(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|,$$

niin funktion f differentioituvuus pisteessä $\mathbf{x}$ on ekvivalenttia sen kanssa, että $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \eta(\mathbf{h}) = 0$.

Huomautus 2.8. Differentioituvuuden määritelmässä käytetty raja-arvoehto määrää lineaarikuvauksen T yksikäsitteisesti. Joskus ko. lineaarikuvausta kutsutaan *funktion f Fréchet'n derivaataksi pisteessä $\mathbf{x}$* .

Esimerkki 2.9. Osoitetaan, että Esimerkissä 2.5 tuotettu lineaarikuvauks $T(h_1, h_2) = (-3h_1 + 5h_2)/3$ on funktion $f(x, y) = \frac{6-x^2+xy-2y^2}{3}$ lineaarinen derivaatta pisteessä $(1, -1)$.

Ratkaisu. Näimme, että

$$f(1+h_1, -1+h_2) - f(1, -1) = T(h_1, h_2) + \frac{1}{3}(-h_1^2 + h_1h_2 - 2h_2^2).$$

Funktion f ja tangenttitason antava funktion L erotusta mittaava virhetermi on siis

$$E(h_1, h_2) = \frac{1}{3}(-h_1^2 + h_1h_2 - 2h_2^2).$$

Tässä $|h_1| \leq \|\mathbf{h}\|$ ja $|h_2| \leq \|\mathbf{h}\|$, joten kolmioepäyhtälön nojalla

$$|E(h_1, h_2)| \leq \frac{1}{3}(|h_1|^2 + |h_1| \cdot |h_2| + 2|h_2|^2) \leq 4\|\mathbf{h}\|^2/3.$$

Näin ollen virheen suhteelle vektorin $\mathbf{h}$ normiin saadaan yläraja

$$|\eta(\mathbf{h})| = |E(\mathbf{h})|/\|\mathbf{h}\| \leq 4\|\mathbf{h}\|/3.$$

Selvästi $\eta(\mathbf{h}) \rightarrow 0$, kun $\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$, mikä juurikin piti tarkistaa.

Huomautetaan vielä, että lineaarikuvauksen T kertoimet vastaavat osittaisderivaattoja pisteessä $(1, -1)$, sillä laskimme aiemmin, että $f_x(1, -1) = -1$ ja $f_y(1, -1) = 5/3$, mitkä ovat juurikin komponenttien h_1 ja h_2 kertoimet.

Esimerkin 2.5 valossa tuntuu ilmeiseltä, että funktion f osittaisderivaatat läheisesti liittyvät funktion differentioituvuuteen. Erityisesti odotamme, että ne määräävät lineaarikuvauksen T . Seuraava Lause antaa tähän vastauksen ja käyttökelpoisen kriteerin funktion differentioituvuuden toteamiseen.

Lause 2.10. Oletetaan, että funktiolla $f(\mathbf{x})$ on pisteen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ympäristössä $B(\mathbf{a}, r)$, $r > 0$ olemassa jatkuvat osittaisderivaatat $\partial_i f$, $i = 1, 2, \dots, n$. Tällöin funktio f on differentioituva pisteessä $\mathbf{a}$, ja differentioituvuuden määritelmässä esiintyvä lineaarikuvauks T on

$$T(h_1, h_2, \dots, h_n) = t_1 h_1 + \dots + t_n h_n,$$

missä

$$t_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Todistus. Kiinnitetään ensin hetkeksi erotusvektori $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$. Oletetaan, että $\|\mathbf{h}\| < r$. Kirjoitetaan erotus $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})$ muodossa

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n [f(a_1 + h_1, \dots, a_i + h_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n) - f(a_1 + h_1, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)].$$

Arvioimme tässä kutakin hakasulkulauseketta Δ_i erikseen käyttäen hyväksi yhden muuttujan funktion differentiaalilaskennan väliarvolauseetta (=DVAL). Hakasulkulausekkeessa numero i on erotus funktion f arvoista kahdessa eri pisteessä. Nämä pisteet eroavat toisistaan ainoastaan koordinaatin x_i osalta, jonka arvo muuttuu arvosta a_i arvoon $a_i + h_i$. Molemmissa pisteissä on $x_j = a_j + h_j$ aina kun $j < i$ sekä $x_j = a_j$ aina kun $j > i$.

Tutkimme siis apufunktiota

$$g_i(x) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, x, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n),$$

joka on oletustemme nojalla jatkuvasti derivoituva välillä $[a_i, a_i + h_i]$ (tai jos $h_i < 0$, niin välillä $[a_i + h_i, a_i]$). Näin ollen DVALin nojalla lukujen nolla ja h_i välillä on sellainen luku ξ_i , että

$$\Delta_i = g_i(a_i + h_i) - g_i(a_i) = h_i \cdot g'_i(a_i + \xi_i).$$

Tässä esiintyvä derivaatta g'_i on tietenkin osittaisderivaatta $\partial_i f$, joten

$$\Delta_i = h_i \partial_i f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, a_i + \xi_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n).$$

Merkitsemme osittaisderivaattojen arvoja pisteessä $\mathbf{a}$ $t_i := \partial_i f(\mathbf{a}), i = 1, 2, \dots, n$. Edellisen yhtälön oikealla puolella esiintyvä h_i :n kerroin on sama osittaisderivaatta, mutta laskettuna eri pisteessä. Merkitään erotusta

$$d_i := \partial_i f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, a_i + \xi_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n) - t_i.$$

Yhdistämällä nämä tulokset saamme, että

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= \sum_{i=1}^n \Delta_i \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, a_i + \xi_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n) \\ &= \sum_{i=1}^n h_i (t_i + d_i) \\ &= \sum_{i=1}^n t_i h_i + \left(\sum_{i=1}^n d_i h_i \right). \end{aligned}$$

Merkitään tässä esiintyvää lineaarista päätermiä

$$T(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n t_i h_i = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\mathbf{a}) t_i$$

ja suluissa olevaa jäännöstermi on $\eta(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\|$. Seurauksen 1.2 nojalla $|h_i|/\|\mathbf{h}\| \leq 1$, jäännöstermille saadaan yläraja

$$\begin{aligned} |\eta(\mathbf{h})| \cdot \|\mathbf{h}\| &\leq \sum_{i=1}^n |h_i| \cdot |d_i| \\ &\leq \|\mathbf{h}\| \sum_{i=1}^n |d_i|. \quad (*) \end{aligned}$$

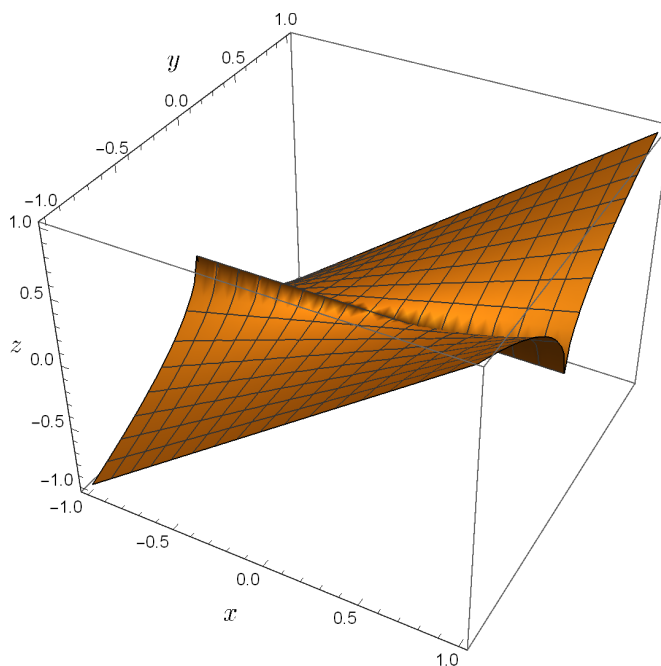
Koska oletimme osittaisderivaattojen $\partial_i f$ olevan jatkuvia, niin $d_i \rightarrow 0$ kun $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Näin ollen $\eta(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ kun $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Täsmällisemmin tämä nähdään seuraavasti. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Osittaisderivaatan $\partial_i f$ jatkuvuudesta seuraa, että kutakin indeksii $i = 1, 2, \dots, n$, kohti on olemassa sellainen $\delta_i > 0$, että $|\partial_i f(\mathbf{x}) - \partial_i f(\mathbf{a})| < \varepsilon/n$ aina, kun $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta_i)$. Kun valitaan $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$, niin epäyhtälöt $|\partial_i f(\mathbf{x}) - \partial_i f(\mathbf{a})| < \varepsilon/n, i = 1, 2, \dots, n$, ovat kaikki voimassa aina, kun $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$. Koska piste $(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, a_i + \xi_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n) \in B(\mathbf{a}, \delta)$ aina, kun $\|\mathbf{h}\| < \delta$, niin tällöin kaikki osittaisderivaattojen ‘virheet’ d_i ovat itseisarvoltaan $< \varepsilon/n$. Arviosta (*) seuraa siis, että $|\eta(\mathbf{h})| < \varepsilon$ aina, kun $\|\mathbf{h}\| < \delta$. $\square$

Erityisesti siis kun $n = 2$, niin kuvaajan $z = f(x, y)$ pisteeseen $(a, b, f(a, b))$ tangenttitason T yhtälöksi saadaan

$$T : z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Lauseen 2.10 tilanne on mukavin tapa todeta tutkittavan funktion differentioituvuus. Erityisesti alkeis-funktioita käyttäen muodostettu funktio on differentioituva määrittelyjoukkonsa sisäosassa. Jos funktio on differentioituva jossakin avoimessa joukossa $A \subseteq \mathbb{R}^2$, niin funktion kuvaajana saatava pinta on sileä, ts. siinä ei ole reikiä, laskoksia eikä repeämiä.

Jos vaadimme differentioituvuutta vain yksittäisessä pisteessä, se sallii seuraavan esimerkin kaltaisia poikkeavia tilanteita.



Kuva 2.7: Funktio $f(x, y) = x\sqrt{|y|}$ kuvaaja.

Esimerkki 2.11. Osoita, että funktio $f(x, y) = x\sqrt{|y|}$ ei ole differentioituva pisteissä $(x, 0), x \neq 0$, mutta on differentioituva muualla, erityisesti pisteessä $(0, 0)$.

Ratkaisu. Nyt $f_x = \sqrt{|y|}$ ja $f_y = x \operatorname{sgn} y / 2\sqrt{|y|}$, kun $y \neq 0$. Nämä ovat jatkuvia pisteessä (x, y) kunhan $y \neq 0$, joten differentioituvuus näissä pisteissä seuraa Lauseesta 2.10.

Käsitellään seuraavaksi origo, joten $(a_1, a_2) = (0, 0)$. Kuten yllä $|h_i|/||\mathbf{h}|| \leq 1$, joten

$$0 \leq \left| \frac{f(h_1, h_2)}{||\mathbf{h}||} \right| = \left| \frac{|h_1|\sqrt{|h_2|}}{||\mathbf{h}||} \right| \leq \sqrt{|h_2|}.$$

Kun $\mathbf{h} \rightarrow (0, 0)$, niin näemme, että differentioituvuusehto toteutuu, kun $T(\mathbf{h}) = 0$ jolloin $\eta(\mathbf{h}) = f(\mathbf{h})/||\mathbf{h}||$.

Kiinnitetään sitten $x \neq 0$ ja asetetaan $(a_1, a_2) = (x, 0)$. Tehdään vastaoletus, että olisi olemassa differentioituvuuden määritelmän edellyttämät vakiot t_1 ja t_2 . Asetetaan $h_1 = 0, h_2 \neq 0$, jolloin $||\mathbf{h}|| = |h_2|$. Nyt

$$f(x + h_1, h_2) = f(x, h_2) = x\sqrt{|h_2|} = f(x, 0) + t_1 \cdot h_1 + t_2 \cdot h_2 + \eta(\mathbf{h})||\mathbf{h}|| = 0 + t_2 h_2 + \eta(0, h_2)|h_2|,$$

mistä ratkeaa

$$\eta(0, h_2) = \frac{x\sqrt{|h_2|} - t_2 h_2}{|h_2|} = \frac{x}{\sqrt{|h_2|}} - t_2 \operatorname{sgn}(h_2).$$

Koska $x/\sqrt{|h_2|} \rightarrow \pm\infty$ x -koordinaatin merkistä riippuen, niin tällä lausekkeella ei ole raja-arvona nollaa, kun $h_2 \rightarrow 0$ — riippumatta vakion t_2 arvosta.

Kuvassa 2.7 on kyseisen funktion kuvaaja. Huomaamme, että pinnassa on selkeä laskos suoran $y = 0$ yläpuolella, mutta pinta ‘siliää hetkellisesti’ origon lähistöllä.

Yhden muuttujan funktion tapauksessa derivaattaa käytettiin derivoituvan funktion arvon muutoksen arvioimiseen, kun muuttuja muuttui vähän. Sama arviointimenetelmä on käytettävissä differentiotivalle usean muuttujan funktiolle f . Jos $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ on pieni muutosvektori, niin

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{x} = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \Delta x_i.$$

Esimerkki 2.12. Tykin ammuksen kantama s (metreissä) on ammuksen lähtönopeuden v (metrejä sekunnissa) ja lähtökulman (tunnetaan myös termillä *koro*) ϕ (piiruina, yksi piiru on $1/6000$ täydestä ympyrästä eli $\pi/3000$ radiaania) differentioituva funktio $s = s(v, \phi)$. Uudella tykillä ja vakiodulla ammuksella tehtyjen koeammuntojen perusteella tiedettiin, että $s_0 = s(v_0, \phi_0) = 10000 \text{ m}$, ja että osittaisderivaatoilla on arvot

$$\frac{\partial s}{\partial v}(v_0, \phi_0) = 40 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial s}{\partial \phi}(v_0, \phi_0) = 50,$$

ensin mainittu yksiköissä $\text{m}/(\text{m}/\text{s})$ ja jälkimmäinen yksiköissä m/piiru . Ammuntaharjoituksissa käytettiin hieman kulunutta tykkiä, ja tulenjohtaja huomasi, että korokulmalla ϕ_0 ammuksen kantama jäi 100 metriä vajaaksi toivotusta. Arvioi, miten paljon tykin kuluminen oli muuttanut ammuksen lähtönopeutta, ja miten koroa tuli muuttaa, jotta ammus osuisi haluttuun kohtaan?

Ratkaisu. Lineaarinen derivaatta antaa kantaman virheelle $\Delta s = s(v_0 + \Delta v, \phi_0 + \Delta \phi) - s(v_0, \phi_0)$ likimääräiskaavan

$$\Delta s \approx \frac{\partial s}{\partial v}(v_0, \phi_0) \Delta v + \frac{\partial s}{\partial \phi}(v_0, \phi_0) \Delta \phi. \quad (*)$$

Tulentohtajan havainto perustui tykinlaukaukseen, jossa koro oli oikein, $\Delta\phi = 0$, mutta ammuksen lähtönopeus kuluman vuoksi poikkesi arvosta v_0 virheen Δv verran. Mitattu kantaman virhe oli $\Delta s = -100$, joten kaavan (*) ja tunnettujen osittaisderivaattojen nojalla

$$-100 = \Delta s = 40\Delta v + 50\Delta\phi = 40\Delta v,$$

mistä ratkeaa, että ammuksen lähtönopeus poikkesi vertailuarvosta

$$\Delta v = \frac{-100 \text{ m}}{40 \text{ m/(m/s)}} = -2,5 \text{ m/s}.$$

Koska tykin kulumiseen (eli ammuksen lähtönopeuteen) ei voida nopeasti vaikuttaa, tämä virhe on korjattava säätämällä korokulmaa. Tavoitteena on, että $\Delta s = 0$. Koska äskeisen perusteella tiedetään, että $\Delta v = -2,5 \text{ m/s}$, niin saamme yhtälön

$$0 = \Delta s = 40\Delta v + 50\Delta\phi = -100 + 50\Delta\phi,$$

mistä ratkeaa $\Delta\phi = 2$. Tykin putken kääntäminen 2 piirua ylöspäin siis korjaa sen kulumisesta aiheutuneen virheen.

2.3 Gradientti ja suunnattu derivaatta

Määritelmä 2.13. Oletetaan, että funktiolla f on osittaisderivaatat pisteessä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Sen osittaisderivaattojen arvojen muodostamaa vektoria kutsutaan f :n *gradientiksi pisteessä $\mathbf{x}$* . Gradientista käytetään merkintää $\nabla f(\mathbf{x})$:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

Huomautus 2.14. Voidaan suhteellisen helposti todistaa (harjoitustehtävä), että mikäli funktio f on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$, sillä tällöin on pisteessä $\mathbf{x}$ olemassa osittaisderivaatat, ja ne ovat myös approksimoivan lineaarikuvauksen kertoimet. Toisin sanoen, differentioituvuuden takaama lineaarikuvaus T saadaan poikkeamavektorin $\mathbf{h}$ ja gradientin sisätulosta:

$$T(\mathbf{h}) = (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\mathbf{x}) h_i.$$

Aiemmin vastaan tullut ongelma on, että osittaisderivaatat mittaavat funktion arvojen muuttumista (ja muutosnopeuden tasaisuutta) vain koordinaattiakselien suunnassa. Korjaamme tätä puutetta osin seuraavaksi määriteltävällä suunnatun derivaatan käsitteellä, jos vektorimuuttujan muutossuunta kiinnitetään mielivaltaisen yksikkövektorin suuntaiseksi.

Määritelmä 2.15. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in A^\circ$ ja $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ jokin yksikkövektori (eli $\|\mathbf{u}\| = 1$). Jos funktiolle $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on olemassa raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h},$$

sitä sanotaan f :n *suunnatuksi derivaataksi* pisteessä $\mathbf{x}$ vektorin $\mathbf{u}$ suuntaan. Tästä suunnatusta derivaatasta käytetään merkintöjä

$$\partial_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}), D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}).$$

Huomautus 2.16. Jos vektoriksi $\mathbf{u}$ valitaan jokin luonnollisen kannan vektoreista $e_i, i = 1, 2, \dots, n$, niin selvästi suunnattu derivaatta on sama kuin osittaisderivaatta $\partial f / \partial x_i$. Siis $\partial_i f = \partial_{e_i} f$.

Käytännössä tutkittavat funktiot ovat differentioituvia, ja tällöin seuraavan tuloksen nojalla suunnatut derivaatat on helppo laskea gradientin avulla.

Lause 2.17. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x} \in A^\circ$. Olkoon $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ jokin yksikkövektori. Jos $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$, niin tällöin suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ on olemassa, ja se saadaan sisätulosta

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) u_i.$$

Todistus. Lauseen 2.10 nojalla (sovelletaan sitä tilanteeseen $\mathbf{h} = h\mathbf{u}$)

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\mathbf{x}) \cdot (hu_i) + ||h\mathbf{u}||\eta(h\mathbf{u}) = h(\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{u}) + |h|\eta(h\mathbf{u}),$$

missä reaaliparametri h on rajattu nolla sisältävälle välille, jolla $\mathbf{x} + h\mathbf{u} \in A$ ja $\eta(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ kun $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Jakamalla tämä puolittain h :lla saadaan erotusosamääräksi

$$\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h} = (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{u}) + \frac{|h|}{h}\eta(h\mathbf{u}).$$

Koska $\eta(h\mathbf{u}) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$, niin oikea puoli lähestyy raja-arvoaan väitettyä arvoa $(\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{u})$. $\square$

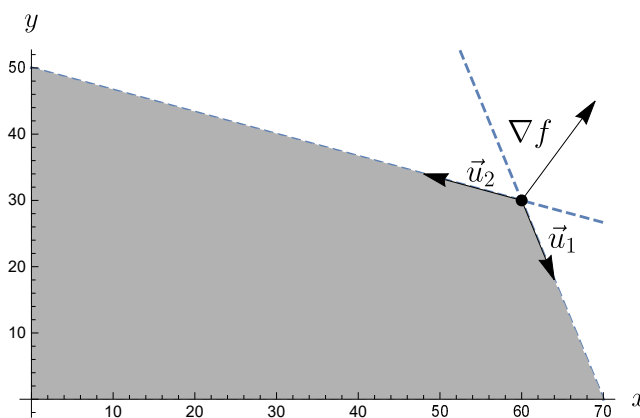
Kurssilla Analyysi I reaaliuuttujan funktion derivaatta kertoi sen (paikallisen) kasvunopeuden tutkitavassa pisteessä. Suunnattu derivaatta kertoo saman asian vektorimuuttujan funktiolle, kun kiinnitetään muuttujan muuttumissuunta $\mathbf{u}$. Lauseen 2.17 nojalla ei ole enää yllättävää, että gradientin suunta on seuraavassa mielessä erikoisasemessa. Nimittäin Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$|D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})| = |(\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{u})| \leq \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{x})\|,$$

eli gradienttivektorin pituus antaa ylärajan (ja miinusmerkkisenä alarajan) suunnatulle derivaatalle. Koska Cauchyn-Schwarzin epäyhtälössä on yhtäsuuruus silloin ja vain silloin kun esiintyvät vektorit ovat lineaarisesti riippuvia (harjoitustehtävä), saamme lisäksi tarkemman tuloksen, että $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\|$ silloin ja vain silloin, kun $\mathbf{u} \uparrow \nabla f(\mathbf{x})$. Tällä on luonnollinen geometrinen tulkinta: *lähdettyessä liikkeelle pisteestä f funktio f kasvaa jyrkimmin, kun liikutaan sen gradientin suuntaan*. Vastaavasti funktio f vähenee nopeimmin, kun liikutaan gradienttia vastakkaiseen suuntaan. Edelleen geometrinen tulkinta voidaan antaa tilanteelle, jossa $\mathbf{u} \perp \nabla f(\mathbf{x})$, jolloin Lauseen 2.17 nojalla $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = 0$, jolloin funktion arvo ei muutu lainkaan.

Esimerkki 2.18. Pekka on kerännyt marjoja. Hänellä on käytettävissä 210 yksikköä mustikoita ja 150 yksikköä mansikoita. Hän leipoo niistä kahdenlaisia leivoksia. Herkkuleivokseen menee 3 yksikköä mustikoita ja 1 yksikkö mansikoita. Unelmaleivokseen puolestaan tarvitaan 1 yksikkö mustikoita ja 3 yksikköä mansikoita. Montako kumpaakin tyyppiä olevaa leivosta Pekan tulee leipoa, jos hän haluaa käyttää kaikki marjansa leivoksiin? Oletetaan, että asiakkaat maksavat 3 euroa herkkuleivoksesta ja 5 euroa unelmaleivoksesta. Selitä suunnatun derivaatan avulla, miksi tällöin Pekan kannattaa käyttää kaikki marjansa myyntitulojen maksimoimiseksi. Muuttuisiko tilanne, jos Pekan asiakkaat ovatkin kaikki intohimoisia mansikoiden ystäviä, jotka ovat valmiita maksamaan vain 2 euroa herkkuleivoksesta, mutta peräti 7 euroa unelmaleivoksesta?

Ratkaisu. Olkoon x Pekan leipomien herkkuleivosten lukumäärä ja y unelmaleivosten määrä. Niiden leipomiseen tarvitaan $3x + y$ yksikköä mustikkaa ja $x + 3y$ yksikköä mansikkaa. Ilmeisten epäyhtälöiden $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ lisäksi Pekan marjasaalis antaa meillä epäyhtälöt $3x + y \leq 210$ ja $x + 3y \leq 150$. Näiden epäyhtälöiden sallimien pisteiden (x, y) joukko D on Kuvassa 2.8.



Kuva 2.8: Pekan parametrialue D merkitty harmaalla. Reunasuorat $3x + y = 210$ ja $x + 3y = 150$ katkoviivoilla.

Tilanteessa, jossa kaikki marjat käytetään, kummassakin näistä epäyhtälöistä on yhtäsuuruus, ja ratkaisemalla yhtälöpari saamme vastaukseksi pisteen $P = (x_0, y_0) = (60, 30)$ (kuvan musta piste). Alueen D reunasuorat lähtevät pisteestä p yksikkövektorien $\vec{u}_1 = (1, -3)/\sqrt{10}$ ja $\vec{u}_2 = (-3, 1)/\sqrt{10}$ suuntiin (vektorien pituuksia kuvassa liioiteltu). Pekan myyntitulot (olettaen, että kaikki leivokset käyvät kaupaksi) saadaan funktiosta $f(x, y) = 3x + 5y$. Sen gradientti on vakiovektori

$$\nabla f(x, y) = (3, 5).$$

Valitsemalla mitä hän leipoo Pekka voi liikuttaa pistettä (x, y) alueessa D . Koska ∇f osoittaa oikealla ja ylös, hänen kannattaa ilman muuta valita piste (x, y) alueen jommalta kummalta reunasuoralta. Väite oli, että tällä kertaa piste P maksimoi myyntitulot. Tämän voimme perustella seuraavasti. Pisteestä P Pekan ei

missään tapauksessa kannata liikkua kuin vektorien $\vec{u}_1$ tai $\vec{u}_2$ suuntiin. Mutta suunnatut derivaatat

$$D_{\vec{u}_1} f = \vec{u}_1 \cdot \nabla f = \frac{-12}{\sqrt{10}}$$

ja

$$D_{\vec{u}_2} f = \vec{u}_2 \cdot \nabla f = \frac{-4}{\sqrt{10}}$$

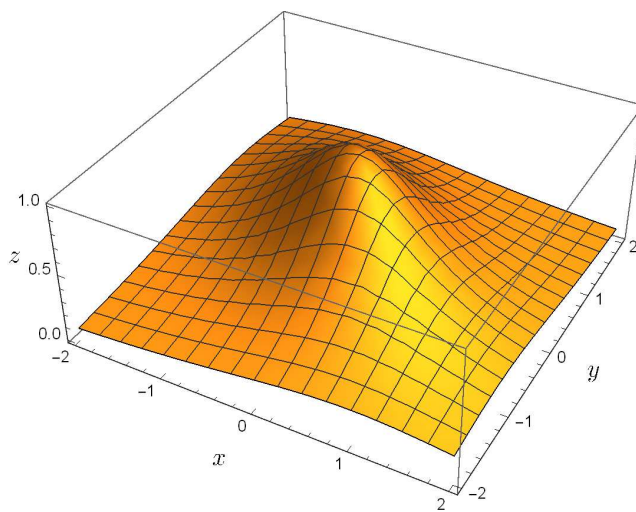
ovat molemmat negatiivisia, joten siirtymä kumpaan tahansa suuntaan pienentää myyntituloja. Kuvassa tämä ilmenee siten, että vektorien $\vec{u}_i, i = 1, 2$ ja gradientin ∇f väliset kulmat ovat välillä $(\pi/2, \pi]$, jolloin sisätulot ovat negatiivisia.

Sitä vastoin, mansikanystävien kerholle myytäessä myyntitulot saadaan kaavasta $g(x, y) = 2x + 7y$, jolloin $\nabla g = (2, 7)$. Tällöin tilanne muuttuu, sillä

$$D_{\vec{u}_2} g = \vec{u}_2 \cdot \nabla g = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

onkin positiivinen. Pekka voi siis kasvattaa myyntitulojaan liikkumalla vektorin $\vec{u}_2$ suuntaan niin pitkälle kuin hän pääsee. Tällöin myyntitulot maksimoituvat alueen D toisessa nurkkapisteessä $Q = (0, 50)$. Tällöin Pekan kannattaa siis leipoa pelkästään unelmaleivoksia. Häneltä jää silloin paljon mustikoita varastoon, koska piste Q ei ole suoralla $3x + y = 210$.

Huomautus 2.19. Esimerkin 2.18 tapaisia ongelmia, jossa sekä parametrialueen reunayhtälöt että maksimoitava funktio on muuttujien ensimmäisen asteen polynomeja, kutsutaan *lineaarisen ohjelmoinnin ongelmiksi*. Niiden ratkaisemiseksi on kehitetty tehokkaita menetelmiä. Niistä menetelmistä ja vaikeammista optimointiongelmista enemmän sovelletun matematiikan kursseilla.



Kuva 2.9: Funktion $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + xy + y^2)$ kuvaaja.

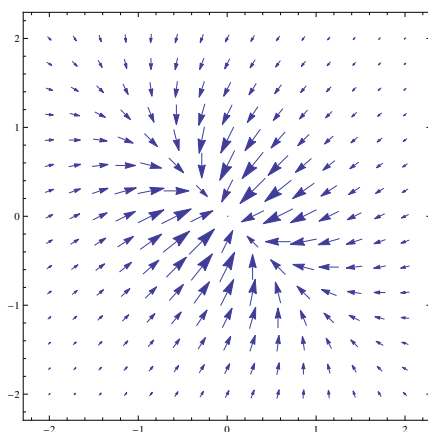
Esimerkki 2.20. Erään kukkulan korkeus (kilometreinä) pisteessä (x, y) saadaan funktiosta

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + xy + y^2}.$$

Kuvassa 2.9 on hahmoteltu maasto alueella $-2 \leq x, y \leq 2$. Määrätään funktion f gradientti ja tutkitaan *tasa-arvokäyrien* suhdetta gradienttiin.

Ratkaisu. Derivointikaavan $D(1/g) = -g'/g^2$ avulla saadaan osittaderivoimalla

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{2x + y}{(x^2 + xy + y^2 + 1)^2}, -\frac{x + 2y}{(x^2 + xy + y^2 + 1)^2} \right) = -\frac{1}{(1 + x^2 + xy + y^2)^2} (2x + y, x + 2y).$$

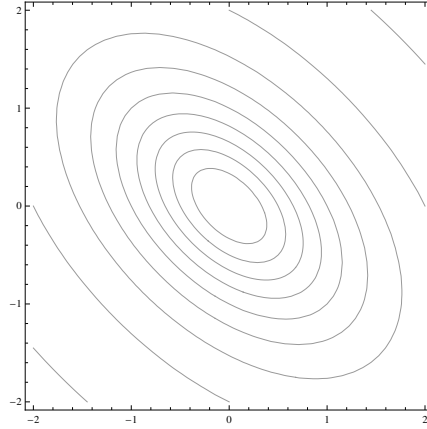


Kuva 2.10: Funktion $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + xy + y^2)$ gradientti.

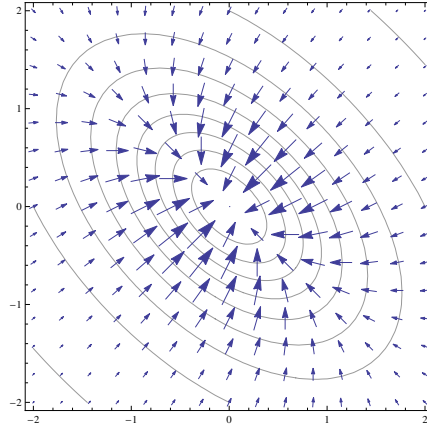
Huomaamme tästä kaksi asiaa. Kun $(x, y) = (0, 0)$, niin gradientti häviää (molemmat komponentit = 0). Tämä näkyy siinä, että kukkulan huippu on origossa (tai ehkä pikemminkin origon yläpuolella), jolloin funktio ei enää kasva lähdettiinpä sieltä mihin suuntaan tahansa. Tähän palaamme myöhemmin pohtiessamme ääriarvoja. Lisäksi, kun (x, y) on hyvin kaukana origosta, on kerroin $1/(1 + x^2 + xy + y^2)^2$ sangen pieni, ja gradienttivektori siis sangen lyhyt. Tämä näkyy kuvassa siten, että kaukana huipusta kukkulan korkeus on käytännössä vakio nolla. Kuvassa 2.10 on gradientti vektorikenttänä. Näemme siitä, että gradienttivektorit ovat pisimmillään kukkulan jyrkillä lounais- ja koillisrinteillä. Sitä vastoin kaakosta luoteeseen kulkevalla harjanteella korkeuden muutos on maltillisempaa, ja gradienttivektori vastaavasti lyhyempi.

Kukkulasta piirrettyssä kartassa käytettäisiin korkeusvaihteluiden ilmaisemiseen korkeuskäyriä, eli *xy*-tason sellaisia käyriä, jolla korkeudella $f(x, y)$ on tietty vakioarvo (eri korkeuskäyrällä eri arvo, mahdolliset arvot yleensä valitaan tasavälein). Piirto-ohjelma osaa piirtää myös tällaisia kuvia. Kuvassa 2.11 näemme tästä kukkulasta piirretyn kartan korkeuskäyrineen. Kun kyse ei ole kartasta puhutaan yleensä *tasa-arvokäyristä* korkeuskäyrien asemesta.

Teemamme kannalta mielenkiintoinen kuva saadaan yhdistämällä gradienttia kuvaava vektorikenttä korkeuskäyrien kanssa. Tämä nähdään Kuvassa 2.12. Gradientti kertoo jyrkimmän kasvusuunnan, eli suunnan,



Kuva 2.11: Funktion $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + xy + y^2)$ tasa-arvokäyrästä.



Kuva 2.12: Funktion $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + xy + y^2)$ tasa-arvokäyrästä ja gradientti.

jossa seuraava korkeuskäyrä on lähimpänä. Huomaamme myös, että gradientit ovat korkeuskäyriä vastaan kohtisuorassa. Tämä on helppo ymmärtää. Jos liikumme korkeuskäyrän suuntaan $\mathbf{u}$, niin funktion arvo ei muutu, joten suunnattu derivaatta on nolla, ja siis $\mathbf{u} \perp \nabla f$.

2.4 Vektoriarvoisen funktion differentioituvuus

Laajennamme differentioituvan kuvauksen määritelmän koskemaan vektoriarvoisia kuvauksia. Koska funktion arvot ovat vektoreita, sama pätee funktion arvojen muutoksille. Näitä muutoksia approksimoidaan nyt lineaarikuvauksen $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ avulla.

Määritelmä 2.21. Olkoot $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x} \in A^\circ$. Sanotaan, että funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$, jos on olemassa sellainen lineaarikuvauk $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, että

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - T(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Tällöin funktiota T sanotaan f :n lineaariseksi derivaataksi.

Seuraava lause palauttaa vektoriarvoisen funktion $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentioituvuuden komponenttifunktioiden $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituvuuden selvittämiseen.

Lause 2.22. Funktio $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in A^\circ$ silloin ja vain silloin, kun funktiot $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$, ovat kaikki differentioituvia. Jos $T_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on funktion f_i lineaarinen derivaatta pisteessä $\mathbf{x}$, niin funktion f lineaarinen derivaatta pisteessä $\mathbf{x}$ saadaan kaavasta

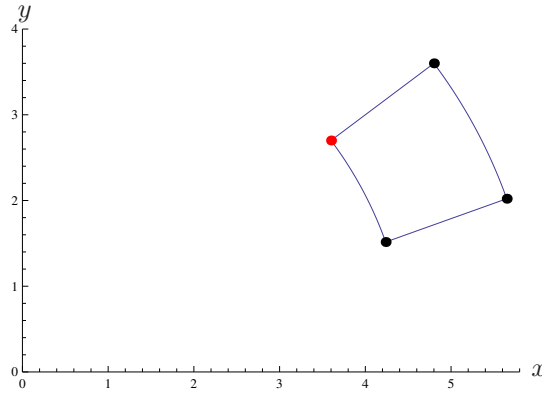
$$T(\mathbf{h}) = (T_1(\mathbf{h}), T_2(\mathbf{h}), \dots, T_m(\mathbf{h}))$$

kaikille $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Erityisesti funktio f on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$, jos kaikkien komponenttifunktioiden kaikki osittaisderivaatat $\partial_i f_j, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$, ovat jatkuvia pisteen $\mathbf{x}$ jossakin palloympäristössä $B(\mathbf{x}, r)$. Tällöin lineaarikuvauksen T matriisi luonnollisten kantojen suhteen on

$$M(T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}) \\ \nabla f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Lineaarisesta derivaatasta T käytetään kuvaavampaa merkintää $Df(\mathbf{x})$. Sen matriisia sanotaan funktion f Jacobin matriisiksi pisteessä $\mathbf{x}$.



Kuva 2.13: Funktion $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ arvoja

Esimerkki 2.23. Napakoordinaattimuunnoksessa piste $(r, \phi) \in A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$ kuvautuu pisteeksi $f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ (Kuva 2.13). Määritään sen lineaarinen derivaatta $Df(r, \phi)$.

Ratkaisu. Tässä

$$x = f_1(r, \phi) = r \cos \phi \quad \text{ja} \quad y = f_2(r, \phi) = r \sin \phi.$$

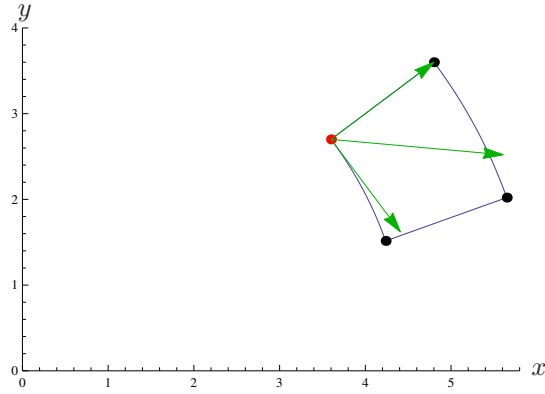
Näillä on alkeisfunktioina jatkuvat osittaisderivaatat joukon A sisäalueessa

$$A^\circ = \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0\}.$$

Pisteessä $P = (r_0, \phi_0)$ saadaan Jacobin matriisiksi siis

$$Df(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Kuvassa 2.13 yritetään hahmotella kuvausta f seuraavasti. Punaisella on merkitty piste $f(r_0, \phi_0)$, ja mustalla pisteet $f(r_0 + h_1, \phi_0)$, $f(r_0, \phi_0 + h_2)$ ja $f(r_0 + h_1, \phi_0 + h_2)$. Kuvan tilanteessa $r_0 = 4,5$, $\phi_0 = \arctan 3/4$, $h_1 = 1,5$ ja $h_2 = -0,3$. Lisäksi pisteitä yhdistävät käyrät $f(r_0 + h, \phi_0)$, $h \in [0, h_1]$, $f(r_0, \phi_0 + h)$, $h \in [h_2, 0]$, $f(r_0 + h, \phi_0 + h_2)$, $h \in [0, h_1]$ ja $f(r_0 + h_1, \phi_0 + h)$, $h \in [h_2, 0]$.



Kuva 2.14: Funktion $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ lineaarisen derivaatan käyttöä

Approksimoidaan näitä funktion f arvojen muutoksia lineaarisen derivaatan $Df(P)$ avulla. Matriisiker-
tolaskulla saadaan

$$Df(P) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1 \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Kuvassa 2.14 on piirretty vektorit $Df(P) \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (säteen suuntaisesti jatkuva nuoli), $Df(P) \begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix}$ (kaarta tan-
geeraava nuoli) ja $Df(P) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ (edellisten summavektori) alkamaan pisteestä $f(P)$. Koska kuvan selkeyden
vuoksi valittu $\mathbf{h} = (h_1, h_2) = (1,5; -0,3)$ ei ole kovin lyhyt vektori, huomaamme, että viimeksi mainittu
vektori ei enää kovin hyvin approksimoi todellista funktion arvon muutosta.

Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in A^\circ$, ja että $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{a}$. Tällöin voimme
ajatella funktion f kuvaajaa

$$C_f = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}$$

avaruuden $\mathbb{R}^{n+m}$ osajoukkona samaistamalla karteesisen tulon $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ avaruuden $\mathbb{R}^{n+m}$ kanssa ilmeisen bi-
jektion $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ välityksellä. Voimme tässä tilanteessa määritellä kuvaajan C_f

pisteeseen $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ piirretyn tangenttiavaruuden $T(f, \mathbf{a})$. Se muodostuu funktiota $f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$ approksimoivan (lineaarisen) funktion $f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})$ kuvaajasta siirrettynä pisteeseen $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$

$$T(f, \mathbf{a}) = \{(\mathbf{a} + \mathbf{h}, f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Algebran kielellä (tarvitaan Algebran Peruskurssien käsitteitä) voimme sanoa, että $T(f, \mathbf{a})$ on lineaarikuvauksen $R : \mathbf{h} \mapsto (\mathbf{h}, Df(\mathbf{a})(\mathbf{h}))$ kuva-avaruuden $\text{im}(R)$ sivuluokka $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a})) + \text{im}(R)$. Tässä $\text{im}(R)$ on avaruuden $\mathbb{R}^{n+m}$ eräs n -ulotteinen aliavaruus, ja tangenttiavaruus saadaan suuntaissiirtämällä kyseinen aliavaruus kulkemaan pisteen $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ kautta origon asemesta.

Differentioituvan n :n reaaliuuttujan funktion kuvaajan tangenttiavaruus on n -ulotteinen.

Useimmissa tapauksissa tässä $n + m \geq 4$, jolloin kuvaajan avulla havainnollistaminen on hankalaa. Aiemmin kuvatus tapauksen $n = 2, m = 1$ lisäksi tapaus $n = 1, m = 2$ esiintyy. Tällöin funktion $f = (f_1, f_2)$ kuvaaja on pistejoukko

$$C_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = f_1(x), z = f_2(x)\}.$$

Tangenttiavaruus on tällöin 1-ulotteinen eli kuvaajan pisteen kautta kulkeva suora. Derivaatta on $Df(x) = (f'_1(x), f'_2(x))$, joten pisteeseen $P = (x_0, y_0, z_0)$, $y_0 = f_1(x_0), z_0 = f_2(x_0)$, piirretty tangentti on vektorin $(1, f'_1(x_0), f'_2(x_0))$ suuntainen. Sen yhtälö on siis

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{f'_1(x_0)} = \frac{z - z_0}{f'_2(x_0)}.$$

Esimerkki 2.24. Tutkitaan funktion $f(x) = (x^2, x^3)$ kuvaajaa (Kuva 2.15. Tarkista, että piste $P = (1, 1, 1)$ on tällä kuvaajalla, ja määrää siihen piirretyn tangenttisuoran yhtälö.

Ratkaisu. Koska $f(1) = (1, 1)$, niin $P = (1, f_1(1), f_2(1))$. Lisäksi $Df(x) = (2x, 3x^2)$, joten $Df(1) = (2, 3)$. Näin ollen tangenttisuora on vektorin $(1, 2, 3)$ suuntainen, ja sen yhtälö standardimuodossa on

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}$$

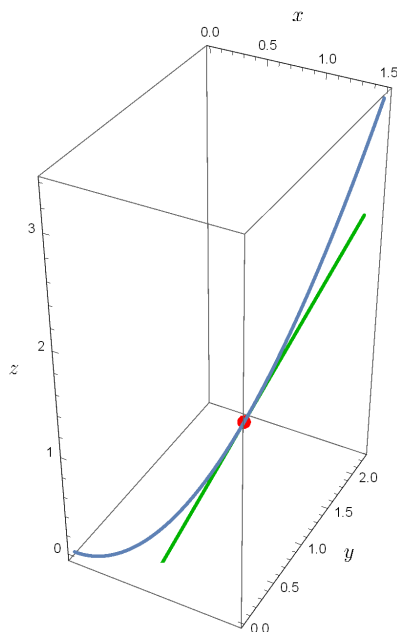
ja parametrimuodossa

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 2, 3).$$

Gradientin yhteydessä esiintyi Nabla-symboli ∇ . Käytettäessä avaruuden $\mathbb{R}^3$ karteesisia koordinaatteja x, y, z voidaan sitä ajatella "formaalisena" vektorina

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

jolloin $\mathbb{R}^3$:n osajoukossa määritellyn funktion f gradientin ∇f muodostaminen formaalisesti vastaa vektorin kertomista luvulla (tällä kertaa oikealta puolelta). Jos $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ onkin $\mathbb{R}^3$ -arvoinen vektorikenttä, niin voimme nablän ja sen kanssa muodostaa myös:



Kuva 2.15: Funktion $f(x) = (x^2, x^3)$ kuvaaja $y = x^2, z = x^3$ sekä sen pisteeseen $P = (1, 1, 1)$ piirretty tangentti

- Sisätulon eli pistetulon

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z},$$

jota kutsutaan *kentän $\vec{f}$ divergenssiksi*, ja

- ristitulon

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = (\partial_y f_3 - \partial_z f_2, \partial_z f_1 - \partial_x f_3, \partial_x f_2 - \partial_y f_1)$$

jota kutsutaan *kentän $\vec{f}$ roottoriksi* (eng. *curl*).

Näistä etenkin mekaniikassa ja sähkö- ja magnetismiopissa usein esiintyvistä käsitteistä hieman lisää monisteen kuudennessa luvussa 3-ulotteisen avaruuden pintaintegraalien yhteydessä.

2.5 Ketjusääntö

Kurssilla Analyysi I esiintyi derivoituvista (reaaliarvoisista reaalimuuttujan) funktioista muodostetun yhdistetyn funktion derivaattaa koskeva ketjusääntö. Jos $f(a) = b$, $y = f(x)$ on derivoituva pisteessä $x = a$, ja $z = g(y)$ puolestaan derivoituva pisteessä b , niin yhdistetyn funktion $z = h(x) := g(f(x))$ derivaatalle pisteessä $x = a$ saatiin kaava $h'(a) = g'(b)f'(a)$. Differentiaalin avulla tämä kirjoitettiin helposti muistettavassa muodossa

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Tämä ajattelu yleistyy tämän kurssin tilanteessa. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in A^\circ$, $\mathbf{y} \in B^\circ$. Jos tässä $f : A \rightarrow B$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ ja $g : B \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{y}$, niin tällöin väitämme, että yhdistetty kuvaus $h = g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$, ja lisäksi lineaarisille derivaatoille on voimassa kaava (ketjusääntö)

$$Dh(\mathbf{x}) = Dg(\mathbf{y}) \circ Df(\mathbf{x}).$$

Perustelemme tämän seuraavaksi hivenen epätäsmällisesti. Alla termit $p_1(\mathbf{h}), p_2(\mathbf{h}), \dots$ tarkoittavat vektorimuuttujan $\mathbf{h}$ ‘pieniä’ vektoriarvoisia funktioita, joilla on ominaisuus $\|p_i(\mathbf{h})\|/\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$ kun $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Tällöin voidaan perustella, että kahden pienen funktion summa on pieni, ja jos sovellamme pieneen funktioon lineaarikuvausta, saadaan tulokseksi pieni funktio. Näitä periaatteita soveltaen lasku etenee seuraavasti. Olkoon $\mathbf{h} \in B(\mathbf{0}, r)$, missä r määräytyy ehdosta $B(\mathbf{x}, r) \subseteq A$. Tällöin

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x} + \mathbf{h}) &= g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) \\ &= g(f(\mathbf{x}) + Df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) + p_1(\mathbf{h})) \\ &= g(\mathbf{y} + Df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) + p_1(\mathbf{h})) \\ &= g(\mathbf{y}) + Dg(\mathbf{y})(Df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) + p_1(\mathbf{h})) + p_2(\mathbf{h}') \\ &= g(\mathbf{y}) + (Dg(\mathbf{y}) \circ Df(\mathbf{x}))(\mathbf{h}) + Dg(\mathbf{y})(\partial_1(\mathbf{h})) + p_2(\mathbf{h}') \\ &= g(\mathbf{y}) + (Dg(\mathbf{y}) \circ Df(\mathbf{x}))(\mathbf{h}) + p_3(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

missä toisella rivillä sovelsimme funktion f differentioituvuutta, neljännellä rivillä funktion g differentioituvuutta, ja missä $\mathbf{h}' = Df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) + p_1(\mathbf{h})$ on pieni. Koska tässä $p_3(\mathbf{h})$ on pieni, niin olemme perustelleet seuraavan tuloksen.

Lause 2.25. (Ketjusääntö) Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in A^\circ$, $\mathbf{y} \in B^\circ$. Jos tässä funktio $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \rightarrow B$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ ja funktio $g = (g_1, g_2, \dots, g_\ell) : B \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{y}$, niin tällöin yhdistetty funktio $h = (h_1, h_2, \dots, h_\ell) := g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$ ja

$$Dh(\mathbf{x}) = Dg(\mathbf{y}) \circ Df(\mathbf{x}).$$

Erityisesti, jos käytämme Jacobin matriiseja, niin niiden alkoiden välillä on yhteys

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Esimerkki 2.26. Määritetään funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^x$ derivaatta pisteessä x esittämällä f sopivasti yhdistettynä funktiona.

Ratkaisu. Kirjoitetaan f yhdistettynä funktiona $f(x) = h(g(x))$, missä $h : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ ja $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}, g(x) = (x, x)$. Tässä $Dh(x_1, x_2) = (x_2 x_1^{x_2-1}, x_1^{x_2} \ln x_1)$, ja $Dg(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Näin ollen matriisikertolaskuna saadaan

$$Df(x) = Dh(x, x) \circ Dg(x) = (x \cdot x^{x-1}, x^x \ln x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^x + x^x \ln x.$$

Esimerkki 2.27. Selvitetään, miltä differentioituvan kahden reaalimuuttujan funktion $g(x, y)$ osittaisderivaatat näyttävät, kun kyseinen funktio annetaan napakoordinaattien (r, ϕ) avulla.

Ratkaisu. Haluamme siis laskea yhdistetyn funktion $h = (g \circ f)(r, \phi)$ osittaisderivaatat, kun $f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$. Esimerkikissä 2.23 selvitimme, että

$$Df(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Funktion $g(x, y)$ derivaatta on sen gradientti $Dg(x, y) = (g_x(x, y), g_y(x, y))$, joten ketjusäännön nojalla

$$\frac{\partial h}{\partial r} = g_x(r \cos \phi, r \sin \phi) \cos \phi + g_y(r \cos \phi, r \sin \phi) \sin \phi$$

ja

$$\frac{\partial h}{\partial \phi} = -r \sin \phi g_x(r \cos \phi, r \sin \phi) + r \cos \phi g_y(r \cos \phi, r \sin \phi).$$

2.6 Korkeamman kertaluvun osittaisderivaatoista

Jos funktiolla f on osittaisderivaatat $\partial_j f(\mathbf{x})$ kaikissa A :n sisäpisteissä $\mathbf{a}$ voimme edelleen kysyä, onko funktioilla $\partial_j f$ olemassa osittaisderivaatat. Jos näin on, päädymme toisen kertaluvun osittaisderivaattoihin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (\mathbf{a}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{a}) = f_{x_i x_j}(\mathbf{a}) \\ &= D_{x_j x_i} f(\mathbf{a}) = D_{ji} f(\mathbf{a}) = \partial_{ji} f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Vastaavasti voidaan määritellä korkeammat osittaisderivaatat. Jos muuttujia on n kappaletta, niin kertaluvun k osittaisderivaattoja on periaatteessa n^k kappaletta sen mukaan minkä muuttujien suhteen osittaisderivoidaan missäkin järjestyksessä.

Esimerkki 2.28. Määrätään funktion

$$f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$$

toisen kertaluvun osittaisderivaatat $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$.

Ratkaisu. On ensin laskettava osittaisderivaatat f_x ja f_y . Muistamme derivaatan $D_t \cos t = -\sin t$. Lisäksi tarvitaan sisäfunktion $g(x, y) = x^2 + y^2$ derivaattoja $g_x = 2x$ ja $g_y = 2y$. Näin ollen

$$f_x = -2x \sin(x^2 + y^2)$$

$$f_y = -2y \sin(x^2 + y^2).$$

Toisen kertaluvun osittaisderivaattoja laskettaessa tarvitsemme säännön $D_t \sin t = \cos t$ sekä lisäksi tulon derivoimiskaavan $D_t(fg) = (D_t f)g + f(D_t g)$.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= D_x(f_x) = D_x(-2x \sin(x^2 + y^2)) \\ &= (D_x(-2x)) \cdot \sin(x^2 + y^2) + (-2x) \cdot D_x \sin(x^2 + y^2) \\ &= -2 \sin(x^2 + y^2) + (-2x) \cdot (2x) \cos(x^2 + y^2) \\ &= -2 \sin(x^2 + y^2) - 4x^2 \cos(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Samaan tapaan saadaan

$$\begin{aligned} f_{xy} &= D_y(f_x) = D_y(-2x \sin(x^2 + y^2)) \\ &= (D_y(-2x)) \cdot \sin(x^2 + y^2) + (-2x) \cdot D_y \sin(x^2 + y^2) \\ &= 0 - 2x D_y \sin(x^2 + y^2) \\ &= -4xy \cos(x^2 + y^2), \\ f_{yx} &= D_x(f_y) = D_x(-2y \sin(x^2 + y^2)) \\ &= (D_x(-2y)) \cdot \sin(x^2 + y^2) + (-2y) \cdot D_x \sin(x^2 + y^2) \\ &= 0 - 2y D_x \sin(x^2 + y^2) \\ &= -4xy \cos(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

ja myös

$$\begin{aligned} f_{yy} &= D_y(f_y) = D_y(-2y \sin(x^2 + y^2)) \\ &= (D_y(-2y)) \cdot \sin(x^2 + y^2) + (-2y) \cdot D_y \sin(x^2 + y^2) \\ &= -2 \sin(x^2 + y^2) + (-2y) \cdot (2y) \cos(x^2 + y^2) \\ &= -2 \sin(x^2 + y^2) - 4y^2 \cos(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Edellisessä Esimerkissä huomiomme kiinnittyä havaintoon $f_{xy} = f_{yx}$. Tämä ei ole sattumaa.

Lause 2.29. Oletetaan, että funktiolla f on avoimessa joukossa $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olemassa kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat $\partial_{ij} f$, jotka lisäksi ovat jatkuvia. Tällöin sen ns. sekaderivaatat yhtyvät, eli kaikille $i, j, 1 \leq i < j \leq n$, ja kaikille $\mathbf{a} \in A$ on voimassa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Todistus. Sivuutetaan. Ks. esimerkiksi Kari Ylisen moniste *Usean Muuttujan Funktiot*. □

Huomautus 2.30. Helposti nähdään, että sekaderivaatat f_{xy} ja f_{yx} pisteessä (x, y) saadaan saman kaksinkertaisen erotusosamäärän raja-arvoina:

$$f_{xy} = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)}{hk}$$

ja

$$f_{yx} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)}{hk}.$$

Ainoa ero on raja-arvoprosessien järjestyksessä. Yleissääntö Analyysissa on, että kahden raja-arvoprosessin järjestystä ei voi vaihtaa kuin tietyn säännöllisysoletuksen toteutuessa. Sekaderivaattojen kohdalla osittaisderivaattojen jatkuvuus on sopiva helposti todennettava säännöllisysehto, ja tässä yhteydessä riittävä.

Huomattakoon myös, että sekaderivaatat eivät *aina* yhdy. Standardiesimerkki tästä tilanteesta on funktio f , joka määritellään $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ kun $(x, y) \neq (0, 0)$ ja $f(0, 0) = 0$. Harjoitustehtävänä voit laskea, että tälle funktiolle $f_{xy}(0, 0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0, 0)$.

Määritelmä 2.31. Jos $U \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ on funktio, niin sanomme f :n olevan *luokkaa* C^m , jos f :n kaikki kertalukua enintään m olevat osittaisderivaatat ovat jatkuvia U :ssa. Sanomme, että f on *luokkaa* C^∞ , jos f on luokkaa C^m kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m . Sanomme, että vektorikenttä $\vec{g} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ on luokkaa C^m , jos jokainen komponenttifunktio $g_i, i = 1, 2, \dots, m$ on luokkaa C^m .

Erityisesti siis luokan C^2 funktion sekaderivaatat yhtyvät Lauseen 2.29 mukaisesti.

Huomautus 2.32. Jos oletamme, että $U \subseteq \mathbb{R}^3$ on avoin, ja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$ ovat luokkaa C^2 , niin voit harjoitustehtävänä osoittaa, että

$$\nabla \times (\nabla f) = (0, 0, 0)$$

ja

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{g}) = 0$$

koko U :ssa. Nämä tulokset on helpompi muistaa muodossa *gradientin roottori häviää*, ja *roottorin divergenssi häviää*.

Luku 3

Usean muuttujan funktion integraalilaskentaa

3.1 Moniulotteisen integraalin määritelmä

Seuraavaksi yleistämme kurssilta Analyysi II tuttua määrätyn integraalin käsitettä vektorimuuttujan funktioille. Siellä visuaalinen mielikuva funktion $f(x)$ integraalista oli kuvaajan $y = f(x)$ ja x -akselin rajaaman alueen pinta-ala. Kahden muuttujan funktion tapauksessa vastaava mielikuva on kuvaajapinnan $z = f(x, y)$ ja xy -tason rajaaman kappaleen tilavuus. Korkeammissa ulottuvuuksissa vastaava visualisointi on haastavampaa. Lähestymistapamme on samanlainen ja perustuu integroimisvälin jakoihin sekä niihin liittyviin ylä- ja alarajoihin. Yhden muuttujan tapauksessa välin $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kokoa mitattiin sen pituudella $b - a$. Useampiulotteisessa maailmassa tämä korvataan osavälin mitan käsitteellä.

Määritelmä 3.1. Olkoot $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, reaalityyppiset luvut. Olkoon I välien $I_i = [a_i, b_i]$ karteesinen tulo

$$I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ kaikille } i\}.$$

Lukua

$$m(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

kutsutaan välin I *mitaksi*.

Huomautus 3.2. Kun $n = 1$, niin saamme tutun välin pituuden käsitteen. Kun $n = 2$ suorakaiteen $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ mitta on sen pinta-ala. Kun $n = 3$, niin väli on suorakulmainen särmiö, ja sen mitta on sen tilavuus.

Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ jokin väli. Valitsemalla kutakin koordinaattia x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, kohti välin $[a_i, b_i]$ jaon D_i (eli jakopisteitä $x_{i0} = a_i < x_{i1} < x_{i2} < \dots < x_{ik_i} = b_i$) saamme osavälien karteesisten tulojen $I_1, I_2, \dots, I_m$ kokoelman. Tässä osavälien lukumäärä $m = \prod_{i=1}^n k_i$, ja kukin osaväleistä I_j , $j = 1, 2, \dots, m$, on joidenkin osavälien $[x_{i,k_i}, x_{i,k_i+1}]$ karteesinen tulo. Helposti näemme, että

- I on osavälien I_j , $j = 1, 2, \dots, m$, unioni.

- Jos I_j ja $I_{j'}$ ovat kaksi eri osaväliä, niin niiden sisäosat eivät leikkaa.
- Välin I mitta on osavälien I_j mittojen summa (vrt. suljetun välin $[a, b]$ pituus on sen jaon osavälien pituuksien summa).

Kutsumme osavälien $I_j, j = 1, 2, \dots, m$, kokoelmaa välin I *jaoksi*. Jaosta käytetään usein merkintää D (tai P).

Määritelmä 3.3. Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ väli, $D = \{I_j \mid j = 1, 2, \dots, m\}$ sen jokin jako, ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Tällöin voimme muodostaa funktion f jakoon D liittyvät ylä- ja alasummat

$$S_D(f) = \sum_{j=1}^m M_j m(I_j)$$

ja

$$s_D(f) = \sum_{j=1}^m m_j m(I_j),$$

missä luvut

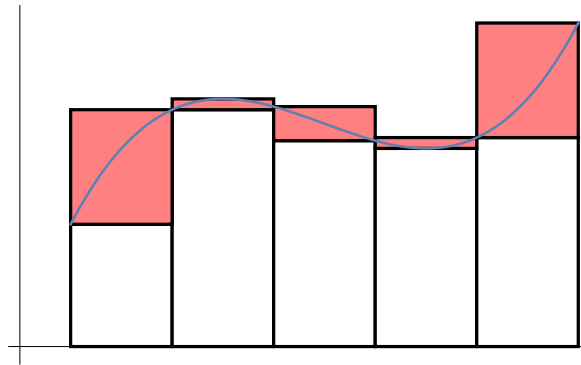
$$M_j = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in I_j\}$$

ja

$$m_j = \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in I_j\}$$

ovat funktion f supremum ja infimum osavälillä I_j .

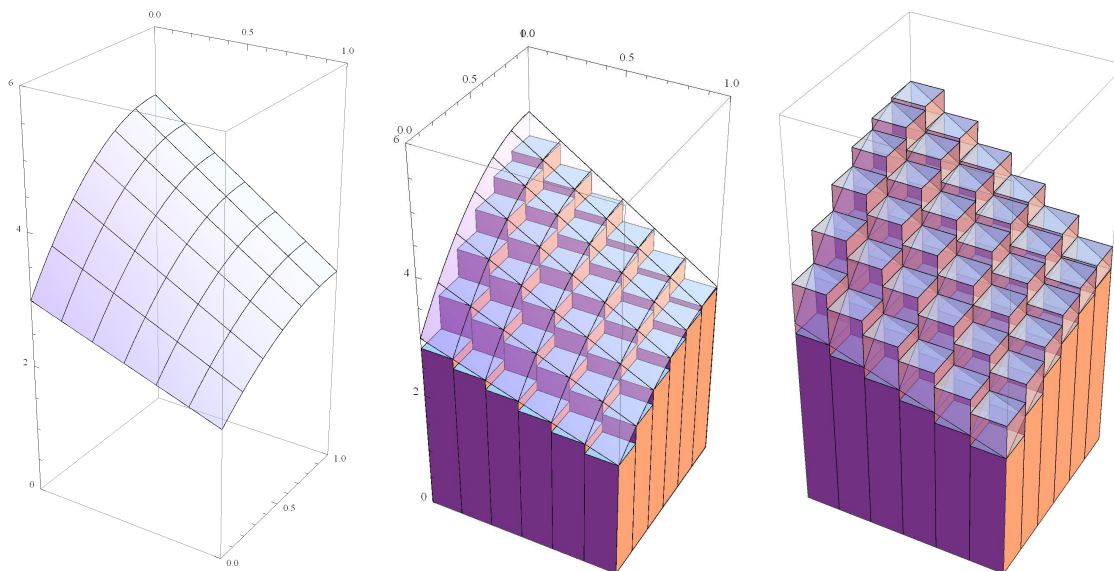
Jos tässä $f \geq 0$ koko välillä I , niin m_j on korkeimman sellaisen pylvään korkeus, jonka kantana on osaväli I_j ja joka pysyy kuvaajan $C_f = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y = f(\mathbf{x})\}$ alapuolella osavälillä I_j . Vastaavasti M_j on matalimman sellaisen pylvään korkeus, joka osavälillä I_j on kuvaajan C_f yläpuolella.



Kuva 3.1: Erään yhden muuttujan funktion kuvaaja, ja sen erääseen jakoon liittyvä alasumma ja yläsumma

Kun $n = 1$ ja $f(x) \geq 0$ välillä I , niin alasumma s_D laskee yhteen korkeimpien sellaisten pylväiden pinta-alat, jotka mahtuvat kuvaajan alapuolelle, ja joiden kannat vastaavat jakoa D_1 . Kuvassa 3.1 nämä pylväät on piirretty valkoisina. Yläsumma S_D puolestaan laskee yhteen matalimpien sellaisten pylväiden pinta-alat,

jotka peittävät koko kuvaajan alapuolisen alueen, ja joiden kannat edelleen vastaavat jakoa D_1 . Kuvan 3.1 pinkit laatikot kuvaavat alapylväiden tarvitsemia korotuskappaleita. Pyrkimyksenä on laskea kuvaajan ja x_1 -akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa A approksimoimalla sitä alapuolelta alasummilla s_D ja yläpuolelta yläsummilla S_D . Kuvan perusteella epäyhtälöt $s_D \leq A \leq S_D$ ovat ilmeisiä.



Kuva 3.2: Erään kahden muuttujan funktion kuvaaja, ja sen erääseen jakoon liittyvä alasumma ja yläsumma

Kun $n = 2$, voimme vielä visualisoida tilannetta. Tällöin ylä- ja alasumma saadaan mainittujen pylväiden yhteenlaskettuna tilavuutena. Kuvassa 3.2 on vasemmalla erään funktion kuvaaja eräällä välillä, sekä välin jako 6×6 osaväliin. Keskellä on kuvaajan lisäksi alasummaan liittyvä pylväikkö. Oikealla on näiden lisäksi mukana jakoon liittyvää yläsummaa kuvaava pylväikkö. Hahmottamisen helpottamiseksi on kuvaaja ja yläpylväikkö piirretty osin läpikuultavina. Pyrkimyksenä on laskea kuvaajan ja tason $x_3 = 0$ väliin jäävän kappaleen tilavuus V approksimoimalla sitä alapuolelta alasummilla s_D ja yläpuolelta yläsummilla S_D . Kuvan perusteella epäyhtälöt $s_D \leq V \leq S_D$ ovat ilmeisiä.

Teoria kehitetään sitten täysin analogisesti yhden muuttujan tapauksen kanssa. Kiinnitetään väli I ja rajoitettu funktio f .

- (i) Jokaiselle jaolle D on voimassa $s_D(f) \leq S_D(f)$.
- (ii) Jos D' on jaon D tihennys (eli, jos tihennämme jakoa D_i yhden tai useamman muuttujan x_i osalta), niin $s_D(f) \leq s_{D'}(f)$, $S_{D'}(f) \leq S_D(f)$.
- (iii) Millä tahansa kahdella jaolla on yhteinen tihennys. Sen seurauksena jokainen yläsumma on suurempi tai yhtäsuuri kuin jokainen alasumma.
- (iv) Koska yläsummien joukko on edellisen havainnon perusteella alhaalta rajoitettu, voimme määritellä

funktion f yläintegraalin yli välin I asettamalla

$$\overline{\int}_I f = \inf_D S_D(f).$$

- (v) Koska alasummien joukko on vastaavasti ylhäältä rajoitettu, voimme määritellä funktion f alaintegraalin yli välin I asettamalla

$$\underline{\int}_I f = \sup_D s_D(f).$$

Määritelmä 3.4. Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ väli, ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Sanotaan, että funktio f on *integroituva yli välin I* , jos sen ylä- ja alaintegraalit yhtyvät. Tällöin ylä- ja alaintegraalin yhteistä arvoa S kutsutaan funktion f *määräytyksi integraaliksi yli välin I* . Siitä käytetään merkintöjä

$$\int_I f \quad \text{ja} \quad \int_I f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Lause 3.5. Olkoot I ja f kuten yllä. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät.

- (i) Funktio f on integroituva yli välin I ja sen arvo on S .
- (ii) Kutakin lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen jako $D(\epsilon)$ että $s_{D(\epsilon)}(f) > S - \epsilon$, ja sellainen jako $D'(\epsilon)$ että $S_{D'(\epsilon)}(f) < S + \epsilon$.
- (iii) Kutakin lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen jako $D(\epsilon)$, että

$$S_{D(\epsilon)}(f) - s_{D(\epsilon)}(f) < \epsilon.$$

- (iv) On olemassa sellainen jono $D(n), n = 1, 2, \dots$ jakoja, että

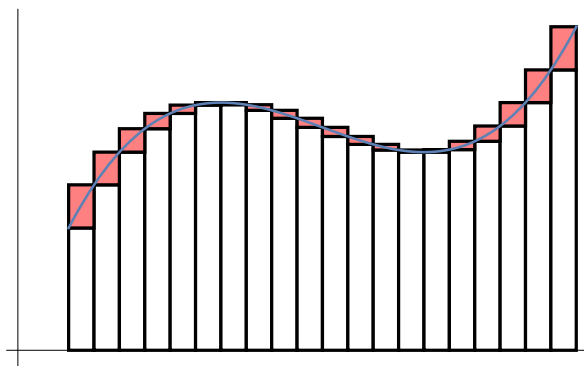
$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{D(n)}(f) = S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{D(n)}(f).$$

Todistus. Kuten vastaavat tulokset kurssilla Analyysi II. □

Kuvassa 3.1 pinkkien laatikoiden yhteenlaskettu pinta-ala on ylä- ja alasummien erotus $S_D - s_D$. Kuvassa 3.2 vastaavaa ylä- ja alasummien erotus on oikeanpuoleisimman kuvan pienten laatikoiden yhteenlaskettu tilavuus.

Kuten kurssilla Analyysi II ensimmäinen tavoite on osoittaa, että välillä $I \subset \mathbb{R}^n$ jatkuva funktio on integroituva yli tämän välin. Yhden muuttujan funktion tapauksessa tasaisen jatkuvuuden vuoksi riittävän tiheässä jaossa jokaisella osavälillä yläpylvään ja alapylvään korkeusero saadaan halutun rajan $\epsilon > 0$ alapuolelle, ks. Kuva 3.3. Tällöin ylä- ja alasummien erotus on enintään $\epsilon \times$ välin pituus, mikä saadaan mielivaltaisen pieneksi, ja väite seuraa Lauseesta 3.5. Sivuaaineopiskelijoiden Analyysi II:n monisteessa ei käytetty tasaista jatkuvuutta, vaan tällaisen jaon olemassaolo todistettiin suoraan.

Nyt esitettävä usean muuttujan funktiota käsittelevä todistus perustuu tasaiseen jatkuvuuteen, joten tähän kohtaan jää aukko niille lukijoille, jotka eivät ole perehtyneet tarvittavaan käsitteeseen. Välin I kompaktisuus on isossa roolissa, ja Lause 1.29 tulee käyttöön.



Kuva 3.3: Tasaisen jatkuvuuden vuoksi kutakin $\varepsilon > 0$ kohti löytyy jako, jossa kaikkien pinkkien laatikoiden korkeus on $< \varepsilon$

Lause 3.6. Olkoon $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ jokin (kompakti) väli. Jos funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin tällöin se on integroitava yli välin I .

Todistus. Käytämme Lauseen 3.5 kolmatta kohtaa. Kiinnitetään siis $\varepsilon > 0$. Asetetaan $\varepsilon' = \varepsilon/m(I)$. Koska I on kompakti, niin funktio f on siinä tasaisesti jatkuva. On siis olemassa sellainen luku $\delta > 0$ että $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon'$ aina kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I$ toteuttavat epäyhtälön $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. Valitaan sitten välin I jokin sellainen jako $D = D(\varepsilon)$, että $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ aina, kun $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ kuuluvat samaan osaväliin I_j . Eräs tapa päästä tähän on käyttää kunkin koordinaatin suhteen jakoa osaväleihin joiden pituus on $< \delta/\sqrt{n}$. Jos tällöin $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ovat samalla osavälillä, niin $|x_i - y_i| < \delta/\sqrt{n}$ kaikilla i :n arvoilla, ja näin ollen

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 < \sum_{i=1}^n \delta^2/n = \delta^2.$$

Kiinnitetään osaväli I_j . Jos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I_j$, niin $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ ja näin ollen $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon'$. Koska funktio f saavuttaa kullakin osavälillä suurimman ja pienimmän arvonsa (Lause 1.27), niin osavälillä I_j sen supremum M_j ja infimum m_j nekin toteuttavat epäyhtälön

$$M_j - m_j < \varepsilon'.$$

Näin ollen jakoa D vastaavien yläsummien erotukselle saadaan yläraja.

$$\begin{aligned} S_D(f) - s_D(f) &= \sum_j M_j m(I_j) - \sum_j m_j m(I_j) \\ &= \sum_j (M_j - m_j) m(I_j) \\ &< \varepsilon' \sum_j m(I_j) = \varepsilon' m(I) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Väite seuraa tästä. □

Kehitetyllä integraalin käsitteellä on lisäksi seuraavia ominaisuuksia. Niiden perustelu on oleellisen osin sama kuin yhden muuttujan tapauksessa (vrt. kurssiin *Analyyysi II*):

(i) (Positiivisuus) Jos f on integroituva yli välin $I \subset \mathbb{R}^n$ ja $f(\mathbf{x}) \geq 0$ kaikille $\mathbf{x} \in I$, niin

$$\int_I f \geq 0.$$

(ii) (Lineaarisuus) Jos f ja g ovat integroituvia yli välin $I \subset \mathbb{R}^n$, ja $a, b \in \mathbb{R}$ ovat vakioita, niin tällöin funktiot $|f|$ ja $af + bg$ ovat integroituvia yli välin I . Lisäksi

$$\int_I (af + bg) = a \int_I f + b \int_I g.$$

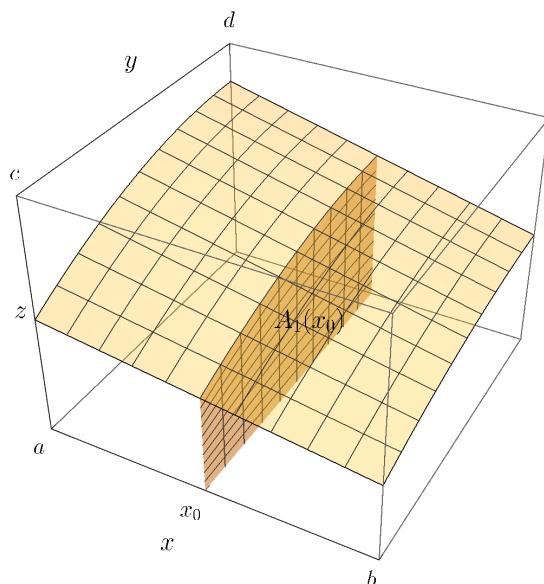
(iii) (Väliadditiivisuus) Olkoot $[a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n$ ovat välejä, ja vakio c väliltä $a_{i_0} < c < b_{i_0}$. Muodostetaan välit $I_1 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_{i_0}, c] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ja $I_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [c, b_{i_0}] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Jos f on integroituva yli välin $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, niin se on integroituva myös yli osavälien I_1 ja I_2 . Lisäksi

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

Edelleen, jos f tiedetään integroituvaksi yli välien I_1 ja I_2 , niin se on integroituva yli välin I , ja y.o. kaava on tällöinkin voimassa.

3.2 Iteroitu integraali

Tarvitsemme myös menetelmiä integraalien laskemiseksi. Osoittautuu, että lukiossa ja aiemmilla kursseilla opitut, määräämättömän integraalin käsitteeseen perustuvat menetelmät pääsääntöisesti riittävät! Tarkastellaan seuraavassa ensin kahden muuttujan funktion tapusta.



Kuva 3.4: x -koordinaatin vakioarvoa vastaava poikkileikkauspinta $A_1(x_0)$

Kahden muuttujan funktiolle $f(x, y)$ voidaan muodostaa useita erilaisia integraaleja. Ensimmäisenä tulee ehkä mieleesi matkia osittaisderivaattoja muodostettaessa käytettyä menettelyä: ajatellaan, että toiselle muuttujista on annettu jokin kiinteä arvo ja toinen on edelleen ‘vapaa muuttuja’. Tällöin on alkuperäinen funktio mielletävissä yhden muuttujan funktioksi ja voimme muodostaa määrätty integraalit

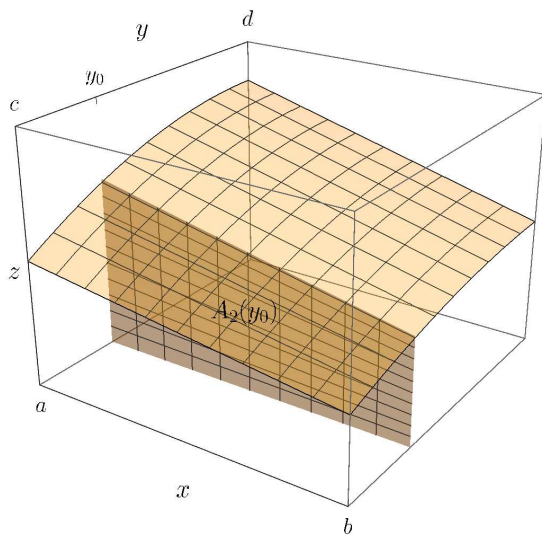
$$\int_{x=a}^b f(x, y) dx, \quad \int_{y=c}^d f(x, y) dy,$$

joista ensimmäisessä on ajateltu, että y :llä on kiinteä arvo, ja jälkimmäisessä puolestaan x :llä. Se muuttuja, jonka suhteen integrointi tehdään, nähdään merkinnässä esiintyvistä *differentiaalista* (dx tai dy). Tätä voi vielä korostaa kirjoittamalla kyseinen muuttuja näkyviin integroimisalarajan yhteyteen. Useissa lähdekirjoissa tätä lisäselvennystä ei käytetä, joten kannattaa opetella kiinnittämään huomiota integroitavan funktion yhteydessä esiintyvään differentiaaliin.

Tällaisella integraalilla sen tavanomainen tulkinta kuvaajan alla olevan alueen pinta-alana. Suorakaiteen $[a, b] \times [c, d]$ yläpuolella, tason $z = 0$ ja kuvaajapinnan $z = f(x, y)$ väliin jää 3-ulotteinen kappale. Tällöin integraali

$$A_1(x_0) = \int_{y=c}^d f(x_0, y) dy$$

laskee kyseisen kappaleen ja tason $x = x_0$ poikkileikkauksen pinta-alan $A_1(x_0)$. Esimerkki tällaisesta poikkileikkauspinnasta on Kuvassa 3.4.



Kuva 3.5: y -koordinaatin vakioarvoa vastaava poikkileikkauspinta $A_2(y_0)$

Vastaavasti integraali

$$A_2(y_0) = \int_{x=a}^b f(x, y_0) dx$$

laskee ko. kappaleen ja tason $y = y_0$ poikkileikkauspinnan alan. Esimerkki tällaisesta on Kuvassa 3.5.

Mikäli tällainen integraali ylipäättään on olemassa, niin sen arvo tietenkin riippuu toisen muuttujan arvosta, joten integraalien arvot määrittelevät jäljelle jääneen muuttujan funktion.

Esimerkki 3.7.

$$\int_{y=0}^1 (x^2y + xy^2) dy = \left|_{y=0}^1 \left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right.$$

Mikään ei määrättyä integraalia laskettaessa estä sitä, että integroimisrajat riippuvat jostakin muusta muuttujasta kuin integroimismuuttujasta itsestään.

Esimerkki 3.8. Oletetaan, että $x \in [0, 1]$. Tällöin $x^2 \leq \sqrt{x}$, ja

$$\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (x^2y + xy^2) dy = \left|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} \left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2\sqrt{x}}{3} - \frac{x^6}{2} - \frac{x^7}{3} \right.$$

Kun muotoa $\int_a^b f(x, y) dx$ tai $\int_c^d f(x, y) dy$ oleva integraali lasketaan, vastaus siis riippuu vakiona pidetystä toisesta muuttujasta, eli integraalin arvo on tämän toisen muuttujan funktio. Voimme siis yrittää integroida saadun funktion jäljelle jääneen muuttujan suhteen. Tällöin puhutaan *iteroidusta integraalista*. Ne ovat siis muotoa

$$\int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy$$

tai

$$\int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) dy \right) dx,$$

missä sulkujen sisällä on ensin laskettu ns. *sisäintegraali*, jonka arvo (yleensä) riippuu *ulomman integraalin* integroimismuuttujasta.

Usein käytetään kompaktimpaa merkintää

$$\int_{y=c}^d \int_{x=a}^b f(x, y) dx dy \quad \text{tai} \quad \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x, y) dy dx.$$

Huomaa tässä, että sisäintegraalin integroimismuuttujaa vastaava differentiaali (yllä vasemmalla dx ja oikealla dy) on sijoitettu sisemmälle. Tästä kannattaa pitää kiinni sekaannusten välttämiseksi (etenkin silloin kun integroimisvälin alarajan yhteydessä ei kerrota integroimismuuttujaa erikseen).

Esimerkki 3.9. Lasketaan iteroidut integraalit

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (xy + x^2) dy dx \quad \text{ja} \quad \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 (xy + x^2) dx dy.$$

Ratkaisu. Integroimalle ensin y :n ja sitten x :n suhteen saadaan

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 (x^2 + xy) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(x^2 + \frac{x}{2} \right) dx = \left|_{x=0}^1 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right) \right. \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Jos taas integroidaan ensin x :n ja sitten y :n suhteen saadaan

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 (x^2 + xy) dx \right) dy \\ &= \int_{y=0}^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2} \right) dy \\ &= \left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{4} \right]_{y=0}^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Varmaan huomasit, että lopputulos ei riippunut integroimisjärjestyksestä. Osoittautuu, että näin käy melkein aina. Lisäksi osoittautuu nämä eri järjestyksissä lasketut iteroidut integraalit laskevat funktion $f(x, y)$ integraalin yli välin $I = [a, b] \times [c, d]$! Tämä tulos tunnetaan Fubinin lauseena. Se on voimassa seuraavaksi esitettävää versiota yleisemmissä tilanteissa. Niiden tarkastelu on kuitenkin syytä siirtää muille kursseille kuten *Lebesguen mitta ja integraali*.

Lause 3.10. (*Fubini*) Oletetaan, että $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ja että funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva. Tällöin integraali $\int_I f$ voidaan laskea kumpana tahansa iteroituna integraalina

$$\int_I f = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) dy \right) dx = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Todistus. Koska f on jatkuva, niin integraalit $\int_I f$, $\int_{y=c}^d f(x, y) dy$ ja $\int_{x=a}^b f(x, y) dx$ ovat kaikki olemassa, toinen kaikille $x \in [a, b]$ ja kolmas kaikille $y \in [c, d]$.

Merkitään sisäintegraalin arvoa $F(x) = \int_{y=c}^d f(x, y) dy$. Todistetaan yhtäsuuruus

$$\int_I f = \int_{x=a}^b F(x) dx.$$

Toista iteroitua integraalia koskeva väite jätetään harjoitustehtäväksi. Vinkki: vaihda muuttujien x ja y roolit keskenään!

Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Lauseiden 3.6 ja 3.5 nojalla on olemassa sellainen jako D , johon liittyvien funktion $f(x, y)$ ylä- ja alasummien $S_D(f)$ ja $s_D(f)$ välinen erotus on $< \varepsilon$. Olkoot $D_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ja $D_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$, jakoon D liittyvät 1-ulotteiset jaot. Kiinnitetään x :n osaväli $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ja valitaan mielivaltainen $x \in I_i$. Olkoot M_{ij} (vast. m_{ij}) funktion $f(x, y)$ supremum (vast. infimum) välissä $I_i \times [y_{j-1}, y_j]$, $1 \leq j \leq m$. Tutkitaan sisempään integraaliin $\int_{y=c}^d f(x, y) dy$ liittyviä, jaon D_2 määrittämiä ylä- ja alasummia S ja s . Selvästi kaikilla $y \in [y_{j-1}, y_j]$ on voimassa

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}.$$

Koska $S \geq F(x) \geq s$, saamme kohdassa x lasketulle sisäintegraalille arviot

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq F(x) \leq \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

Tämä arvio on voimassa kaikille $x \in I_i$. Nähdyn perusteella

$$\inf_{x \in I_i} F(x) \geq \sum_{j=1}^m m_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

ja

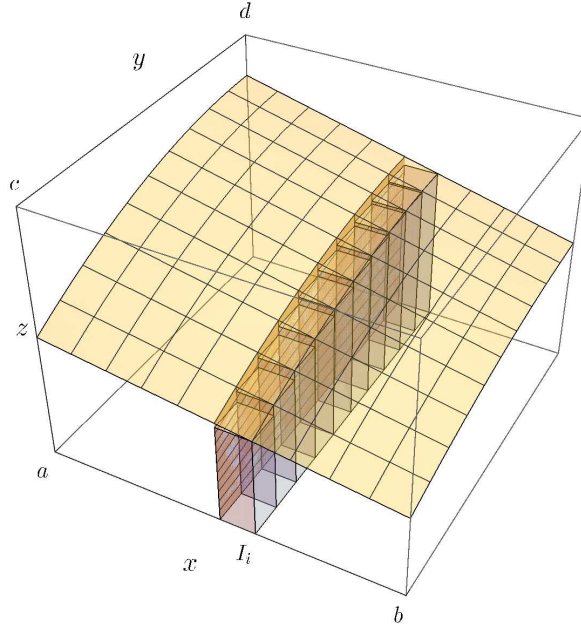
$$\sup_{x \in I_i} F(x) \leq \sum_{j=1}^m M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

Kerrotaan nämä epäyhtälöt välin I_i mitalla $(x_i - x_{i-1})$. Tulokseksi saadaan x -väliä I_i vastaavien osavälien $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$, kontribuutioille ylä- ja alasummiin $S_D(f)$ ja $s_D(f)$ arviot

$$s_i := \sum_{j=1}^m m_{ij}m([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]) \leq (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in I_i} F(x), \quad (*)$$

ja

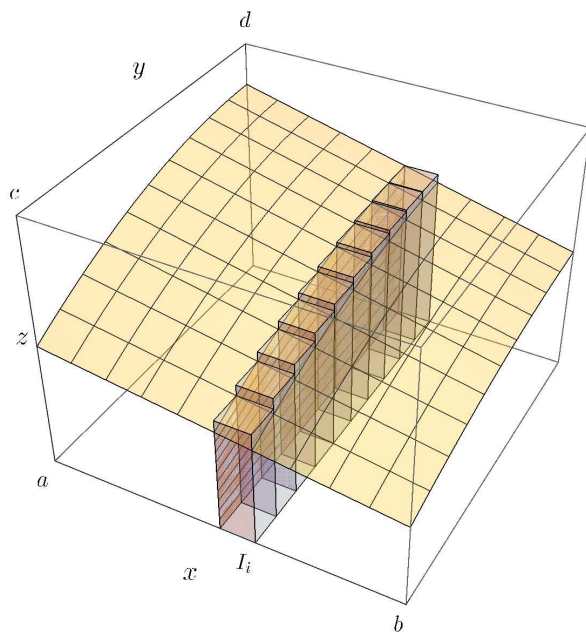
$$S_i := \sum_{j=1}^m M_{ij}m([x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]) \geq (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in I_i} F(x). \quad (**)$$



Kuva 3.6: Osaväliä $x \in I_i$, $y \in [c, d]$ vastaava alasumma on pienempi kuin välin I_i osuus poikkileikkausfunktion $F(x)$ alasummasta.

Havainnollistetaan näitä epäyhtälöitä kuvien avulla. Kuvassa 3.6 näemme, miksi aläpölyväikön poikkileikkaus on pienempi kuin tutkittavan kappaleen poikkileikkaus $F(x)$ koko välillä $x \in I_i$. Epäyhtälö $(*)$ kertoo juuri tämän.

Kuva 3.7 puolestaan havainnollistaa sitä, että yläpölyväikön poikkileikkaus on suurempi kuin tutkittavan kappaleen poikkileikkaus $F(x)$ koko välillä $x \in I_i$. Epäyhtälö $(**)$ kertoo juuri tämän.



Kuva 3.7: Osaväliä $x \in I_i, y \in [c, d]$ vastaava yläsumma on suurempi kuin välin I_i osuus poikkileikkausfunktion $F(x)$ yläsummasta.

Lasketaan sitten saadut arviot yhteen kaikilta muuttujan x osaväleiltä $I_i, i = 1, 2, \dots, n$. Tulokseksi saadaan, että

$$s_D(f) = \sum_{i=1}^n s_i \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in I_i} F(x),$$

ja

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^n S_i \geq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in I_i} F(x).$$

Huomaa, että tässä oikeilla puolilla esiintyvät funktion $F(x)$ integraaliin $\int_a^b F(x) dx$ ja välin $[a, b]$ jakoon D_1 liittyvät ylä- ja alasummat $S_{D_1}(F)$ ja $s_{D_1}(F)$. Jaon D valinnan perusteella $S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon$, joten

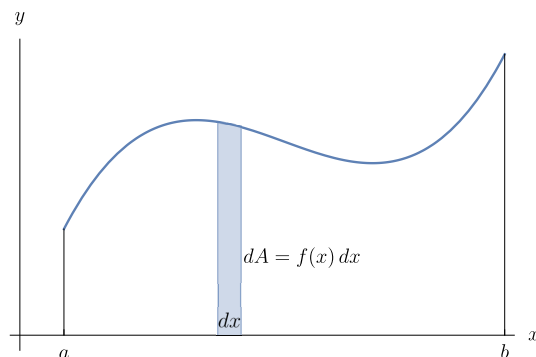
$$s_D(f) \leq s_{D_1}(F) \leq S_{D_1}(F) \leq S_D(f) \leq s_D(f) + \varepsilon.$$

Näemme siis erityisesti, että epäyhtälö $S_{D_1}(F) - s_{D_1}(F) < \varepsilon$ on voimassa, joten funktio F on integroituva yli välin $[a, b]$. Koska lisäksi luku $\int_I f$ on välillä $[s_D(f), S_D(f)]$, niin näemme myös, että

$$\left| \int_I f - \int_{x=a}^b F(x) dx \right| < \varepsilon.$$

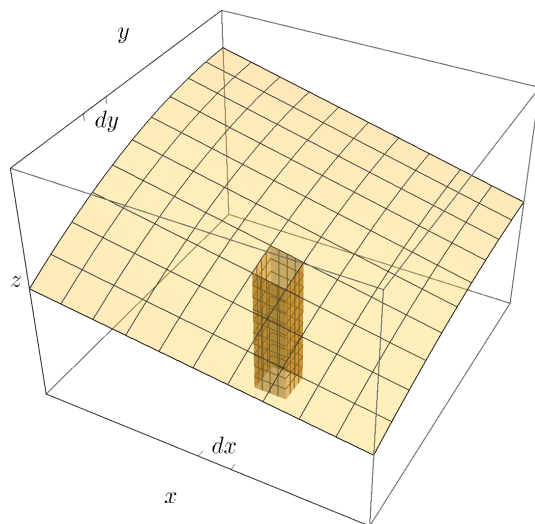
Tämä on mahdollista kaikille $\varepsilon > 0$ vain, jos mainitut integraalit yhtyvät. Se olikin juuri väite. $\square$

Esiintyvien lauseiden tulkinta *differentiaalien* avulla helpottaa niiden sisällön ymmärtämistä. Suureen, esimerkiksi x muutoksista käytämme merkintää Δx , ja pinta-alan A muutoksesta merkintää ΔA . Integrointiin kuuluvassa raja-arvoprosessissa muutokset $\rightarrow 0$, mutta niiden suhteilla on raja-arvo. Kurssilla Analyysi



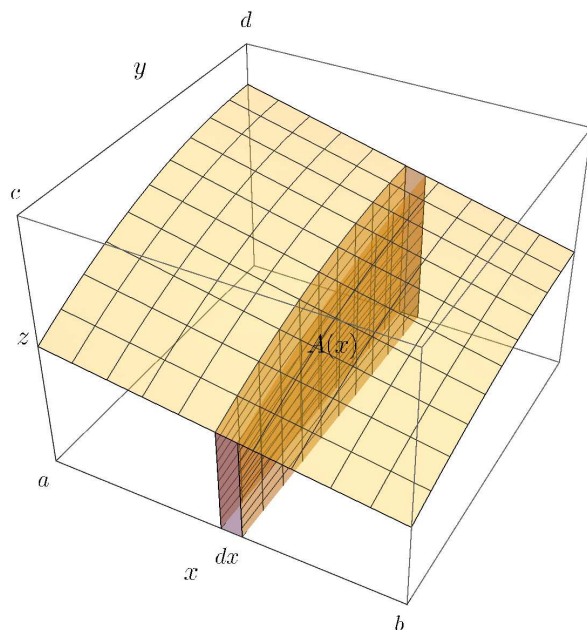
Kuva 3.8: Integroitaessa kuvaajan $y = f(x)$ alla oleva pinta-ala lasketaan kapeiden kaistaleiden alojen $dA = f(x) dx$ summana

II esiintyi yhden muuttujan funktion kuvaajan $y = f(x)$ alapuolelle jäävän alueen pinta-ala. Kuten Kuvassa 3.8 ajatellamme ko. alueen muodostuvan (infinitesimaalisen) kapeista kaistaleista dA , jotka ovat suorakaiteita joiden (infinitesimaalisen pieni) kanta on dx , korkeus $f(x)$ ja siis pinta-ala $dA = f(x) dx$. Koska kaistaleen leveys $\rightarrow 0$, sen korkeus "ei ehdi muuttua", ja sitä voidaan pitää vakiona. Kysytty pinta-ala saadaan sitten laskemalla tällaiset infinitesimaalisen pienet alat yhteen. Tarkassa raja-arvoprosessissa yhteenlasku korvataan integraalilla.



Kuva 3.9: Integroitaessa kuvaajan $z = f(x, y)$ alla oleva tilavuus lasketaan kapeiden pylväiden tilavuuksien $dV = f(x, y) dx dy$ summana

Vastaavasti kahden muuttujan funktion kuvaajan alla olevan kappaleen voidaan ajatella muodostuvan kapeista pylväistä Kuvan 3.9 mukaisesti. Pylvään korkeus on $f(x, y)$ ja sen pohja suorakaide, jonka dimensiot ovat dx ja dy . Pohjan ala on siis $dA = dx dy$ ja pylvään tilavuus $dV = f(x, y) dA = f(x, y) dx dy$. Jälleen integraali laskee nämä yhteen.



Kuva 3.10: Infinitesimaalisen ohut viipale kappaleesta, tilavuus $dV = A(x) dx$.

Lauseen 3.10 sisällön ymmärtämistä ja muistamista puolestaan auttaa, että siinä lasketaan kuvaajan alle jäävän kappaleen tilavuus jakamalla se ohuiksi viipaleiksi. Kun todistuksen kuvien tilanteessa oletamme, että osavälin I_i pituus lähestyy nollaa, niin integroitavan funktion jatkuvuuden nojalla poikkileikkauksen pinta-ala $A(x) = \int_{y=c}^d f(x, y) dy$ ei enää tarkasteluvälillä muutu. Tätä vastaavan viipaleen, Kuvassa 3.10, tilavuus on tällöin $dV = A(x) dx$. Koko kappaleen tilavuus V saadaan laskemalla viipaleiden tilavuudet yhteen. Koska ne ovat infinitesimaaleja, yhteenlasku muuttuu integraaliksi.

$$V = \int_{x=a}^b dV = \int_{x=a}^b A(x) dx.$$

Lauseen 3.10 ensimmäinen iteroitu integraali laskee juuri tämän integraalin. Jälkimmäinen iteroitu integraali puolestaan laskee saman tilavuuden sellaisten ohuiden viipaleiden, paksuus dy summana, joiden poikkileikkaus on $A(y) = \int_{x=a}^b f(x, y) dx$.

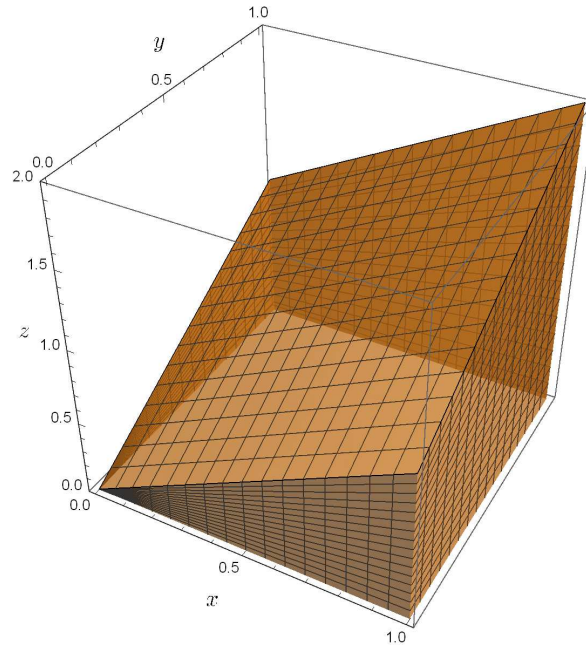
Esimerkki 3.11. Hirrestä (z -akselin suuntainen), jonka poikkileikkaus on yksikköneli $S = [0, 1] \times [0, 1]$, sahataan tasojen $z = 0$ ja $z = x + y$ rajaama kappale (ks. Kuva 3.11). Laske sen tilavuus.

Ratkaisu. Nyt $f(x, y) = x + y$, joten yz -tason suuntaisen siivun poikkipinnan ala on

$$A(x) = \int_{y=0}^1 (x + y) dy = \left|_{y=0}^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) = x + \frac{1}{2}.$$

Tilavuus saadaan sitten laskemalla siivujen tilavuudet $dV = A(x) dx$ yhteen

$$V = \int_{x=0}^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left|_{x=0}^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right) = 1.$$



Kuva 3.11: Tasojen $z = 0$ ja $z = x + y$ väliin neliön $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ yläpuolelle jäävä kappale

Huomautus 3.12. Fubinin lause on voimassas myös n :n muuttujan funktiolle. Jos siis $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$, ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin integraali $\int_I f$ voidaan laskea n -kertaisena iteroituna integraalina

$$\int_I f = \int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2}^{b_2} \cdots \int_{x_n=a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1.$$

Tässäkin voidaan integroimisjärjestystä vaihtaa halutuksi. Yleisemmän version todistus ei tuo paljoa uutta (ainoastaan merkinnöistä tulee hankalampia), ja siksi sivuutetaan.

3.3 Integrointi yli yleisemmän alueen

Useimmat moniulotteisten integraalien sovellukset edellyttävät, että voimme integroida funktioita myös yli sellaisten joukkojen, jotka eivät ole avaruuden $\mathbb{R}^n$ välejä. Integraalia ei voida määritellä yli mielivaltaisen osajoukon (tästä lisää kurssilla *Lebesguen mitta ja integraali*), mutta käyttökelpoinen käsite saadaan aikaiseksi suhteellisen helposti.

Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on epätyhjä rajoitettu joukko. Tällöin on olemassa sellainen kompakti väli $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, joka sisältää joukon A . Tässä voidaan nimittäin valita

$$a_i = \inf\{x \mid \text{on olemassa sellainen piste } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \text{ jolle } x_i = x\}$$

ja vastaavasti

$$b_i = \sup\{x \mid \text{on olemassa sellainen piste } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \text{ jolle } x_i = x\}$$

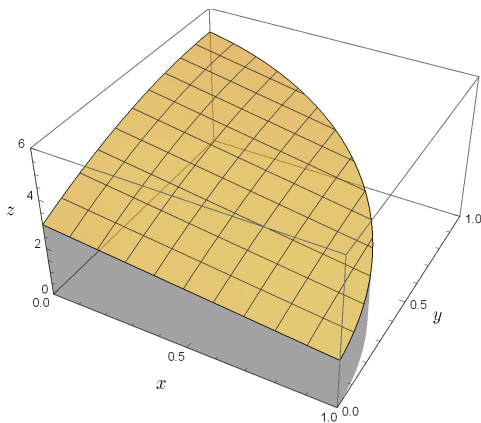
kaikille $i = 1, 2, \dots, n$. Haluamme määritellä rajoitetun funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integraalin $\int_A f$. Vältämme useita sudenkuoppia käyttämällä seuraavaa ideaa. Määritellään ensin apufunktio $f_A : I \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$f_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{jos } \mathbf{x} \in A, \text{ ja} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Korjaamme/täydennämme siis funktion f määrittely siten, että uusi funktion f_A saa arvon nolla joukon A ulkopuolella.

Määritelmä 3.13. Oletetaan, että $I \subset \mathbb{R}^n$ on väli, $A \subset I$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jokin funktio, ja $f_A : I \rightarrow \mathbb{R}$ kuten yllä. Sanomme, että funktio f on *integroituva yli joukon A* , jos funktio f_A on integroituva yli välin I . Tällöin merkitsemme

$$\int_A f = \int_I f_A.$$

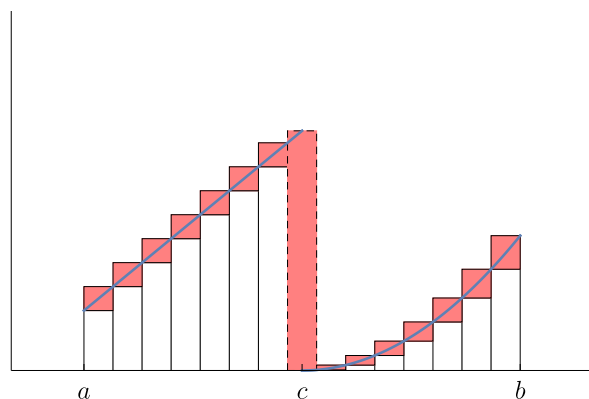


Kuva 3.12: Erään kahden muuttujan polynomien kuvaaja neljännesympyrälevyssä

Palautetaan mieleen aiemminkin esiintynyt Kuva 3.12). Tämän kuvaajan voimme tulkita kahdella tavalla. Jos A on kuvan neljännesympyrä, niin voimme ajatella, että tässä on erään jatkuvan funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaaja. Toisaalta voimme ajatella, että tässä $I = [0, 1] \times [0, 1]$ on yksikköneliö, ja kyseessä onkin funktion $f_A : I \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaaja, kun funktion f_A määriteltiin saavan arvon nolla neljännesympyrälevyn A ulkopuolella. Integroituvuusteorian kannalta meillä on nyt ilmeinen ongelma. Vaikka funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva koko A :ssa, niin funktio f_A selvästikään ei ole jatkuva koko yksikköneliössä I . Vakuuttunet helposti siitä, että f_A on kyllä jatkuva muualla, mutta ei ole jatkuva neljännesympyrälevyn reunapisteissä. Vastaava ongelma esiintyy aina, kun integroimme yli joukon joka ei ole väli. Siksi paneudumme tähän seuraavassa.

Yleinen periaate on, että kunhan epäjatkuvuutta esiintyy vain hyvin pienessä joukossa pisteitä, niin tämä ei pilaa funktion integroituvuutta yli välin.

Esimerkki 3.14. Kurssilla Analyysi II osoitettiin, että jos suljetulla välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ko. välillä pistettä $c \in (a, b)$ lukuun ottamatta, niin se on silti integroituva yli välin $[a, b]$.



Kuva 3.13: Yksittäinen epäjatkuvuuspiste c ei estä suljetulla välillä $[a, b]$ rajoitetun yhden muuttujan funktion integroituvuutta

Tämä nähtiin Lause 3.5 nojalla seuraavasti. Kiinnitettiin $\varepsilon > 0$. Koska funktio f on rajoitettu, pisteen c ympärille löytyy kapea pylväs (Kuvan 3.13 soiro), jonka sisällä kuvaaja pysyy, ja jonka pinta-ala on $< \varepsilon/3$. Jos tämän pylvään pohja on väli $[c - \delta, c + \delta]$, niin f on jatkuvuuden vuoksi integroitava väleillä $[c + \delta, b]$ ja $[a, c - \delta]$. Näin ollen niille kummallekin löytyy jaot, joille ylä- ja alasummien erotukset (kuvan pinkit laatikot) ovat kumpikin $< \varepsilon/3$. Näin ollen kuvan kaikkien pinkkien laatikoiden yhteenlaskettu pinta-ala on $< \varepsilon$, mistä väite seuraa.

Yleistämme Esimerkin 3.14 tilannetta korkeampiulotteiseen tapaukseen. Yhteisenä ideana on, että kunhan epäjatkuvuuskohdat voidaan peittää kapeilla pylväillä, joiden pohjien yhteenlaskettu mitta saadaan mielivaltaisen pieneksi, niin Lauseen 3.5 ehto integroituvuudelle saadaan voimaan. Jos olet lähinnä kiinnostunut integraalien laskemisesta ja sovelluksista, voit suhteellisen rauhallisin mielen hypätä tämän osion yli, ja siirtyä kohtaan, jossa käsittelemme Fubinin lausetta yli yleisemmän integroimisalueen — se taas onkin kurssin tärkein teema!

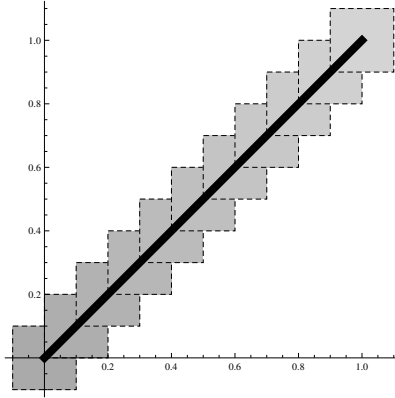
Määritelmä 3.15. Sanotaan, että joukko $N \subset \mathbb{R}^n$ on n -ulotteisen avaruuden (Jordanin) nollajoukko, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen äärellinen kokoelma välejä $I_1, I_2, \dots, I_k$ (tässä välien lukumäärä k saa riippua ε :n arvosta), joille

- $N \subseteq \bigcup_{i=1}^k I_i$, eli välit $I_1, I_2, \dots, I_k$ peittävät joukon N , ja
- $\sum_{i=1}^k m(I_i) < \varepsilon$, eli niiden yhteenlaskettu mitta on pienempi kuin ε .

Esimerkki 3.16. Osoitetaan, että jana

$$L = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

on nollajoukko.



Kuva 3.14: Jana voidaan peittää äärellisen monella välillä, joiden yhteenlaskettu mitta saadaan mielivaltaisen pieneksi.

Todistus. Valitaan $\varepsilon > 0$. Olkoon $p > 0$ kokonaisluku. Olkoot $I_i = ((i-1)/p, (i+1)/p) \times ((i-1)/p, (i+1)/p)$, $i = 0, 1, \dots, p$. Tällöin selvästi $L \subset \bigcup_{i=0}^p I_i$, ks. Kuva 3.14. Koska I_i on avoin neliö, jonka sivun pituus on $2/p$, niin $m(I_i) = 4/p^2$. Näin ollen

$$\sum_{i=0}^p m(I_i) = (p+1) \cdot \frac{4}{p^2} = \frac{4(p+1)^2}{p^2} < \frac{8p}{p^2} = \frac{8}{p}.$$

Kunhan p valitaan siten, että $p > 8/\varepsilon$, niin vaatimus peittävien välien yhteenlasketusta mitasta toteutuu. $\square$

Huomautus 3.17. Voimme nollajoukon määritelmässä lisäksi vaatia, että peittävät välit ovat avoimia. Jokainen suljettu väli $[a, b]$ sisältyy sitä marginaalisesti suurempaan avoimeen väliin, esimerkiksi väliin $(a - \delta(b-a)/2, b + \delta(b-a)/2)$, missä $\delta > 0$ on jokin pieni skaalaustekijä. Tässä ns. *lihavoittamisessa* 1-ulotteisen välin mitta tulee kerrottua luvulla $1 + \delta$. Tekemällä sama muutos jokaisen koordinaatin suhteen n -ulotteisen välin mitta tulee kerrottua vakiolla $(1 + \delta)^n$. Jos kokoelma välejä peittää nollajoukon, niin vastaavat lihavoitetut välit tekevät samoin. Lihavoitettujen välien yhteenlaskettu mitta on tietenkin hivenen suurempi kuin ilman lihavoitusta. Mutta tekijän $(1 + \delta)^n$ vaikutus voidaan sulauttaa ε :in valintaan.

Esimerkissä 3.16 käytimmekin avoimia välejä, jotka olivat jopa tarpeettoman suuria. Seuraavan Lauseen todistuksessa avoimien välien käyttö on sikäli mukavaa, että tällöin niiden unionin komplementti on suljettu.

Nollajoukon käsitteen motivoi seuraava tulos.

Lause 3.18. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ kompakti väli, ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio, joka on jatkuva Jordanin nollajoukon N ulkopuolella. Tällöin f on integroituva yli välin I .*

Todistus. Käytämme jälleen Lauseen 3.5 kolmatta kohtaa. Kiinnitämme siis luvun $\varepsilon > 0$, ja osoitamme, että on olemassa sellainen välin I jako $D = D(\varepsilon)$, että sitä vastaavat ylä- ja alasummat eroavat toisistaan $< \varepsilon$.

Ideana on, että kun rajoitumme kompaktiin joukkoon $K \subseteq I$, joka ei leikkaa joukkoa N , niin tässä joukossa f on tasaisesti jatkuva, jolloin jaon ollessa riittävän tiheä kullakin osavälillä funktion f supremum ja infimum ovat tarvittavan lähellä toisiaan kuten Lauseen 3.6 todistuksessa. Nollajoukon N lähistöllä puolestaan emme saa juurikaan otetta infimumeista ja supremumeista, mutta se ei haittaa, sillä joukon N peittävien välien yhteenlaskettu mitta saadaan niin pieneksi kuin tarvitaan. Luvassa on siis kahta eri tyyppiä olevia kontribuutioita erotukseen $S_D - s_D$. Aloitetaan siis ‘puolittamalla epsilon’.

Koska f on rajoitettu, on olemassa vakio M , jolle $|f(\mathbf{x})| \leq M$ kaikille $\mathbf{x} \in I$. Koska N on nollajoukko, löytyy kokoelma avoimia välejä $J_1, J_2, \dots, J_m$, jotka peittävät joukon N , ja joiden yhteenlaskettu mitta on pienempi kuin $\varepsilon/(4M)$. Unioni $J = \bigcup_{j=1}^m J_j$ on avoin, joten sen komplementti on suljettu. Näin ollen joukko $K = I \setminus J$ on suljettu ja rajoitettu (=kompakti). Koska f on jatkuva kaikissa joukon K pisteissä, se on Lauseen 1.29 nojalla tasaisesti jatkuva K :ssa. On siis olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/(2m(I))$ aina, kun $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$.

Määritellään sitten jako D seuraavasti. Koordinaatin x_i osalta valitaan ensin (1-ulotteinen) jako D_i , jossa välien pituudet ovat $< \delta/\sqrt{n}$. Tätä jakoa tiennetään ottamalla mukaan kaikkien välien $J_j, j = 1, \dots, m$, tätä koordinaattia vastaavat päätepisteet. Jakopisteitä tulee kuitenkin äärellinen määrä. Jako D saadaan sitten 1-ulotteisten jakojen karteesisena tulona. Merkitään jaon D välien lukumäärää luvulla $N(D)$. Valintojen perusteella jokaisen saadun osavälin $I_i, i = 1, 2, \dots, N(D)$, halkaisija on $< \delta$. Merkitään $m_i = \inf_{\mathbf{x} \in I_i} \{f(\mathbf{x})\}$ ja $M_i = \sup_{\mathbf{x} \in I_i} \{f(\mathbf{x})\}$. Jaossa D on kahdentyyppisiä osavälejä. Jos osaväli $I_i \subset K$, niin sen pienen halkaisijan vuoksi $M_i - m_i < \varepsilon/(2m(I))$. Muussa tapauksessa osavälin sisäosa leikkaa joukkoa J , emmekä voi sanoa muuta kuin, että $M_i \leq M, m_i \geq -M$ ja siis $M_i - m_i \leq 2M$.

Ylä- ja alasummien erotus on

$$S_D - s_D = \sum_{i=1}^{N(D)} (M_i - m_i) m(I_i). \quad (*)$$

Joukkoon K sisältyvillä osaväleillä on siis aina $(M_i - m_i) < \varepsilon/(2m(I))$. Näin ollen tämän tyyppin osavälien kontribuutio summaan $(*)$ on

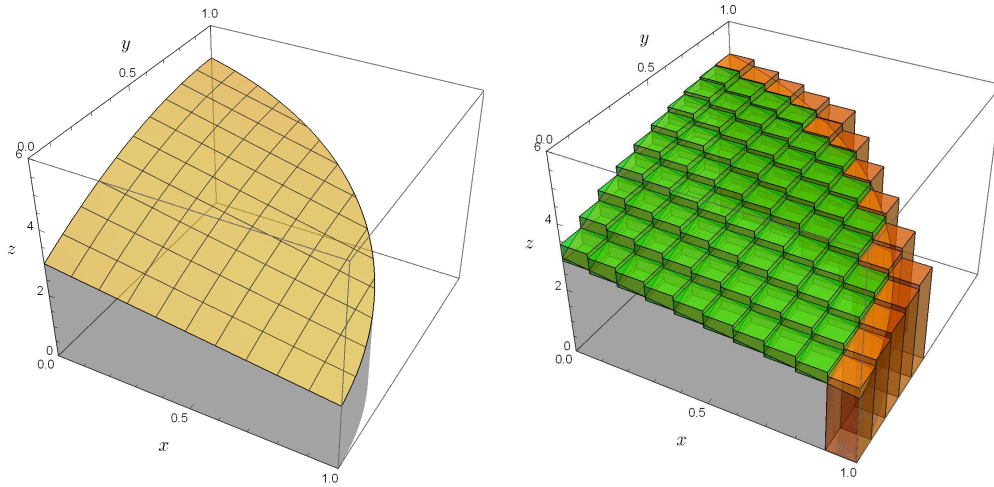
$$\sum_{i=1, \dots, N(D), I_i \subseteq K} \frac{\varepsilon}{2m(I)} m(I_i) = \frac{\varepsilon}{2m(I)} \sum_{i=1, \dots, N(D), I_i \subseteq K} m(I_i) < \varepsilon/2,$$

sillä välien $I_i \subseteq K$ yhteenlaskettu mitta on tietenkin $< m(I)$. Muilla osaväleillä $M_i - m_i < 2M$, joten niiden kontribuutiolle saadaan yläraja

$$\sum_{i=1, \dots, N(D), I_i \cap J \neq \emptyset} (M_i - m_i) m(I_i) < \sum_{i=1, \dots, N(D), I_i \cap J \neq \emptyset} 2M m(I_i) = 2M \sum_{i=1, \dots, N(D), I_i \cap J \neq \emptyset} m(I_i) \leq 2M\varepsilon/(4M) = \varepsilon/2.$$

Laskemalla kontribuutiot yhteen saamme halutun tuloksen $S_D - s_D < \varepsilon$. Väite seuraa tästä. $\square$

Kuvassa 3.15 valotan vielä edellisen todistuksen ideaa. Neljännesympyrään A rajoitetun funktion f_A kuvaajapinta vasemmalla. Oikealla ylä- ja alasummien erotus eräässä jaossa. Korkeat, yhteenlasketulta pohjaltaan pienet, kaarelle sijoittuneet pylväät = osajoukon J kontribuutio. Matalat laatikot, joiden pohjat kattavat



Kuva 3.15: Epäjatkuvuuskohtien lähellä ylä- ja alasummien erotukseen tulee korkeita mutta pohjapinta-alaltaan pieniä pylväitä. Jatkuvuusalueella puolestaan erotukseen tulee vain matalia pylväitä.

suurimman osan joukosta A = osajoukon K kontribuutio. Molemmat ovat pieniä. Osajoukko K sisältää myös neliön I sisällä olevan ympyrän ulkopuolisen osan. Siellä kullakin osavälillä kuitenkin $m_i = M_i = 0$, joten kyseinen alue ei kontributoi ylä- eikä alasummaan.

Uuseimmissa sovelluksissa ja kaikissa tämän kurssin esimerkeissä integroimisalue A on sellainen, että sen reuna on Jordanin nollajoukko. Tällöin Lause 3.18 antaa meille lupauksen jatkuvan funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integroituvuudesta. Kuvailen täydellisyyden vuoksi muutaman käyttökelpoisen tuloksen.

Lemma 3.19. *Jos joukot $N_1, N_2, \dots, N_m$ ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ Jordanin nollajoukkoja, niin niiden unioni $\bigcup_{i=1}^m N_i$ on sekin Jordanin nollajoukko.*

Todistus. Todista harjoitustehtävänä epsiloninpuolitustekniikalla, että $N \cup N'$ on nollajoukko aina, kun N ja N' ovat nollajoukkoja. Yleinen väite seuraa tästä induktiolla joukkojen lukumäärän m suhteen, kun valitaan $N = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_k$ ja $N' = N_{k+1}$. $\square$

Lemma 3.20. *Jos N on avaruuden $\mathbb{R}^n$ nollajoukko, ja $N' \subset N$ sen jokin osajoukko, niin tällöin myös N' on avaruuden $\mathbb{R}^n$ nollajoukko.*

Todistus. Jos kokoelma välejä peittää joukon N , niin se peittää myös osajoukon N' . $\square$

Lause 3.21. *Oletetaan, että $I \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti väli, ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva funktio. Tällöin sen kuvaaja*

$$G_f = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1} \mid \vec{x} \in I\}$$

on avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ nollajoukko (huom. dimensio kasvoi yhdellä).

Todistus. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Kuten aiemmin, nähdään että on olemassa välin I sellainen jako, että kullakin osavälillä I_i funktion f arvot poikkeavat toisistaan $< \varepsilon$. Olkoot jälleen $m_i = \inf\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in I_i\}$ ja $M_i = \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in I_i\}$, jolloin siis $M_i - m_i < \varepsilon$. Tällöin kuvaaja $G_f \subset \bigcup_i I_i \times [m_i, M_i]$, ja välien $I_i \times [m_i, M_i]$ yhteenlaskettu mitta on

$$\sum_i m(I_i)(M_i - m_i) \leq \varepsilon \left(\sum_i m(I_i) \right) = \varepsilon m(I).$$

Lihavoittamalla välejä $I_i \times [m_i, M_i]$ voidaan ne korvata avoimilla väleillä joiden yhteenlaskettu mitta on $< 2\varepsilon m(I)$. Tämä saadaan mielivaltaisen pieneksi ja väite seuraa. $\square$

Esimerkki 3.22. Osoitetaan, että avaruuden $\mathbb{R}^3$ pallopinta

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

on sen Jordanin nollajoukko.

Ratkaisu. Käytetään apuna jatkuvaa funktiota $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{kun } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

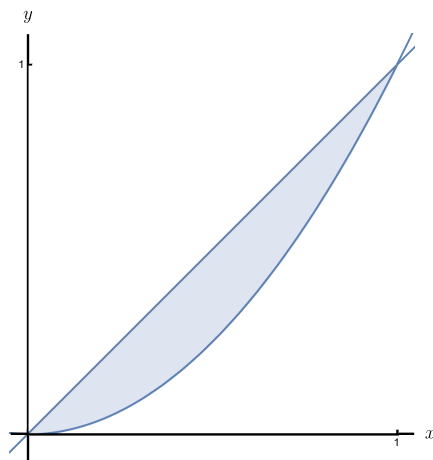
Sen kuvaaja G_f muodostuu ylemmästä puolipallosta ja tason $z = 0$ levymäisestä osasta pallon ulkopuolella. Joukko G_f on avaruuden $\mathbb{R}^3$ nollajoukko Lauseen 3.21 nojalla. Näin ollen ylempi puolipallo on sekin nollajoukko Lemman 3.20 nojalla. Käyttämällä samaan tapaan funktion $-f$ kuvaajaa näemme, että myös alempi puolipallo on nollajoukko. Näin ollen koko pallopinta on nollajoukko Lemman 3.19 nojalla.

Seuraus 3.23. Oletetaan, että joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on sellainen suljettu ja rajoitettu joukko, jonka reuna muodostuu äärellisen monesta palasta $R_1, R_2, \dots, R_m$. Oletetaan, että kukin palanen R_j on sellainen, että sillä yksi koordinaateista on muiden jatkuva funktio. Jos $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin tällöin se on integroituva yli joukon A .

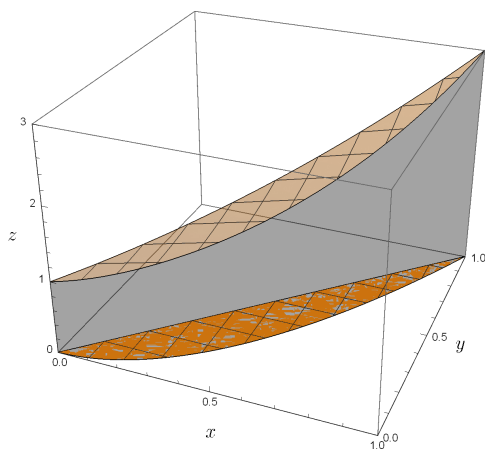
Todistus. Jokainen reunan osa on tällöin mielletävissä jatkuvan funktion kuvaajaksi, ja on näin nollajoukko. Koko reuna on siis sekin nollajoukko Lemman 3.19 nojalla. Valitaan väli I , jolle $A \subseteq I$. Funktio f_A on tällöin jatkuva koko I :ssä reunan pisteitä mahdollisesti lukuun ottamatta. Koska epäjatkuvuuspisteet muodostavat nollajoukon, väite seuraa Lauseesta 3.18. $\square$

Kurssin ja sen sovellusten kannalta tämän kappaleen tärkein teema on Fubinin lauseen soveltaminen Seurauksen 3.23 integraalin laskemiseen. Sivuutamme Fubinin lauseen vastaavan versioiden todistuksen, ja keskitymme miettimään, mikä iteroitu integraali laskee halutun integraalin $\int_A f$. Seuraava esimerkki valaisee sisäintegraalin rajojen määräytymisprosessia.

Esimerkki 3.24. Käyrät $y = x$ ja $y = x^2$ leikkaavat toisensa pisteissä $(0, 0)$ ja $(1, 1)$. Olkoon S käyrien näiden pisteiden välillä olevien osien rajaama alue (vrt. Kuva 3.16). Laske funktion $f(x, y) = 1 + x + y^2$ integraali yli alueen S molemmilla tavoilla iteroituna integraalina.



Kuva 3.16: Käyrien $y = x$ ja $y = x^2$ rajaama alue S



Kuva 3.17: Tason $z = 0$ ja kuvaajan $z = 1 + x + y^2$ alueen S yläpuolella rajaama kappale.

Ratkaisu. Joukko S sisältyy väliin $I = [0, 1] \times [0, 1]$. Koska välillä $0 \leq x \leq 1$ on voimassa $x^2 \leq x$, se voidaan kuvata epäyhtälöiden avulla seuraavasti

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}.$$

Voi olla nopeampaa katsoa tämä kuvasta! Kuten yleensäkin, olkoon $f_S : I \rightarrow \mathbb{R}$ funktion f laajennus, joka määritellään nollassa joukon S ulkopuolella. Integraali siis laskee Kuvan 3.17 kappaleen tilavuuden.

Lasketaan ensin iteroitu integraali, jossa sisäintegraalin integroimismuuttujana on y , ja x on vakio väliltä $[0, 1]$. Sisäintegraalina on siis

$$F(x) := \int_{y=0}^1 f_S(x, y) dy.$$

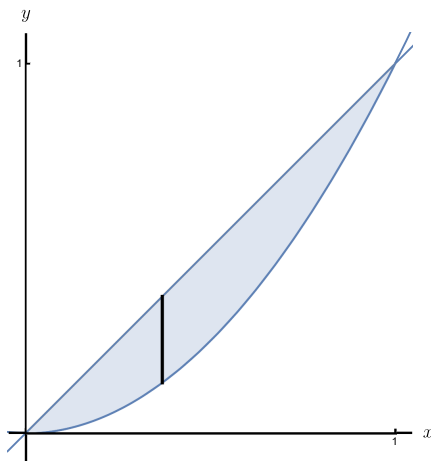
Tätä laskettaessa on muistettava, että funktio f_S on määritelty paloittain. Se yhtyy funktioon f vain, kun piste $(x, y) \in S$. Nyt kun x :llä on kiinteä arvo, tämä tarkoittaa, että sisäintegraalissa integroitava funktio on

paloittain määritelty: se = 0 kun $y \in [0, x^2)$ sekä kun $y \in (x, 1]$. Näin ollen sisäintegraali on paloittain määritellyn funktion integraali, joten se lasketaan jakamalla integroimisväli osiin. Osien päätepisteet riippuvat muuttujasta x , mutta muilta osin tekniikka on tuttua aiemmilta kursseilta.

$$\begin{aligned}\int_{y=0}^1 f_S(x, y) dy &= \int_{y=0}^{\sqrt{x}} 0 + \int_{y=x^2}^x (1 + x + y^2) dy + \int_{y=x}^1 0 \\ &= \int_{y=x^2}^x (1 + x + y^2) dy \\ &= \left[y + xy + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^x \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - x^2 - x^3 - \frac{x^6}{3} = x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^6}{3}.\end{aligned}$$

Loppu onkin helppoa, sillä saatu sisäintegraalin lauseke on voimassa kaikille $x \in [0, 1]$. Näin ollen Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}\int_S f &= \int_{x=0}^1 F(x) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^7}{21} \right]_{x=0}^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{21} = \frac{2}{7}.\end{aligned}$$

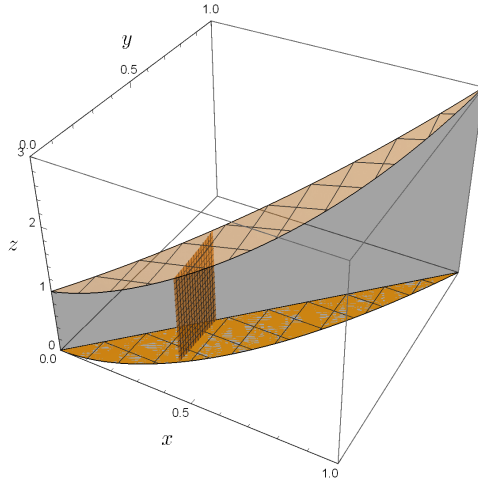


Kuva 3.18: Sisäintegraali yli y :n kattaa käyrien $y = x$ ja $y = x^2$ väliin jäävän janan, jolla x on vakio.

Itse asiassa laskimme iteroidun integraalin

$$\int_S f = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x f(x, y) dy dx.$$

Integroimisalue S otettiin huomioon sisäintegraalin rajojen välityksellä! Sisäintegraalissa piste (x, y) käy läpi Kuvan 3.18 janan ja laskee Kuvan 3.19 poikkileikkauksen pinta-alan. Ulompi integraali sitten laskee yhteen näiden janojen (tai pystyraitojen) kontribuutiot, jolloin kaiken kaikkiaan olemme integroineet yli joukon S .



Kuva 3.19: Sisäintegraali yli y :n laskee oheisen poikkileikkauksen pinta-alan.

Jos haluammekin sisäintegraalissa integroida yli x :n (jolloin y :llä on vakioarvo väliltä $[0, 1]$), niin kuvaillemekin joukon S toisin:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

Tällöin sisäintegraali laskeekin Kuvan 3.20 vaakasuoran janan kontribuution eli Kuvan 3.21 poikkileikkauksen pinta-alan

Iteroitu integraali saa siis muodon

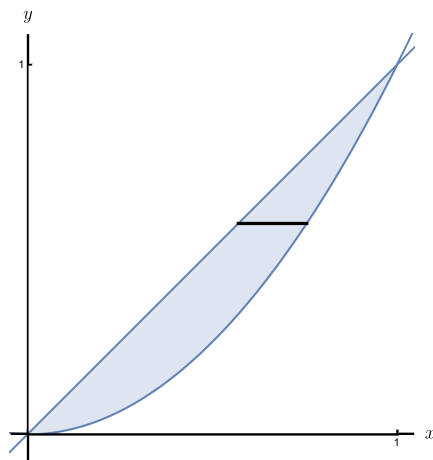
$$\begin{aligned} \int_S (1 + x + y^2) dA &= \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=y}^{\sqrt{y}} (1 + x + y^2) dx \right) dy \\ &= \int_{y=0}^1 \left(\left[x + \frac{1}{2} x^2 + xy^2 \right]_{x=y}^{\sqrt{y}} \right) dy \\ &= \int_{y=0}^1 \left(y^{1/2} - \frac{y}{2} - \frac{1}{2} y^2 + y^{5/2} - y^3 \right) dy \\ &= \left[\frac{2y^{7/2}}{7} + \frac{2y^{3/2}}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{6} - \frac{y^2}{4} \right]_{y=0}^1 \\ &= \frac{2}{7} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Uskoa Fubinin lauseeseen tässäkin tapauksessa vahvistaa se, että saimme saman lopputuloksen kummastakin iteroidusta integraalista. Lienee havainnollista ajatella, että iteroidut integraali kumpikin määräsivät Kuvan 3.17 kappaleen tilavuuden laskemalla yhteen ohuiden viipaleiden tilavuuksia.

Edellisen Esimerkin lasku yleistyy seuraavalla tavalla.

Lause 3.25. (Fubinin lause erityistä muotoa olevilla tasoalueille). Jos tasoalue $A \subset \mathbb{R}^2$ on muotoa

$$A = \{(x, y) \mid x \in [a, b], c(x) \leq y \leq d(x)\},$$



Kuva 3.20: Sisäintegraali yli x :n kattaa $y = x$ ja $y = x^2$ väliin jäävän janan, jolla y on vakio. Kuvan välillä selvästi $x \in [y, \sqrt{y}]$.

missä $c(x), d(x)$ ovat välillä $[a, b]$ jatkuvia funktioita, joille $c(x) \leq d(x)$ kaikille $x \in [a, b]$, niin joukossa A jatkuvalle funktiolle f on voimassa

$$\int_A f = \int_{x=a}^b \int_{y=c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx.$$

Vastaavasti, jos tasoalue $A \subset \mathbb{R}^2$ on muotoa

$$A = \{(x, y) \mid y \in [c, d], a(y) \leq x \leq b(y)\},$$

missä $a(y), b(y)$ ovat välillä $[c, d]$ jatkuvia funktioita, joille $a(y) \leq b(y)$ kaikille $y \in [c, d]$, niin joukossa A jatkuvalle funktiolle f on voimassa

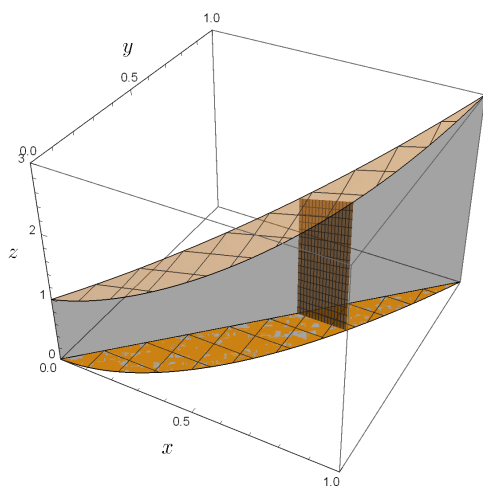
$$\int_A f = \int_{y=c}^d \int_{x=a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy.$$

Todistus. Kuten Esimerkissä 3.24 sisäintegraalin integroitava funktio f_A on paloittain määritelty, ja sisäintegraalin rajat määräytyvät alueen A reunoista. $\square$

Lauseen 3.25 ja Esimerkin 3.24 tuloksille on korkeampiulotteiset vastineensa. Erilaisia tapauksia on jo kolmessa ulottuvuudessa liian monta lueteltavaksi Lauseen 3.25 tapaan. Helpompaa on päätellä sisempien integraalien rajat kuvasta katsoen. Seuraava sääntö on syytä pitää mielessä:

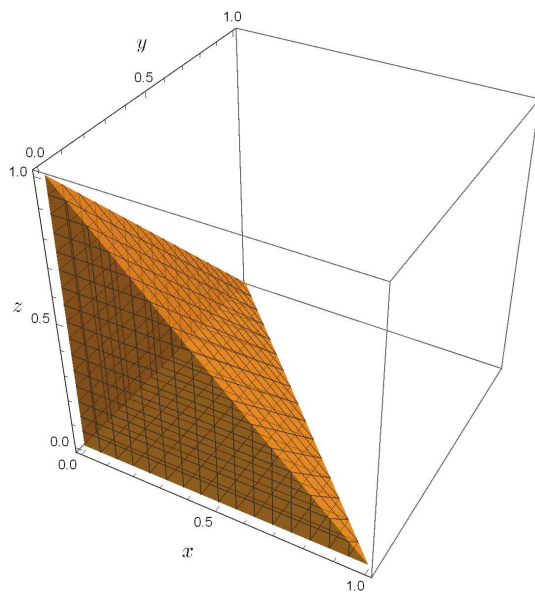
Iteroidussa integraalissa sisemmän integraalin integroimisrajat yleensä (mutta eivät aina) riippuvat ulommista muuttujista, mutta *ulomman integraalin rajat eivät milloinkaan riipu sisempien integraalien muuttujista*.

Katsotaan seuraavaksi esimerkki integroinnista yli 3-ulotteisen avaruuden osajoukon. Nyt integraaliin kuuluvat ylä- ja alapylväät olisivat 4-ulotteisia, mikä tuottaa meille hahmottamisvaikeuksia. Käytettävissämme on kuitenkin Esimerkin 3.24 Kuvan 3.18 (tai 3.20) menetelmä viipaloida tutkittavan kappaleen asemesta integroimisalue matalampiulotteisiin osiin.



Kuva 3.21: Sisäintegraali yli x :n laskee oikean poikkileikkauksen pinta-alan

Esimerkki 3.26. Lasketaan funktion $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ integraali $\int_S f$ yli avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukon S , jonka pisteet (x, y, z) toteuttavat epäyhtälöt $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ja $x + y + z \leq 1$. Vertaamalla Kuvaan 3.22 voit mielikuvitusta käyttäen todeta, että S on neljän tason $x = 0, y = 0, z = 0$ ja $x + y + z = 1$ määrittämä avaruuden osista ainoa rajoitettu (ja siksi järkevä valinta integroimisalueeksi).

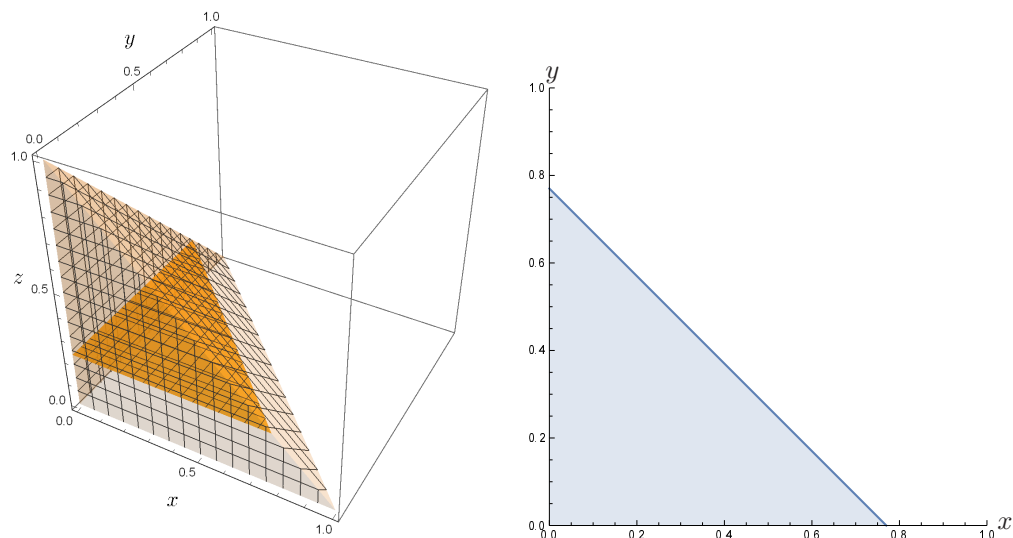


Kuva 3.22: Koordinaattitasojen ja tason $x + y + z = 1$ rajaama alue

Ratkaisu. Huomaamme, että joukon S sisältävänä välinä voimme käyttää yksikkökuutiota

$$I = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Tehdään integrointi järjestyksessä x, y, z , siis x sisin ja z uloin. Selvästi uloimman koordinaatin vaihteluväli on $[0, 1]$, sillä z saa kaikki nämä arvot joukossa S (arvon 1 tosin vain pyramidin huipussa).



Kuva 3.23: Integroimisalueen poikkileikkaus, jossa z :lla on kiinteä arvo (kuvassa noin 0,23) sekä oikealla sitä vastaava xy -parien vaihtelualue $S(z)$.

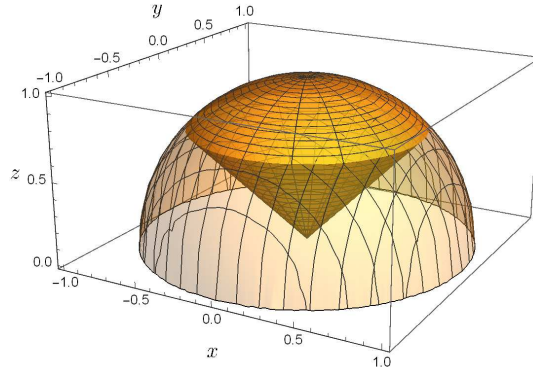
Jos annamme z :lle kiinteän arvon väliltä $0 \leq z \leq 1$, niin piste (x, y, z) on joukossa S silloin ja vain silloin, kun x ja y toteuttavat epäyhtälöt

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \text{ja} \quad x + y \leq 1 - z.$$

Kuvassa 3.23 on vasemmalla korostettu se kolmiomainen levy, jolla z -koordinaatilla on eräs kiinteä arvo, oikealla on sitä vastaava (x, y) -parien vaihtelualue. Merkitään tätä vaihtelualuetta $S(z)$:lla. On tärkeää oivaltaa, että kaksi sisintä integrointia itse asiassa laskevat integraalin yli alueen $S(z)$, eli Lauseen 3.25 nojalla integraalin

$$\int_{S(z)} f = \int_{y=0}^{1-z} \int_{x=0}^{1-z-y} f(x, y, z) dx dy.$$

Nimittäin pari (x, y) kuuluu joukkoon $S(z)$ silloin ja vain silloin, kun $(x, y, z) \in S$.



Kuva 3.24: Pallopinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ja kartion $x^2 + y^2 = z^2$ alueessa $z \geq 0$ rajaama kappale

Näin ollen kysytty integraali saadaan iteroituna integraalina

$$\begin{aligned}
 \int_S f &= \int_{z=0}^1 \int_{y=0}^{1-z} \int_{x=0}^{1-y-z} (x + 2y + 3z) dx dy dz \\
 &= \int_{z=0}^1 \int_{y=0}^{1-z} \left| \frac{1}{2}x^2 + 2yx + 3zx \right|_{x=0}^{1-y-z} dy dz \\
 &= \int_{z=0}^1 \int_{y=0}^{1-z} \left(-\frac{3y^2}{2} - 4yz + y - \frac{5z^2}{2} + 2z + \frac{1}{2} \right) dy dz \\
 &= \int_{z=0}^1 \left| -\frac{y^3}{2} - 2y^2z + \frac{y^2}{2} - \frac{5yz^2}{2} + 2yz + \frac{y}{2} \right|_{y=0}^{1-z} dz \\
 &= \int_{z=0}^1 \left(z^3 - \frac{3z^2}{2} + \frac{1}{2} \right) dz \\
 &= 1/4.
 \end{aligned}$$

Esimerkki 3.27. Pallopinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sisällä, ylemmässä puoliavaruudessa $z \geq 0$, kartiopinnan $x^2 + y^2 = z^2$ yläpuolella rajautuu kompakti joukko K , ks. Kuva 3.24. Oletetaan, että $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva. Kirjoita integraali $\int_K f$ iteroituna integraalina.

Ratkaisu. Kuvan perusteella olemme kartion sisällä, kun epäyhtälö $x^2 + y^2 \leq z^2$ on voimassa. Vastaavasti olemme pallopinnan sisällä (ns. yksikkökuulussa), kun $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Näin ollen leikkausjoukossa

$$1 \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq (x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) = 2(x^2 + y^2),$$

joten $x^2 + y^2 \leq 1/2$. Kuvassa tämä näkyy siten, että pysyttelemme etäisyydellä $\leq 1/\sqrt{2}$ z -akselista.

Tämän perusteella toteamme, että kappale K on pintojen $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ja $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ välissä, ensimmäinen (pallo)pinta antaa z -koordinaatin ylärajan, kun (x, y) tunnetaan, jälkimmäinen (kartio)pinta puolestaan alarajan. Lisäksi paria (x, y) sitoo epäyhtälö $x^2 + y^2 \leq 1/2$. Jälkimmäinen epäyhtälö otetaan huomioon rajaamalla x välille $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ ja asettamalla sitten y -koordinaatilla rajat $\sqrt{1/2 - x^2} \geq |y|$.

Näin päädyimme iteroituun integraaliin

$$\int_K f = \int_{x=-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{y=-\sqrt{1/2-x^2}}^{\sqrt{1/2-x^2}} \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Palaamme tähän integroimisalueeseen seuraava pykälässä sylinteri- ja pallokoordinaattien yhteydessä.

3.3.1 Riemannin summista ja suureiden keskiarvoista

Tähän kappaleeseen voi suhtautua kevyemmin. Riemannin summan käsite putkahtaa vastaan esimerkiksi monisteen luvuissa 5 ja 6, mutta siihen liittyvää teoriaa ei juuri käsitellä eikä sitä tarvita kuin muutamissa esitettävien laskumenetelmien perusteluissa.

Etenkin vanhemmissa teksteissä funktion integraali yli välin $I \subset \mathbb{R}^n$ määritellään usein ns. *Riemannin summien* avulla. Jos $D = \{I_j \mid j = 1, \dots, m\}$ on jokin välin I jako, niin infimumien ja supremumien asemesta Riemannin summissa kutakin osaväliä I_j valitaan edustamaan satunnainen piste $\xi_j \in I_j$. Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jakoon D ja valintoihin $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ liittyvä Riemannin summa on

$$\Sigma_{D,\xi}(f) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j) m(I_j).$$

Funktion f arvo pisteessä $\xi_j \in I_j$ vaikuttaa osaltaan osavälillä I_j laskettuihin funktion infimumiin m_j ja supremumiin M_j . Selvästi $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j$, joten

$$s_D(f) \leq \Sigma_{D,\xi}(f) \leq S_D(f) \quad (*)$$

kaikille jaoille D ja kaikille valinnoille ξ . Kutsutaan jaon D suurimman osavälin mitta

$$\|D\| = \max\{m(I_j) \mid j = 1, \dots, m\}$$

jaon *normiksi*. Riemannin summien avulla funktion f integroituvuus yli välin I määritellään vaatimalla, että on olemassa sellainen luku S , että kutakin lukua $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen $\delta > 0$, että

$$|S - \Sigma_{D,\xi}(f)| < \varepsilon$$

aina, kun $\|D\| < \delta$ olipa valinta ξ mikä tahansa. Lyhyemmin ja epätäsmällisemmin tämän voi ilmaista vaatimalla, että $\Sigma_{D,\xi} \rightarrow S$, kun jako D tihenee rajatta, eli $\|D\| \rightarrow 0$.

Edustajien ξ valinnanvapauteen johtuvat tekniset vaikeudet tekevät tästä määritelmästä hieman hankalammaksi käyttää, mutta epäyhtälön $(*)$ ja integroituvuuskriteerin (Lause 3.5 avulla voimme nopeasti päätellä, että mikäli funktio f on integroitava yli välin I tämän luvun alussa esitellyn määritelmän mielessä, se on integroitava myös Riemannin summien mielessä, ja $S = \int_I f$. Tämä seuraa siitä, että ylä- ja alasummia käytettäessä voimme aina tihentää jakoa niin, että ehto $\|D\| \rightarrow 0$ on voimassa.

Esimerkki 3.28. Osoitetaan, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2.$$

Ratkaisu. Tiedämme, että

$$\int_{x=0}^1 \frac{dx}{1+x} = \left|_{x=0}^1 \ln(1+x) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Tulkitsemme tutkittavan summan funktion $f(x) = 1/(1+x)$ Riemannin summaksi yli välin $I = [0, 1]$, kun käytämme tasavälistä jakoa $D = D_n = \{(j-1)/n, j/n \mid j = 1, 2, \dots, n\}$. Jos nimittäin valitsemme osavälin $[(j-1)/n, j/n]$ edustajaksi välin yläreunan $\xi_j = j/n$, niin $m(I_j) = 1/n$ kaikilla $j = 1, 2, \dots, n$, ja

$$\Sigma_{D_n, \xi} = \sum_{j=1}^n m(I_j) f(\xi_j) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+j/n} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+n}.$$

Tässä $\|D_n\| = 1/n \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$, joten funktion f integroituvuuden perusteella

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_{D_n, \xi} = \int_{x=0}^1 f(x) = \ln 2.$$

Riemannin summa -ajattelu tulee luontevasti vastaan viidennessä ja kuudennessa luvussa, kun integraali ei ole yli välin vaan yli mutkittelevan käyrän tai pinnan.

Moniulotteinen integraali soveltuu hyvin suureiden keskiarvojen laskemiseen. Tässäkin on luonnollista ajatella satunnaisten pisteiden "edustavan" osaväliä, joten käsittelemme tätä usein esiintyvää tilannetta hie-
man tarkemmin.

Oletetaan, että $I \subseteq \mathbb{R}^n$ on kompakti väli. Haluamme määritellä funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ keskiarvon *joukossa* I . Kun $n = 1$ ja $I = [a, b]$, niin luonteva määritelmä on funktion kuvaajan $y = f(x)$ keskimääräinen korkeus välillä $[a, b]$. Koska kuvaajan alle jäävän alueen pinta-ala on $A = \int_{x=a}^b f(x) dx$, ja välin pituus on $b - a$, niin kuvaajan keskimääräinen korkeus on

$$h = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}.$$

Tällöin nimittäin kuvaajan alle jäävän alueen pinta-ala A yhtyy sen suorakaiteen pinta-alaan, jonka kanta on $b - a$ ja korkeus h , $A = h(b - a)$. Kun $n = 2$, niin tälle analogisesti voimme määritellä funktion f keskiarvon välillä I

$$E(f, I) = \frac{\int_I f}{m(I)}$$

kunhan välin mitta $m(I) > 0$.

Riemannin summien avulla tämä voidaan perustella ajattelemalla, että kutakin osaväliä I_j edustava piste ξ_j saa painoarvokseen ko. osavälin mitan $m(I_j)$. Onhan luontevaa, että isompaa osaväliä edustava piste tulee laskea keskiarvoon suuremmalla painolla. Jakoon D ja valintaan ξ liittyvä luonnollinen keskiarvo on

$$E(f, D, \xi) = \frac{\sum_j f(\xi_j) m(I_j)}{\sum_j m(I_j)}. \quad (*)$$

Tässä nimittäjää $\sum_j m(I_j) = m(I)$ kannattaa ehkä ajatella "normeeraustekijänä". Jos nimittäin f on vakiofunktio c , niin edellytämme tietenkin myös sen keskiarvon olevan c . Kun $\|D\| \rightarrow 0$, niin raja-arvona

saadaan $E(f, I)$. Huomaa, että tässä nimittäjä on tulkittavissa myös vakiofunktioon 1 liittyväksi Riemannin summaksi.

Kun I korvataan yleisemmällä kompaktilla joukolla K , niin voimme tuttuun tapaan siirtyä ajattelemaan väliä I , $K \subseteq I$, ja funktiota f_K . Osamäärässä $(*)$ haluamme jättää huomiotta joukon K ulkopuoliset osat. Osoittajassa siihen päästään käyttämällä funktiota f_K joka häviää joukon K ulkopuolella. Nimittäjässä samoin haluamme jättää joukon K ulkopuoliset osat huomiotta, ja käytämme siellä vakiofunktion 1 asemesta funktiota 1_K , joka häviää joukon K ulkopuolella. Pädymme näin määritelmään, jonka mukaan funktion f keskiarvo joukossa K on

$$E(f, K) = \frac{\int_K f}{\int_K 1}.$$

Nimittäjää $\int_K 1$ kutsutaan jatkossa joukon K mitaksi $m(K)$. Jos $n = 2$, niin $m(K)$ on joukon K pinta-ala. Tapauksessa $n = 3$ kyseessä on joukon K tilavuus.

Ensimmäisen esimerkin tarkoitus on vakuuttaa, että määritelmä on järkevä.

Esimerkki 3.29. Tarkista, että funktion $f(x) = x$ keskiarvo suljetulla välillä $K = [a, b]$ on $E(x, [a, b]) = (a + b)/2$.

Ratkaisu. Osoittaja on

$$\int_{x=a}^b x \, dx = \left|_{x=a}^b \frac{x^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Nimittäjä puolestaan on $m([a, b]) = b - a$. Keskiarvo on näiden suhde, eli

$$E(x, [a, b]) = \frac{(b^2 - a^2)}{2(b - a)} = \frac{b + a}{2}.$$

Kappaleen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (geometrinen) keskipiste on järkevää määritellä pisteeksi, jonka koordinaatti $x_i(K) = E(x_i, K)$ on funktion x_i keskiarvo joukossa K . Siis

$$x_i(K) = \frac{\int_K x_i}{\int_K 1}.$$

Fysiikassa tarvitaan usein kappaleen $K \subset \mathbb{R}^3$ massakeskipistettä. Jos kappale on "tasalaatuinen" massakeskipiste yhtyy geometriseen keskipisteeseen. Mutta jos kappaleen tiheys ρ vaihtelee, eli $\rho = \rho(\mathbf{x})$, niin kappaleen osia on painotettava tiheyden vaihtelua vastaavasti, ja

$$x_i(K, \text{massa}) = \frac{\int_K x_i \rho(\mathbf{x}) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3}{\int_K \rho(\mathbf{x}) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3}.$$

Tässä nimittäjänä oleva integraali laskee kyseisen kappaleen massan.

Esimerkki 3.30. Määrätään Esimerkin 3.11 hirrenpalan K keskipiste (hirsi on tyypillisesti tasalaatuinen, joten kyseessä lienee myös sen massakeskipiste).

Ratkaisu. Piste (x, y, z) on kappaleessa K jos ja vain jos $x, y \in [0, 1]$ ja z -koordinaatti toteuttaa epäyhtälöt $0 \leq z \leq x + y$. Näimme, että sen tilavuus on $m(K) = 1$, joten yo. kaavoissa nimittäjä on aina 1, ja riittää laskea osoittajat. Laskemalla vaadittavat integraalit yli kappaleen K saamme x -koordinaatille

$$\begin{aligned} \int_K x \, dx \, dy \, dz &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 \left(\int_{z=0}^{x+y} x \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 x(x+y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\frac{x}{2} + x^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^1 \\ &= \frac{7}{12}, \end{aligned}$$

joten $E(x, K) = 7/12$. Kappale on symmetrinen x ja y -koordinaattien roolin vaihtamisen suhteen, joten myös $E(y, K) = 7/12$. Lopuksi z -koordinaatille saadaan

$$\begin{aligned} \int_K z \, dx \, dy \, dz &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 \left(\int_{z=0}^{x+y} z \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 \frac{1}{2}(x+y)^2 \, dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x}{6} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} \right]_{x=0}^1 \\ &= \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Kappaleen keskipiste on siis $(7/12, 7/12, 7/12)$. Vertaamme tulosta Kuvaan 3.11. Sekä x että y -koordinaatti saavat arvoja väliltä $[0, 1]$, joten keskiarvo lähellä lukua $1/2$ on odotettu. Koska kappaleen korkeus kasvaa x :n kasvaessa $0 \rightarrow 1$, niin ei ole lainkaan yllättävää, että x -koordinaatin keskiarvo on $> 1/2$. Sama ajatuskulku tukee tulosta $E(y, K) > 1/2$. Sitä vastoin keskipisteen z -koordinaatin arvioiminen kuvan perusteella on hieman hankalampaa. Sen vaihteluväli on $[0, 2]$. Kappaleen keskimääräinen korkeus on kuitenkin $h = \text{tilavuus} / \text{pohjan ala} = 1/1 = 1$. Tämän voi tulkita kappaleen yläreunan pisteen keskimääräiseksi korkeudeksi. Kappaleen sisällä oleva piste on tietenkin yläreunan alapuolella, joten keskimääräinen z -koordinaatin arvo < 1 . Tarkempi haarukointi on hankalampaa. Suurempi osa kappaleesta on alueella, jolla sen yläreuna on keskimääräistä korkeammalla, joten sillä perusteella voimme selittää, miksi keskimääräinen z -koordinaatti on $> 1/2$.

3.4 Sijoitus moniulotteiseen integraaliin

Yhden muuttujan funktion integraaleja laskettaessa tärkeä laskuteknikka oli ns. sijoitusmenetelmä. Jos $g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ on kasvava ja derivoituva bijektio, niin sijoituksella $x = g(t)$, $dx = g'(t) dt$ muutimme

integraalin

$$\int_{x=a}^b f(x) dx \quad (*)$$

sen kanssa yhtäsuureksi integraaliksi

$$\int_{t=\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt. \quad (**)$$

Tarkka perustelu tälle saatiin ketjusäännön ja analyysin peruslauseen avulla. Tämän kurssin tarpeisiin yleistyskelpoinen perustelu tälle on seuraava heuristiikka.

Kun $f \geq 0$, niin integraalit $(*)$ ja $(**)$ molemmat laskevat kuvaajan $y = f(x)$, x -akselin sekä suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaaman alueen pinta-alan. Integraali $(*)$ ratkaisee tehtävän laskemalla yhteen Kuvan 3.8 kapeita kaistaleita, joita rajalla voidaan pitää suorakaiteina joiden kanta on dx , korkeus $f(x)$ ja pinta-ala $dA = f(x) dx$. Integraali $(**)$ puolestaan suoriutuu tehtävästä käyttämällä kaistaleita, joiden korkeus on $f(x) = f(g(t))$, kanta $dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt = g'(t) dt$, ja ala $dA = f(g(t))g'(t) dt$.

Miten tämä yleistyy korkeampiin ulottuvuuksiin? Yllä eivät pylväiden korkeudet itse asiassa muuttuneet, mutta sijoitusfunktion vaikutus piti ottaa huomioon pylväiden pohjina olevien välien mittojen muuttumisena: $dx \leftarrow g'(t) dt$. Koska $g'(t) = \frac{dx}{dt}$, niin 1-ulotteisessa tapauksessa sijoitusfunktion derivaatta oli oikea skaalaus-tekijä välien mittojen muuttumiselle. Luvussa 2 tarkastelimme yleisen differentioituvan funktion muutosten approksimointia lineaarikuvauksen (eli funktion derivaatan) avulla. Yksiulotteisessa tapauksessa ainoa mahdollinen lineaarikuvaus on kertominen skalaarilla, mikä selvästi venyttää välin pituuden kyseisen vakiotekijän itseisarvon antamaksi monikerraksi. Moniulotteisen lineaarikuvauksen kohdalla välin mitan muuttuminen on mutkikkaampaa. Tarkastelemme tätä hetken. Kurssin tavoitteiden kannalta ainoastaan Lauseen 3.35 *tulos* on tärkeä. Sitä edeltää jonkin verran mielikuvamatematiikka, missä todistukset ovat vain heuristisia perusteluja. Suosittelen yksityiskohtaisia perusteluja kaipaavalle lukijalle esimerkiksi Walter Rudinin kirjaa *Real and complex analysis*.

Määritelmä 3.31. Rajoitetun joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ (Jordanin) mitta $m(A)$ on vakiofunktion 1 integraali yli joukon A ,

$$m(A) = \int_A 1,$$

mikäli kyseinen integraali on olemassa. Tällöin sanotaan, että A on *Jordan-mitallinen* joukko.

Erityisesti, jos joukko A on Seurauksessa 3.23 kuvattua muotoa, niin sillä on äärellinen Jordanin mitta.

Huomautus 3.32. Jordanin mitalla on useita luonnollisia ominaisuuksia. Mainitsemme näistä todistusta muutaman. Harjoitustehtävänä voit niitä toki miettiä. Kurssilla *Lebesguen mitta ja integraali* nämä todistetaan yleiseen.

- Välin $I \subset \mathbb{R}^n$ Jordanin mitta on sen mitta. Välin I ja sen sisäpisteiden joukon I° mitat yhtyvät.
- Jordanin nollajoukon N mitta on $m(N) = 0$.

- Jos $A \subseteq B$ ovat Jordan-mitallisia, niin $0 \leq m(A) \leq m(B)$.
- Jos joukot $A_1, A_2, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ ovat Jordan-mitallisia, niin tällöin niiden unionit ja leikkaukset ovat Jordan-mitallisia. Jos niiden leikkausjoukot $A_i \cap A_j$ ovat nollajoukkoja aina, kun $i \neq j$ (erityisesti jos ne ovat tyhjiä), niin

$$m\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) = \sum_{j=1}^k m(A_j).$$

- Jos A on Jordan-mitallinen, ja $I_1, I_2, \dots, I_k \subseteq A$ on kokoelma välejä, joiden leikkaukset ovat nollajoukkoja, niin

$$m(A) \geq \sum_{i=1}^k m(I_i).$$

Jos $\mathcal{F}$ on kaikkien tällaisten välien kokoelmien joukko, niin

$$m(A) = \sup_{\mathcal{I} \in \mathcal{F}} \sum_{I \in \mathcal{I}} m(I).$$

Joukon Jordanin mitta saadaan siis ottamalla supremum sen sisältävien alkiovieraiden välien mittojen summista.

- Jos $I_1, I_2, \dots, I_k$ on kokoelma välejä, joka peittää joukon A , eli $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k I_i$, niin

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^k m(I_i).$$

Jos $\mathcal{F}$ on kaikkien tällaisten välien kokoelmien joukko, niin

$$m(A) = \inf_{\mathcal{I} \in \mathcal{F}} \sum_{I \in \mathcal{I}} m(I).$$

Joukon Jordanin mitta saadaan siis ottamalla infimum sen peittävien välien mittojen summista.

Lemma 3.33. *Olko $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jokin lineaarikuvaus, ja M sen matriisi luonnollisen kannan suhteen. Tällöin $|\det M|$ antaa mitan venytyskertoimen kuvattaessa mitallisia joukkoja, eli jokaiselle Jordan-mitalliselle joukolle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on voimassa yhtälö*

$$m(T(A)) = |\det M| m(A).$$

Erityisesti siis $T(A)$ on aina myös Jordan-mitallinen.

Todistus. Kurssin *Lineaarialgebra* perusteella tiedämme, että M voidaan kirjoittaa alkeismatriisien tulona. Koska matriisien kertolasku vastaa lineaarikuvausten yhdistämistä, niin induktiolla tuloesityksessä esiintyvien alkeismatriisien lukumäärän suhteen nähdään, että riittää perustella väite siinä tapauksessa, jossa M on jokin alkeismatriisi.

Edelleen Huomautuksen 3.32 kahden viimeisen kohdan perusteella riittää käsitellä tapaus, jossa A on itse jokin välin. Käsitellään kukin kolmesta alkeismatriisityypistä erikseen.

Jos M vastaa alkeismuunnosta, jossa yksi koordinaateista, sanokaamme x_i , kerrotaan vakiolla c , niin tällöin $\det M = c$. Tällöin lineaarikuvauksessa T väli $[a_i, b_i]$ korvautuu välillä $[ca_i, cb_i]$ (tai välillä $[cb_i, ca_i]$, jos $c < 0$). Tässä tapauksessa väite seuraa suoraan välin mitan määritelmästä, sillä joka tapauksessa välin $[a_i, b_i]$ pituus tulee $|c|$ -kertaiseksi.

Jos M vastaa alkeismuunnosta, jossa kaksi koordinaateista, sanokaamme x_i ja x_j , vaihdetaan keskenään, niin tällöin $\det M = -1$. Tason suorakaiteiden $[a_i, b_i] \times [a_j, b_j]$ ja $[a_j, b_j] \times [a_i, b_i]$ pinta-alat ovat samat. Koska $|\det M| = 1$, niin väite seuraa tässäkin tapauksessa.

Jos M vastaa alkeismuunnosta, jossa matriisin yksi vaakarivi lisätään toiseen vakiolla kerrottuna, niin lineaarikuvauksena tämä kuvaa 2-ulotteisen suorakaiteen $[a_i, b_i] \times [a_j, b_j]$ suunnikaaksi, jonka kanta on edelleen $b_i - a_i$ ja korkeus $b_j - a_j$. Kyseisellä suunnikkaalla on sama pinta-ala kuin alkuperäisellä suorakaiteella. Koska $\det M = 1$, väite pitää paikkansa myös tässä tapauksessa. $\square$

Seuraus 3.34. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin, ja $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$. Oletetaan, että funktion $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ kaikkien komponenttien kaikki ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia kaikkialla A :ssa. Olkoon $I(\mathbf{b}) = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ joukkoon A sisältyvä väli. Kun tässä $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \rightarrow \mathbf{a}$, niin välin $I(\mathbf{b})$ ja sen kuvajoukon $g(I(\mathbf{b}))$ mittojen suhde lähestyy raja-arvonaan Jacobin matriisin $D(g)(\mathbf{a})$ determinantin itseisarvoa:

$$\lim_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{m(g(I(\mathbf{b})))}{m(I(\mathbf{b}))} = |\det(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}))|.$$

Todistus. Yksityiskohdat sivuutetaan. Heuristinen perustelu on, että lähellä pistettä $\mathbf{a}$ funktion g arvojen erotukset saadaan kaavasta

$$g(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{a}) \approx D(g)(\mathbf{a})(\mathbf{h})$$

sitä tarkemmin mitä pienempi vektori $\mathbf{h}$ on. Näin ollen joukkoa $g(I(\mathbf{b}))$ voidaan approksimoida hyvin joukolla $D(g)(\mathbf{a})(I(\mathbf{b}))$. Lemma 3.33 antaa väitteen. $\square$

Tässä esiintyvää determinanttia

$$J(g)(\mathbf{a}) = \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right)$$

kutsutaan funktion g Jacobin determinantiksi pisteessä $\mathbf{a}$. Kun kuvausta g ajatellaan sijoituksena $x_i = g_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, tästä käytetään myös merkintää

$$J(g) = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}.$$

Lause 3.35. (Sijoitus integraaliin). Oletetaan, että $B, A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $g : B \rightarrow A$ on differentioituva funktio, joka on nollajoukkojen ulkopuolelle bijektio. Oletetaan, että $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on integroituva funktio. Tällöin

$$\int_A f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_B f(g(\mathbf{y})) |J(g)(\mathbf{y})| dy_1 dy_2 \dots dy_n.$$

Todistus. Heuristinen perustelu tälle on, että integraali yli B :n laskee saman integraalin kuin integraali yli A :n, mutta käyttäen pylväitä, joiden pohjat eivät ole välejä, vaan jakoa, jonka pohjat ovat muoto $g(I)$, missä

I on väli. Jakobiaani tulee mukaan mittojen suhteena $m(g(I))/m(I)$. Yksityiskohtainen perustelu käyttäen mittateorian koneistoa löytyy muun muassa Rudinin kirjasta. $\square$

Huomautus 3.36. Yllä vaatimus funktion g bijektiivisyydestä seuraa siitä, että haluamme käydä integroimisalueen A läpi A) kokonaan, ja B) vain yhden kerran. Nollajoukkopoikkeus voidaan sallia, koska integroitavan funktion arvon muuttaminen nollajoukossa ei muuta integraalin arvoa.

Tämän kurssin (ja itse asiassa useiden sovellusten) kannalta Lauseen 3.35 tärkeimmät sovellukset liittyvät 2- ja 3-ulotteisiin koordinaatistomuunnoksiin. Etenkin luonnontieteellisissä sovelluksissa integroimisalue on usein muodoltaan sellainen, että se on helpompi kuvailla napakoordinaattien tai vastaavien avulla. Käsittelemme näitä luvun lopuksi. Matkan varrella esittelen samalla ns. mitta-alkiot (2-ulotteisessa tapauksessa pinta-alkion, ja 3-ulotteisessa tapauksessa tilavuusalkion). Ne valottavat Jakobiaanitekijän geometrista alkuperää.

Kartesinen pinta-alkio dA on yksinkertaisesti suorakaide $\subset \mathbb{R}^2$, jonka reunat ovat koordinaattiakselien suuntaisia, sivujen pituudet (eli vastaavien koordinaattien vaihteluvälien pituudet) dx ja dy . Tällaisen suorakaiteen pinta-ala on

$$dA = dx dy.$$

Huomaa, että tämä ei riipu siitä, missä päin tasoa kyseinen pinta-alkio sijaitsee. Kunhan x -koordinaatin ja y -koordinaatin vaihteluvälien pituudet tunnetaan, niin suorakaiteen pinta-ala on aina sama. Pinta-alkiota käytetään usein myös osana integraalimerkintää:

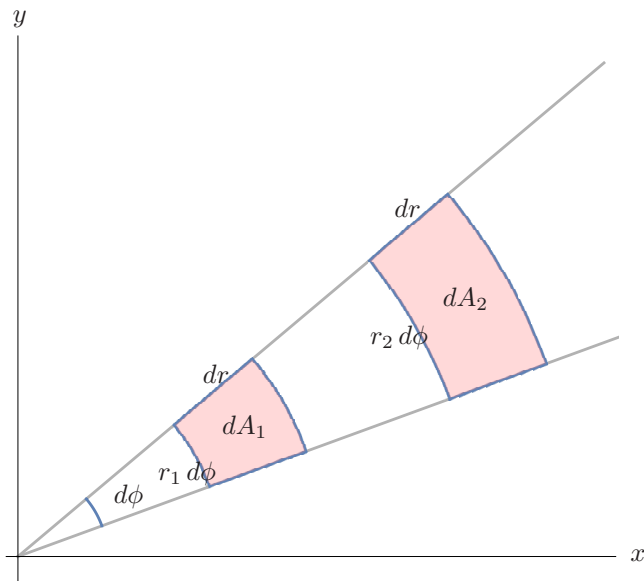
$$\int_S f = \int_S f dA = \int_S f(x, y) dx dy.$$

Napakoordinaatteja käytettäessä tilanne muuttuu. Kuvassa 2.14 näemme tyypillisen tasoalueen, jossa r -koordinaatti ja ϕ -koordinaatti on kumpikin rajattu lyhyelle välillä. Kuvassa 3.25 törmäämme seuraavan ilmiöön. Kuvassa on kaksi tasoaluetta (pinkit alueet). Kummallakin ϕ -koordinaatin vaihteluväli on sama $d\phi$:n mittainen väli. Toisella r -koordinaatin vaihteluväli on $[r_1, r_1 + dr]$, toisella $[r_2, r_2 + dr]$. Siis kummallakin dr :n mittainen. Selvästi näkyy, että toinen alueista on toista suurempi. Selitys on siinä, että $r_2 > r_1$. Jos nimittäin kuvittelet, että sekä dr että $d\phi$ ovat hyvin pieniä, alueet dA_1 ja dA_2 muistuttavat enemmän ja enemmän suorakaidetta (vrt. Kuvaan 2.14). Kummallakin suorakaiteella on korkeutena dr , mutta (kaarevan) kannan pituus = kaaren pituus on toisella $r_1 d\phi$ ja toisella $r_2 d\phi$. Kun $d\phi$ ja dr ovat *infinitesimaalisen pieniä*, niin saamme $dA_1 = r_1 dr d\phi$ ja $dA_2 = r_2 dr d\phi$. Koska $r_2 > r_1$, niin $dA_2 > dA_1$. Itse asiassa napakoordinaateissa ilmaistuna pinta-alkio saadaan lausekkeesta

$$dA = r dr d\phi.$$

Mitä Jacobin determinantti sanoo tästä? Napakoordinaattien käyttö vastaa funktiota

$$(x, y) = g(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi).$$



Kuva 3.25: Samanmittaiset napakoordinaattien vaihteluvälit vastaavat pinta-alkion sijainnista riippuen eri-kokoisia tasoalueita

Esimerkissä 2.23 saimme tämän lineaariseksi derivaataksi

$$Dg(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Determinantiksi saadaan siis

$$J(g)(r, \phi) = \cos \phi r \cos \phi - \sin \phi (-r \sin \phi) = r(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r.$$

Kaava $dA = r dr d\phi$ vastaa siis tarkalleen Seurauksen 3.34 lupaamaa pienten välien mitan muuntumista.

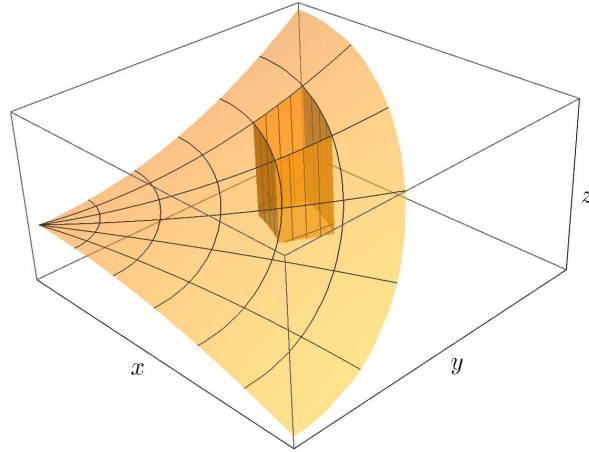
Kuvassa 3.26 näemme, millaisten pylväiden avulla napakoordinaatteja käytettäessä kappaleen tilavuus lasketaan. Pylväiden korkeudet saadaan edelleen integroitavan funktion arvoista, mutta niiden pohjina esiintyvien laattojen alat riippuvat koordinaattien vaihteluvälien dr ja $d\phi$ lisäksi laatan sijainnista. Kauempana origosta samankokoiset vaihteluvälit johtavat isompaan laattaan. Jakobiaani mittaa tätä, kuten Kuvassa 3.25.

Kun integraalia yli tasoalueen lasketaan napakoordinaatteja käytettäessä, on huomiota kiinnitettävä siihen, että uusi integroimisalue B vastaa alkuperäistä integroimisaluetta A . Tarkemmin:

$$(r, \phi) \in B \iff (r \cos \phi, r \sin \phi) \in A.$$

Napakoordinaatit valitaan käytettäväksi usein juuri siitä syystä, että alue B on kuvattavissa yksinkertaisemmin iteroidun integraalin laskemista silmällä pitäen.

Napakoordinaatteja käytettäessä melkein aina r valitaan sisemmän integraalin integroismuuttujaksi. Tällöin integraalia vastaava kappale luontevasti muodostuu kapeiden sektoreiden yläpuolella olevista "piirakanpalasista" kuten Kuvassa 3.27. Vertaa tätä Kuvan 3.10 tilanteeseen. Säteittäisten poikkileikkauspintojen



Kuva 3.26: Napakoordinaatteja käytettäessä funktion $f(x, y)$ kuvaajan rajaaman kappaleen tilavuus lasketaan sellaisten infinitesimaalisten pylväiden tilavuuksien dV summana, joiden korkeus on $f(r \cos \phi, r \sin \phi)$, pohjan ala $dA = r dr d\phi$, ja $dV = f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr d\phi$

vuoksi siivut eivät tällä kertaa ole tasapaksuja, ja ohuen viipaleen tilavuus dV on mutkikkaampi. Funktion f arvot kauempana origosta vaikuttavat piirakanpalan tilavuuteen enemmän kuin sen arvot lähellä origoa. Jakobiaanitekijä r huolehtii juuri tästä. Integroimisjärjestyksen valitseminen tällaiseksi on erityisen kätevää, jos integroitavalla funktiolla on kiertosymmetria, jolloin $f(r \cos \phi, r \sin \phi)$ ei lainkaan riipu muuttujasta ϕ . Tällöin ulompaan integraaliin tulee integroitavaksi funktioksi vakio.

Esimerkki 3.37. Lasketaan R -säteisen puolipallon tilavuus pintaintegraalina napakoordinaatteja käyttäen.

Ratkaisu. Rajoituksetta voimme olettaa, että pallon keskipiste on origossa. Tällöin sen pinnan yhtälö on $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Ylempi puolipallo saadaan, kun z -koordinaatti rajataan välille $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Joka tapauksessa (x, y) on rajoitettu ympyrälevyyn

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Puolipallon tilavuus saadaan funktion $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ integraalina yli joukon S .

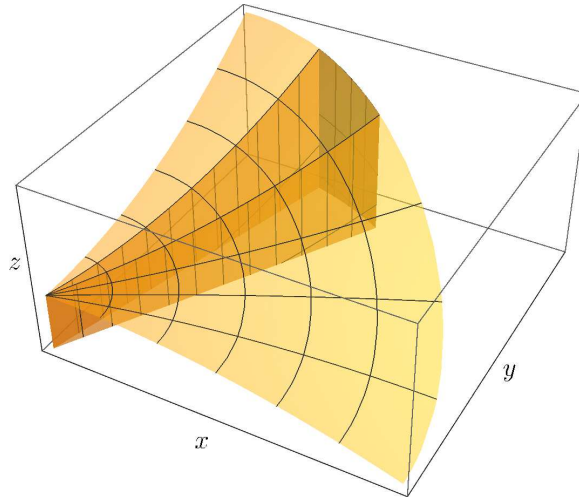
$$V = \int_S f dA.$$

Ympyrälevyn S kuvaileminen napakoordinaatteja käyttäen on yksinkertaista. Piste $(r \cos \phi, r \sin \phi)$ on levysä S jos ja vain jos $r \leq R$ — muita rajoituksia ei ole! Jos annamme kulmamuuttujan ϕ saada kaikki arvot väliltä $[0, 2\pi]$, niin käymme läpi koko levyn tasan yhden kerran.

Siis valitsemme $B : [0, R] \times [0, 2\pi]$ ja $g : B \rightarrow S$ on napakoordinaattimuunnos

$$(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi) = g(r, \phi).$$

Tämä ei aivan ole bijektio, sillä $g(0, \phi) = (0, 0)$ kaikilla ϕ :n arvoilla, ja puolestaan $g(r, 0) = g(r, 2\pi)$ kaikilla r :n arvoilla. Nämä ovat kuitenkin kumpikin nollajoukkoja, joten tämä pulma voidaan yksinkertaisesti sivuuttaa!



Kuva 3.27: Sisäintegraali yli r :n laskee piirakan viipaletta muistuttavan viipaleen tilavuuden $dV = \int_{r=r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr d\phi$.

Näin ollen

$$\int_S f(x, y) dx dy = \int_B f(g(r, \pi)) J(g)(r, \phi) r dr d\phi.$$

Laskimme jo Jacobin determinantin. Koska $x^2 + y^2 = r^2$, niin

$$f(g(r, \pi)) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Näin ollen

$$V = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\phi.$$

Sisäintegraalin laskeminen helpottuu, kun huomaamme, että funktion

$$h(r) = (R^2 - r^2)$$

derivaatta on $h'(r) = -2r$. Integrandina on siis $-\frac{1}{2}h'(r)h(r)^{1/2}$, minkä määräämätön integraali on

$$\int -\frac{1}{2}h'(r)h(r)^{1/2} dr = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} h(r)^{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}h(r)^{3/2}.$$

Siis

$$\begin{aligned} V &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^R d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{R^3}{3} d\phi \\ &= \frac{2\pi R^3}{3}, \end{aligned}$$

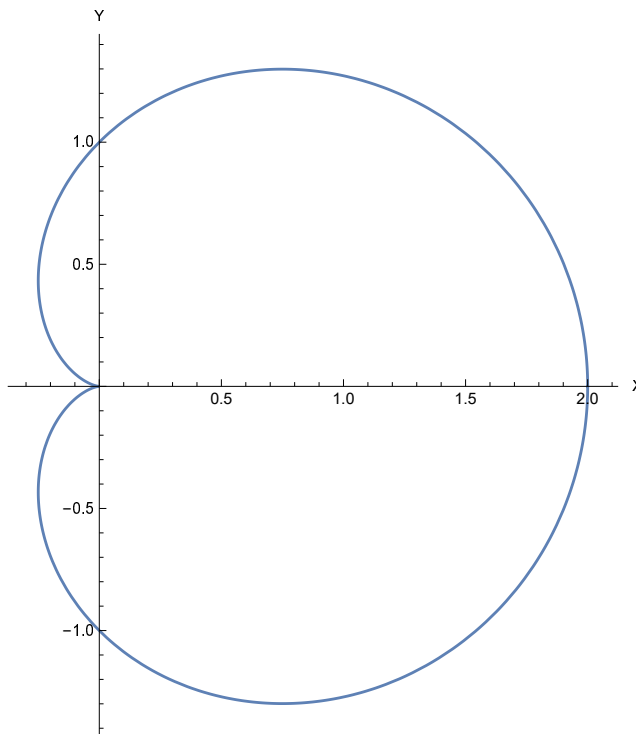
eli puolet R -säteisen pallon tilavuudesta kuten pitikin.

Joskus integroimisalueen reunakäyrä voidaan käytännössä antaa vain napakoordinaatteja käyttäen. Tällöin napakoordinaattien käyttö vastaavan integraalin laskemisessa on tietenkin indikoitu.

Esimerkki 3.38. Niin sanottu *kardioidi*, ks. Kuva 3.28 on tasokäyrä, jonka määrää napakoordinaattiyhtälö

$$r = 1 + \cos \phi.$$

Valmistetaan pipareita, joiden pohjaa rajaa mainittu kardioidi. Piparin paksuus etäisyydellä r ja suunnassa



Kuva 3.28: Napakoordinaattiyhtälön $r = 1 + \cos \phi$ määräämä käyrä

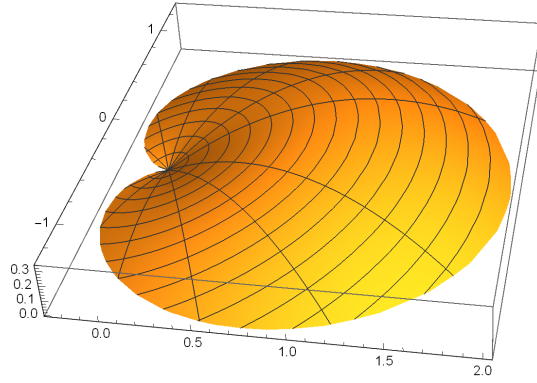
ϕ on

$$z(r, \phi) = \frac{1}{3}r(1 + \cos \phi - r),$$

mistä näemme, että $z(0, \phi) = z(1 + \cos \phi) = 0$, ja että $z(r, \phi) > 0$ aina, kun $0 < r < 1 + \cos \phi$. Laske tällaisen piparin tilavuus. Pipari Kuvassa 3.29.

Ratkaisu. Reunakäyrän antava funktio $r(\phi) = 1 + \cos \phi$ on ei-negatiivinen koko välillä $\phi \in [0, 2\pi]$. Näin ollen piste, jonka napakoordinaatit ovat (r, ϕ) on kardioidin sisäalueessa K silloin ja vain silloin, kun $0 \leq r \leq 1 + \cos \phi$. Piparin tilavuus saadaan integraalista

$$V = \int_K z \, dA.$$



Kuva 3.29: Napakoordinaattikäyrän $r = 1 + \cos \phi$ sekä pintojen $z = 0$ ja $z = r(1 + \cos \phi - r)/3$ rajaama kappale.

Havaintojemme perusteella tämä voidaan laskea iteroituna integraalina ($dA = r dr d\phi$)

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1+\cos \phi} r z(r, \phi) dr d\phi \\
 &= \frac{1}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1+\cos \phi} r^2 (1 + \cos \phi - r) dr d\phi \\
 &= \frac{1}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} (1 + \cos \phi) - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{1+\cos \phi} d\phi \\
 4 &= \frac{1}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{(1 + \cos \phi)^4}{12} d\phi \\
 &= \frac{1}{36} \int_{\phi=0}^{2\pi} (1 + 4 \cos \phi + 6 \cos^2 \phi + 4 \cos^3 \phi + \cos^4 \phi) d\phi.
 \end{aligned}$$

Tässä integroidaan yli koko 2π -mittaisen jakson, joten kosinin parittomien potenssien määrätyt integraalit ovat automaattisesti nolliä. Kaava-arkin nojalla integraalit yli neljännesjakson ovat $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \pi/4$ ja $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx = 3\pi/16$. Näin ollen

$$V = \frac{4}{36} \left(\frac{\pi}{2} + 6 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{16} \right) = \frac{35\pi}{144}.$$

Kolmiulotteisessa avaruudessa puhutaan pinta-alkioiden asemesta *tilavuusalkioista* dV . Karteesisia koordinaatteja käytettäessä $dV = dx dy dz$. Suoraviivaisen tapa yleistää napakoordinaatit avaruuteen $\mathbb{R}^3$ on käyttää ns. *sylinterikoordinaatteja* (r, ϕ, z) . Tällöin koordinaattipari (x, y) korvataan vastaavilla tason napakoordinaateilla (r, ϕ) , ja z -koordinaatti puolestaan jätetään ennalleen. Eli

$$\begin{cases} x &= r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi, \\ z &= z. \end{cases}$$

Huomaa, että tällöin koordinaatti r ei mittaa etäisyyttä origosta, vaan etäisyyttä z -akselilta. Koordinaatis-

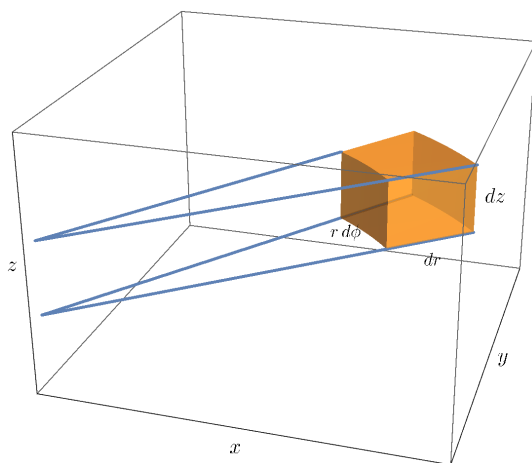
tonmuunnosfunktion

$$g(r, \phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$$

Jacobin matriisiksi saadaan osittaisderivoimalla

$$Dg = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kehittämällä viimeisen vaakarivin mukaan saadaan Jacobin determinantiksi $\partial(x, y, z)/\partial(r, \phi, z) = r$.



Kuva 3.30: Sylinterikoordinaattien tilavuusalkio. Etäisyys z -akselista vaihtelee dr :n mittaisella välillä, suuntakulma $d\phi$:n mittaisella välillä, z -koordinaatti dz :n mittaisella välillä.

Tämä näkyy myös tilavuusalkiossa, ks. Kuva 3.30. Jacobin determinantin antama lauseke

$$dV = r dr d\phi, dz$$

näkyä kuvassa siten, että infinitesimaalisen pieni tilavuusalkio on suorakulmainen koppi, jonka särmien pituudet ovat dr , $r d\phi$ ja dz . Kuten napakoordinaattienkin tapauksessa tilavuusalkion koko riippuu paitsi koordinaattien vaihteluvälien pituuksista niin myös kopin sijainnista Jacobin determinantin antaman r -kertoimen välityksellä.

Esimerkki 3.39. Laske funktion $f(x, y, z) = y + z$ integraali yli alueen A , jota rajaavat putkipinta $x^2 + y^2 = 1$, taso $z = 0$ ja pinta $z = 1 + (x^2 + y^2)/4$.

Ratkaisu. Käytetään sylinterikoordinaatteja. Selvästi muuttujan z vaihteluväli on $0 \leq z \leq 1 + r^2/4$. Kulmamuuttujaa ϕ ei rajaa mikään, joten annetaan sen käydä läpi väli $[0, 2\pi]$ (jotta koko alue A tulee käytyä läpi tarkalleen kerran). Putki rajaa muuttujan r vaihteluväliksi $0 \leq r \leq 1$. Integroitava funktio on sylinterikoordinaateissa

$$f(r, \phi, z) = y + z = z + r \sin \phi.$$

Tässä z -koordinaatin vaihteluväli riippui muista muuttujista, joten on luontevinta tehdä z -integrointi ensin. Kysytty integraali on siis Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{1+r^2/4} (z + r \sin \phi) r \, dz \, dr \, d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \left(\frac{r}{2} + \frac{r^3}{4} + \frac{r^5}{32} + r^2 \sin \phi + \frac{1}{4} r^4 \sin \phi \right) dr \, d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\frac{61}{192} + \frac{23}{60} \sin \phi \right) d\phi \\ &= \frac{61\pi}{96}.\end{aligned}$$

Esimerkki 3.40. Kirjoitetaan Esimerkin 3.27 integraali käyttäen sylinterikoordinaatteja.

Ratkaisu. Integroimisalue on puoliavaruudessa $z \geq 0$ pallopinnan $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{1 - r^2}$ alapuolella ja kartiopinnan $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ yläpuolella oleva avaruuden osa. Näimme, että pari (x, y) oli rajattu origokeskiseen ympyrään, jonka säde on $1/\sqrt{2}$. Integroimisalue on symmetrinen z -akselin ympäri tapahtuvien kiertojen suhteen, joten ϕ ei vaikuta rajoihin. Huomaa erityisesti, että z -koordinaatin vaihteluväli pisteen (x, y) yläpuolella riippuu ainoastaan koordinaatista r . Siis

$$\int_K f(x, y, z) \, dV = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1/\sqrt{2}} \int_{z=r}^{\sqrt{1-r^2}} r f(r \cos \phi, r \sin \phi, z) \, dz \, dr \, d\phi.$$

Tutustutaan luvun lopuksi 3-ulotteisen avaruuden *pallokoordinaatteihin*. Niitä käytettäessä pisteen paikka kuvataan antamalla sen etäisyys r origosta, ja sen suunta määrätään kahden kulmamuuttujan ϕ ja θ avulla hieman samaan tapaan kuin karttapallolla paikkakunnan sijainti ilmaistaan pituus- ja leveysasteen avulla.

Kun xz -tason piste $A = (x_0, 0, z_0)$, $x_0 \geq 0$, pyörähtää z -akselin ympäri, se piirtää ympyrän tasossa $z = z_0$. Ympyrällä ovat ne pisteet, jotka ovat etäisyydellä x_0 z -akselista. Jos ϕ on kiertokulma, niin ko. pisteen koordinaatit ovat

$$(x, y, z) = (x_0 \cos \phi, x_0 \sin \phi, z_0),$$

ja parametri $\phi \in [0, 2\pi)$. Tämän pyöräisympyrän pisteet ovat kaikki etäisyydellä $\sqrt{x_0^2 + z_0^2}$ origosta. Kun annamme pisteen A käydä läpi kaikki origokeskisen r -säteisenpuoliympyrän

$$C = \{(r \sin \theta, 0, r \cos \theta) \mid \theta \in [0, \pi]\}$$

pisteet, niin syntyvät pyöräisympyrät täyttävät r -säteisen origokeskisen pallon. Huomaa, että puoliympyrän parametrissa käytetään hieman tavallisesta poiketen siniä x -koordinaatin yhteydessä, ja kosinia z -koordinaatin yhteydessä. Tällä päästään siihen, että kaikilla C :n pisteillä $x \geq 0$ kun taas z käy läpi suljetun välin $[-r, r]$. Huomaa myös, että kulmamuuttuja θ rajoitettiin välille $[0, \pi]$.

Kaikki origokeskisen r -säteisen pallokuoren pisteet (x, y, z) saadaan siis parametrisoinnista

$$\begin{cases} x &= r \cos \phi \sin \theta, \\ y &= r \sin \phi \sin \theta, \\ z &= r \cos \theta. \end{cases}$$

- Kulmakoordinaatti θ kertoo pallopinnan pisteen ‘leveysasteen’. Karttapallosta poiketen kuitenkin siten, että kun $\theta = 0$ ollaan pohjoisnavalla $(x, y, z) = (0, 0, r)$, ja kun $\theta = \pi$ ollaan etelänavalla $(x, y, z) = (0, 0, -r)$. Pohjoisella pallonpuoliskolla $\theta \in [0, \pi/2)$, päiväntasaajalla $\theta = \pi/2$, ja eteläisellä pallonpuoliskolla $\theta \in (\pi/2, \pi]$. Koordinaatin θ voidaan siis ajatella kasvavan pohjoisesta etelään kuljettaessa.
- Kulmakoordinaatti ϕ puolestaan kertoo pallopinnan pisteen pituuspiirin (=meridiaanin). Tässä nolla-meridiaanin pisteiden y -koordinaatti on nolla (sama koskee niitä pisteitä, joilla $\phi = \pi$). Parametrisoinnille aiheutuu epäyksikäsitteisyyttä siitä, että kulmat $\phi = 0$ ja $\phi = 2\pi$ vastaavat samoja pisteitä. Jos koordinaattiakselisto asetetaan ‘oikeakätiseksi’, niin ϕ kasvaa itään päin liikuttaessa. Voidaan valita myös ϕ väliltä $[-\pi, \pi]$. Tällöin negatiiviset ϕ :n arvot vastaavat kartapallon läntisiä ja positiiviset itäisiä pituusasteita.
- Koko avaruus $\mathbb{R}^3$ saadaan parametrisoitua, kun r käy läpi välin $[0, \infty)$. Kuten napakoordinaattejakin käytettäessä tässäkin bijektiivisyys särkyy, kun $r = 0$. Nollasäteisen pallopinnan pistehän on origossa sen pituus- ja leveysasteista riippumatta.

Kuvauksen $(x, y, z) = g(r, \theta, \phi)$ derivaatan matriisi on

$$Dg(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Kehittämällä tämä alimman vaakarivin suhteen saadaan Jacobin determinantiksi

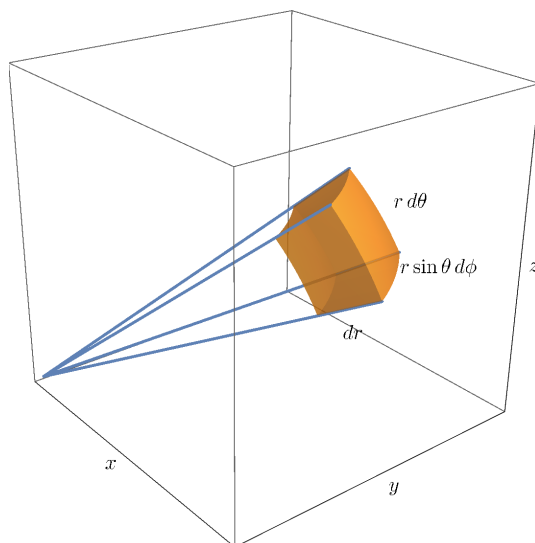
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta.$$

Huomaamme, että Jacobin determinantti lähestyy nollaa paitsi silloin, kun $r \rightarrow 0$, niin myös silloin, kun $\sin \theta \rightarrow 0$, eli kun $\theta \rightarrow 0$ tai $\theta \rightarrow \pi$. Nämä leveysasteet vastaavat pallopinnan napoja. Karttapallolla tämä ilmenee siten, että napa-alueilla (x, y) -pari on lähellä origoa (tai siis z -akselia) riippumatta r - ja ϕ -koordinaatin arvoista, joten tilavuusalkiot jäävät tällöin väkisinkin pieniksi.

Jacobin determinantin lausekkeen nojalla tilavuusalkio, ks. Kuva 3.31, on

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi.$$

Kuva yrittää havainnollistaa sitä, että tilavuusalkion sisällä r -koordinaatti vaihtelee dr :n mittaisella välillä, kulmakoordinaatit vastaavasti. Voit harjoitustehtävänä osoittaa, että yllä lasketun Jacobin matriisin pystyivät ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa olevia vektoreita. Tilavuusalkiossa tämä ilmenee siten, että



Kuva 3.31: Pallokoordinaattien tilavuusalkio

(infinitesimaalisena) se on ‘suorakulmainen särmiö’, jonka sivujen pituudet ovat dr (ulospäin jatkuva sivu), $r d\theta$ (pohjois-etelä suuntainen sivu) ja $r \sin \theta d\phi$ (itä-länsi suuntainen sivu). Viimeksi mainitun tekijä $r \sin \theta$ selittyy sillä, että kyseinen leveyspiiri on etäisyydellä $r \sin \theta$ pyöräysakselista eli z -akselista. Tähän liittyvä VAROITUS: pallokoordinaatti r ja sylinterikoordinaatti r mittaavat ERI asioita. Harjoitustehtävänä voit perusteella yhteyden

$$r_{\text{pallo}} \sin \theta = r_{\text{sylinteri}}.$$

Joissakin lähteissä käytetään sekaannuksen välttämiseksi toisesta näistä symbolia ρ . Koska merkitys aina selviää asiayhteydestä, en pitänyt tätä tarpeellisenä.

Esimerkki 3.41. Lasketaan R -säteisen puolipallokuulan

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$$

tilavuus pallokoordinaatteja käyttäen (vrt. Esimerkki 3.37).

Ratkaisu. Ylemmällä puolipallolla θ on välillä $[0, \pi/2]$. Pituuspiiri ϕ vaihtelee välillä $[0, 2\pi]$ muista koordinaateista riippumatta. Samoin etäisyys origosta r vaihtelee välillä $[0, R]$ muista koordinaateista riippumatta. Toisin sanoen, pallokoordinaattikolmikoin (r, θ, ϕ) piste on joukossa P silloin ja vain silloin, kun $r \in [0, R]$ (maksimietäisyys origosta), $\phi \in [0, 2\pi]$ (ei rajoituksia) ja $\theta \in [0, \pi/2]$ (ylempi puoliavaruus).

Tilavuus (tai mitta!) saadaan integroimalla vakiofunktio $f = 1$ yli joukon P . Siis

$$\begin{aligned}
 V &= \int_P 1 \, dV \\
 &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^R r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\
 &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \left(\left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^R \right) d\theta \, d\phi \\
 &= \frac{R^3}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\left[-\cos \theta \right]_{\theta=0}^{\pi/2} \right) d\phi \\
 &= \frac{R^3}{3} \int_{\phi=0}^{2\pi} 1 \, d\phi \\
 &= \frac{2\pi R^3}{3}.
 \end{aligned}$$

Kun pallokoordinaatti r vaihtelee välillä $[0, \infty)$, pituuspiirikoordinaatti ϕ välillä $[0, 2\pi]$ mutta leveyspiirikoordinaatilla θ on jokin kiinteä arvo, niin vastaavat karteesisen avaruuden pisteet käyvät läpi sellaisen kartiopinnan, jolla on kärki origossa, ja z -akseli symmetria-akselina. Tämä lienee helpointa mieltää kuvasta katsoen, mutta seuraa myös laskusta

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r^2 \sin^2 \theta = \tan^2 \theta z^2.$$

Esimerkki 3.42. Kirjoitetaan Esimerkin 3.27 integraali käyttäen pallokoordinaatteja.

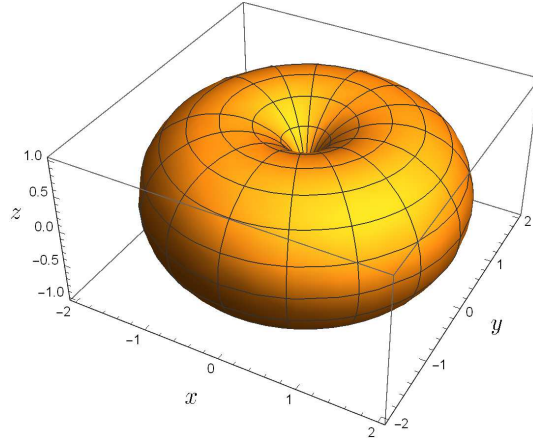
Ratkaisu. Pallopinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ yhtälö saa pallokoordinaatteja käytettäessä yksinkertaisen muodon $r = 1$. Edellisen kappaleen havainnon perusteella kartiopinta

$$x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0,$$

vastaa tarkalleen niiden pisteiden joukkoa, joilla leveyspiirikoordinaatti $\theta = \pi/4$ ($\tan(\pi/4) = 1$), ja kartiopinnan yläpuolella $\theta \in [0, \pi/4]$. Pallokoordinaatteja käyttäen joukosta K tuleekin (r, θ, ϕ) -avaruuden väli, eli $B = [0, 1] \times [0, \pi/4] \times [0, 2\pi]$. Näin ollen Fubinin lauseen mukainen iteroitu integraali saa yksinkertaisen muodon

$$\begin{aligned}
 \int_K f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_B f(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\
 &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^1 f(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi.
 \end{aligned}$$

Esimerkki 3.43. Suoraviivaisesti nähdään (harjoitustehtävä), että napakoordinaattiyhtälö $r = 2 \sin \phi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ määrää xy -tasossa 1-säteisen ympyrän, joka sivuaa x -akselia origossa, ja jonka keskipiste on $(0, 1)$. Kun koordinaattien roolit vaihdetaan vastaamaan pallokoordinaatteja, niin tämä tarkoittaa, että xz -tason käyrä



Kuva 3.32: Pallokoordinaattiyhtälön $r = 2 \sin \theta$ rajaama kappale

$r = 2 \sin \theta, x = r \sin \theta, y = 0, z = r \cos \theta$ on 1-säteinen ympyrä, joka sivuaa z -akselia origossa, ja jonka keskipiste on $(1, 0, 0)$. Kun tämä ympyrä pyörähtää z -akselin ympäri, se rajaa Kuvan 3.32 kappaleen K . Lasketaan integraali

$$\int_K x^2 dV.$$

Ratkaisu. Välillä $\theta \in [0, \pi]$ funktio $2 \sin \theta$ saa vain positiivisia arvoja. Näin ollen piste, jonka pallokoordinaatit ovat (r, θ, ϕ) kuuluu kappaleeseen K silloin ja vain silloin, kun $(0 \leq) r \leq 2 \sin \theta$. Tällä kertaa siis r -koordinaatin vaihteluväli riippuu leveysastekoordinaatista θ . Mutta θ ja ϕ saavat toisistaan riippumatta kaikki mahdolliset arvot normaaleilta vaihteluväleiltään $[0, \pi]$ ja $[0, 2\pi]$.

Pallokoordinaatteja käytettäessä integroitava funktio $f(x, y, z) = x^2$ saa muodon (sijoitetaan x :n paikalle $x = r \cos \phi \sin \theta$)

$$(f \circ g)(r, \theta, \phi) = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi.$$

Näin ollen integraalimme saadaan iteroidusta integraalista

$$\begin{aligned} \int_K f dV &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2 \sin \theta} (r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi) (r^2 \sin \theta) dr d\phi d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2 \phi \sin^3 \theta \left(\left| \frac{r^5}{5} \right|_{r=0}^{2 \sin \theta} \right) d\phi d\theta \\ &= \frac{32}{5} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^8 \theta \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \right) d\theta. \end{aligned}$$

Tässä sisäintegraalin arvo

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = 4 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \cos^2 \phi d\phi = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$$

saadaan kaava-arkista. Tämä tekijä ei riipu θ :sta, joten kaava-arkin avulla saadaan lopulta

$$\int_K f dV = \frac{32\pi}{5} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^8 \theta d\theta = \frac{32 \cdot 2\pi}{5} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^8 \theta d\theta = \frac{64\pi}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi^2}{4}.$$

Esimerkki 3.44. Erään planeetan B (pallomainen, säde R) tiheys sen pinnalla on ρ_0 . Planeetan painovoiman ansioista tiheämpi aine on painunut sen keskelle. Oletetaan, että tiheys planeetan sisälle mentäessä kasvaa lineaarisesti syvyyden funktiona siten, että planeetan keskipisteessä se on $3\rho_0$. Laske planeetan massa.

Ratkaisu. Asetetaan origo planeetan keskipisteeseen. Tehtävässä annettiin, että planeetan tiheys $\rho = \rho(x, y, z)$ pisteessä (x, y, z) riippuu vain etäisyydestä r

$$\rho = \rho(r) = A + Br,$$

missä A, B ovat vakioita. Yhtälöistä $\rho(0) = 3\rho_0$ ja $\rho(R) = \rho_0$ saadaan $A = 3\rho_0, B = -2\rho_0/R$.

Keskipisteestä etäisyydellä $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ olevan pienen tilavuusalkion $dV = dx dy dz$ massa on siten

$$dm = \rho(x, y, z) dV = \rho_0 \left(3 - \frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{R} \right) dV.$$

Planeetan massa m saadaan laskemalla tilavuusalkioiden massat yhteen, eli integraalista

$$m = \int_B dm = \int_{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2} \rho_0 \left(3 - \frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{R} \right) dx dy dz.$$

Koska planeetta on pallosymmetrinen ja tiheysfunktio riippuu vain pallokoordinaatista r , on ilmeistä siirtyä pallokoordinaatteihin, jolloin $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$.

Näin ollen vastaukseksi saadaan

$$\begin{aligned} m &= \rho_0 \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(3 - \frac{2r}{R} \right) r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr \\ &= 2\pi \rho_0 \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \left(3 - \frac{2r}{R} \right) r^2 \sin \theta d\theta dr \\ &= 2 \cdot 2\pi \rho_0 \int_{r=0}^R \left(3 - \frac{2r}{R} \right) r^2 dr \\ &= 2 \cdot 2\pi \rho_0 \left(\frac{R^3}{2} \right) = 2\pi R^3 \rho_0. \end{aligned}$$

Tuloksen jälkitarkasteluna toteamme seuraava. Koska planeetan tilavuus on $V = 4\pi R^3/3$, niin sen keskimääräinen tiheys on

$$\rho_{\text{average}} = \frac{m}{V} = 3\rho_0/2.$$

Tämä on välillä $(\rho_0, 3\rho_0)$, joten se on ainakin jossain määrin järkevä. Suuri osa planeetan tilavuudesta on lähellä sen pintaa, joten on luonnollista, että keskimääräistä tiheyttä laskettaessa tiheys pinnalla on merkittävämpi kuin tiheys keskellä.

3.5 Integraalilla määritelyn funktion derivointi

Tarkastellaan luvun lopuksi Fubinin lauseen sovelluksena silloin tällöin esiintyvää sääntöä, jota usein kutsutaan "derivoinniksi integraalimerkin alla". Se käsittelee integraalina määriteltyä funktiota

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Osoittautuu, että tietäin säännöllisoletuksin tämän funktion derivaatta (muuttujan y suhteen) saadaan integroimalla vastaavaa osittaisderivaatta $\partial f/\partial y$.

Lause 3.45. Olkoon $a < b, c < d$ ja $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jonka osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ on olemassa ja jatkuva välillä $[a, b] \times [c, d]$ (välin reunalla ilmeisellä tavalla tulkittuna). Silloin funktio

$$F(y) = \int_{x=a}^b f(x, y) dx$$

on derivoituva välillä $y \in [c, d]$ ja

$$F'(y) = \int_{x=a}^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Todistus. Käytetään Analyysin Peruslausetta ja Fubinin Lausetta (Lause 3.10). Kaikille $u \in [c, d]$ on osittaisderivaatan f_y jatkuvuuden ja Analyysin Peruslauseen nojalla

$$f(x, u) = f(x, c) + \int_{y=c}^u f_y(x, y) dy.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^b f(x, u) dx &= \int_{x=a}^b f(x, c) dx + \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^u f_y(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{x=a}^b f(x, c) dx + \int_{y=c}^u \left(\int_{x=a}^b f_y(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Tässä ensimmäinen termi ei lainkaan riipu u :sta. Jälkimmäisessä termissäkin u esiintyy vain integroimisvälin ylärajana, joten derivoimalla u :n suhteen (Analyysin Peruslause!) saadaan väite

$$F'(u) = \int_{x=a}^b f_y(x, u) dx.$$

□

Tällä tuloksella on *Leibnizin sääntönä* tunnettu yleisempi versio, jossa funktion määrittelevän integraalin ylä- ja alarajat riippuvat muuttujasta y . Jos $\phi, \psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ovat derivoituvia funktioita, niin päättelyn mutkikkaampi versio antaa tulokseksi

$$\frac{d}{dy} \int_{x=\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = \int_{x=\phi(y)}^{\psi(y)} f_y(x, y) dx + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\phi(y), y)\phi'(y).$$

Sivuutamme yksityiskohdat, mutta toteamme, että tulos on analoginen myös seuraavan Analyysin Peruslauseen yleistysten kanssa

$$\frac{d}{dx} \int_{t=a(x)}^{b(x)} f(t) dt = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x).$$

Edelleen tulos voidaan yleistää tilanteeseen, jossa funktion määrittelevä integraali on epäoleellinen (tyypillisesti yli äärettömän välin). Tilanne esiintyy muun muassa *integraalimuunnosten* ominaisuuksia tarkasteltaessa. Tällöin edellytetään derivaatan antavalta integraalilta tasaista suppenemista. Yksityiskohdat vastaavilla kursseilla.

Luku 4

Ääriarvot ja Implisiittifunktiolause

Tässä luvussa perehdymme muutamiin usean muuttujan funktion differentiaalilaskennan sovelluksiin. Aloitamme yleistämällä usean muuttujan funktioille lukiokursseista tutun derivaatan sovelluksen, yhden muuttujan funktion lokaalien ääriarvojen etsimisen derivaatan nollakohtien avulla. Luvun lopussa tutustumme sidottuihin ääriarvotehtäviin, joissa minimoitavan/maksimoitavan funktion muuttujien arvoja ei voida valita toisistaan riippumattomasti, vaan niitä sitoo yksi tai useampi side-ehto. Tämän tyyppisten tehtävien ymmärtämiseksi käytämme ns. *implisiittistä derivointia*. *Implisiittifunktiolause* on mielenkiintoinen niin teorian kehittämisen kuin sovellustenkin kannalta, joten perehdymme sen sisältöön luvun keskivaiheilla hieman pidempään. Valitettavasti todistukset on jätettävä syventävien opintojen kursseille.

4.1 Lokaaleista ääriarvoista

Määritelmä 4.1. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Sanotaan, että funktiolla f on joukon A sisäpisteessä $\mathbf{a}$ *lokaali minimi*, jos löytyy sellainen $r > 0$, jolle $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ aina, kun $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$. Vastaavasti sanotaan, että funktiolla f on pisteessä $\mathbf{a} \in A^\circ$ *lokaali maksimi*, jos löytyy sellainen $r > 0$, jolle $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ aina, kun $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Huomautus 4.2. Joissakin lähteissä sallitaan tässä funktioiden arvojen yhtäsuuruus palloympäristön pisteissä. Valittu versio helpottaa eräiden tulostemme muotoilua. Muihin lähteisiin tutustuessasi tarkista käytössä olevat määritelmät!

Näemme heti, että jos funktiolla f on lokaali ääriarvo pisteessä $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, niin tällöin myös yhden muuttujan funktiolla $g(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ on vastaava lokaali ääriarvo (minimi tai maksimi) pisteessä $t = a_i$. Erityisesti, jos funktio f on osittaisderivaattoineen jatkuva pisteen $\mathbf{a}$ jossakin ympäristössä, voimme kurssin Analyysi I tulosten perusteella heti päätellä, että on oltava

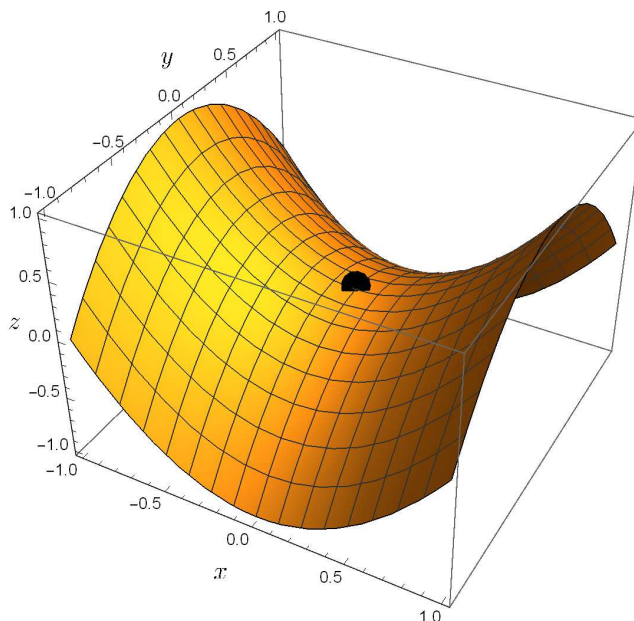
$$0 = g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Tämä päättely voitiin tehdä kaikille koordinaateille $x_1, x_2, \dots, x_n$, joten olemme perustelleet seuraavan tuloksen.

Lemma 4.3. Jos f on osittaisderivaattoinen jatkuva joukossa A , ja sillä on lokaali ääriarvo pisteessä $\mathbf{a} \in A^\circ$, niin $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Kutsumme pisteitä, joissa funktion f gradientti häviää (funktion f) *kriittisiksi pisteiksi*. Ne ovat ääriarvokohtakandidaatteja samalla tavalla kuin derivaatan nollakohdat yhden muuttujan funktion tapauksessa. Seuraava esimerkki osoittaa kuitenkin, että tilanne on nyt mutkikkaampi kuin yhden muuttujan funktion tapauksessa. Syynä on se, että kriittistä pistettä voidaan lähestyä useista eri suunnista.

Esimerkki 4.4. Selitä, miksi funktiolla $f(x, y) = x^2 + y^2$ on origossa lokaali minimi, mutta funktioilla $g(x, y) = x^2 - y^2$ ja $h(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ ei ole lainkaan lokaalista ääriarvoa origossa, vaikka se onkin niiden kriittinen piste.



Kuva 4.1: Funktion $g(x, y) = x^2 - y^2$ kuvaaja kriittisen pisteen (musta) lähistöllä. Funktion saa kriittistä arvoa suurempia ja pienempiä arvoja riippuen siitä mihin suuntaan liikutaan, joten kyseessä on satulapiste

Ratkaisu. Jos $(x, y) \neq (0, 0)$, niin $f(x, y) > 0$ joten origo on sen lokaali minimi.

Funktiolla g ei ole origossa lokaalia ääriarvoa sillä kaikilla $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$, on voimassa $g(t, 0) = t^2 > 0 = g(0, 0)$ ja $g(0, t) = -t^2 < g(0, 0)$. Ongelma on ilmaistavista siten, että x -akselin suunnassa funktiolla g on origossa lokaali minimi, mutta y -akselin suunnassa sillä onkin origossa lokaali maksimi. Funktiolle g origo onkin ns. *satulapiste*, ks. Kuva 4.1.

Origo on satulapiste myös funktiolle h , mutta sen havaitseminen on hieman työläämpää. Nyt nimittäin $h(t, 0) = h(0, t) = t^2 > 0 = h(0, 0)$, eli kummankin koordinaattiakselin suunnassa h :lla on origossa lokaali minimi. Mutta $h(t, -t) = t^2 - 4t^2 + t^2 = -2t^2 < 0$, eli suoran $y = -x$ suunnassa h :lla onkin origossa lokaali maksimi.

Yhden muuttujan funktion $f(x)$ tapauksessa derivaatan nollakohdan $x = a$, $f'(a) = 0$, mahdollinen ääriarvoluonne usein selviää tutkimalla toista derivaattaa — jos $f''(a) > 0$ on kyseessä lokaali minimi, jos $f''(a) < 0$ on kyseessä taas lokaali maksimi, jos taas $f''(a) = 0$, niin ääriarvoluonne ei selvinnyt. Esittelemme menetelmän, joka on nähtävä usean muuttujan funktion vastineeksi tälle tulokselle. Sen sitova perusteleminen tehdään luonnollisimmin käyttäen Taylorin sarjoja. Näin ollen se sivuutetaan tässä vaiheessa.

Esimerkissä 4.4 näimme, että kriittisen pisteen lähistöllä funktion käyttäytyminen (ääriarvomielessä) riippuu siitä mihin suuntaan kriittisestä pisteestä liikutaan. Tämä motivoi seuraavan määritelmän.

Määritelmä 4.5. Oletetaan, että funktio f on määritelty pisteen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ avoimessa ympäristössä A . Olkoon $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ jokin yksikkövektori. Muodostetaan apufunktio

$$g_{\mathbf{u}}(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}).$$

Koska $\mathbf{a} + t\mathbf{u} \in A$ kun t on jossakin luvun 0 ympäristössä, niin voimme tutkia funktion $g_{\mathbf{u}}$ derivaattoja kohdassa $t = 0$. Funktion f toinen derivaatta pisteessä $\mathbf{a}$ vektorin $\mathbf{u}$ suuntaan on

$$D_{\mathbf{u}}^2 f(\mathbf{a}) = g''(0),$$

mikäli toinen derivaatta $g''(0)$ on olemassa.

Kun oletetaan, että funktio f on vähintään luokkaa C^2 , niin suunnatulle toiselle derivaatalle saadaan funktion f toisen kertaluvun osittaisderivaattojen avulla seuraava lauseke.

Lemma 4.6. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin, $\mathbf{a} \in A$, ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ luokkaa C^2 . Jos $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ on jokin yksikkövektori, niin funktion f vektorin $\mathbf{u}$ suuntainen toinen derivaatta pisteessä $\mathbf{a}$ on

$$D_{\mathbf{u}}^2 f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) u_i u_j.$$

Todistus. Olkoon $g_{\mathbf{u}}(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$ tarvittava apufunktio. Väite saadaan soveltavammalla ketjusääntöä kahdesti. Sisäfunktiona esiintyy yksinkertainen vektoriarvoinen funktio $h(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{u}$, jolle $\partial_i h(t) = u_i$ kaikille $i = 1, 2, \dots, n$. Näin ollen

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) \cdot u_i.$$

Derivoimalla jokainen termi uudelleen saadaan

$$g''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) u_i u_j.$$

Väite seuraa sijoittamalla tähän $t = 0$. □

Huomaamme, että Lemman 4.6 lauseke on suuntavektorin $\mathbf{u}$ komponenttien polynomi, jossa kaikki termit ovat astetta kaksi. Algebrassa tällaista polynomia kutsutaan *neliömuodoksi*. Reaalikertoimisten neliömuotojen teoriaan tutustuttiin (ehkä?) kurssilla *Lineaarialgebra*. Kertaamme sitä alla tarvittavin osin.

Määritelmä 4.7. Liitetään tässä C^2 -funktioon $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ja pisteeseen $\mathbf{a} \in A$ eräs $n \times n$ -matriisi $H(f, \mathbf{a})$, funktion f Hessen matriisi pisteessä $\mathbf{a}$

$$H(f, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti liitämme tähän tilanteeseen funktion f Hessen muodon pisteessä $\mathbf{a}$. Se on vektorin $\mathbf{u}$ neliömuoto

$$Q(\mathbf{u}) = D_{\mathbf{u}}^2 f(\mathbf{a}).$$

Koska oletustemme nojalla $\partial_{ij} f(\mathbf{a}) = \partial_{ji} f(\mathbf{a})$, niin näemme, että Hessen matriisi on *symmetrinen* eli oma transpoosinsa.

Lemman 4.6 tulos voidaan kirjoittaa kompaktisti matriisitulona

$$D_{\mathbf{u}}^2 f(\mathbf{a}) = Q(\mathbf{u}) = \mathbf{u} H(f, \mathbf{a}) \mathbf{u}^T.$$

Kaikki vektorin $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ neliömuodot voidaan kirjoittaa muodossa

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Koska $x_i x_j = x_j x_i$, niin voimme rajoituksetta olettaa, että $a_{ij} = a_{ji}$, jolloin Q voidaan kirjoittaa myös muodossa $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} 2a_{ij} x_i x_j$. Joka tapauksessa neliömuoto voidaan kirjoittaa matriisikertolaskun avulla

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

missä on tärkeää, että $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ on symmetrinen reaalinen $n \times n$ matriisi (eli $A = A^T$).

Lineaarialgebran tulosten perusteella

- Symmetrisellä reaalisella $n \times n$ -matriisilla A on (multiplisiteetit huomioiden) n kappaletta reaalisia ominaisarvoja, ja niihin liittyen avaruudella $\mathbb{R}^n$ lineaarisesti riippumattomien ominaisvektorien muodostama kanta.
- Kyseiset ominaisvektorit voidaan valita siten, että ne muodostavat ortonormaalin joukon.
- Näin ollen on olemassa sellainen matriisi P , jolle $P^{-1} = P^T$, ja jolle

$$P^T A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

on diagonaalinen.

Tehdään avaruudelle $\mathbb{R}^n$ kannanvaihto, jonka matriisi on P . Siirrytään siis (pilkulliseen) koordinaatistoon, jolle $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)P^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Tämän koordinaatiston suhteen

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (x'_1 \ x'_2 \ \cdots \ x'_n)P^TAP \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \\ &= (x'_1 \ x'_2 \ \cdots \ x'_n)D \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 + \cdots + \lambda_n x'^2_n. \end{aligned}$$

Määritelmä 4.8. Neliömuoto $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on *positiividefiniitti*, jos $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ aina, kun $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Jos taas $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ aina, kun $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, niin sanotaan, että Q on *negatiividefiniitti*. Jos Q saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, sanotaan että Q on *indefiniitti*. Symmetrinen matriisi A on positiividefiniitti, negatiividefiniitti tai indefiniitti, jos sitä vastaavalla neliömuodolla $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T$ on kyseinen ominaisuus.

Huomautus 4.9. Termejä *positiivisemidefiniitti* ja *negatiivisemidefiniitti* käytetään tilanteissa, joissa sallitaan neliömuodon saavan arvo nolla myös origon ulkopuolella (mutta ei tietenkään molempien etumerkkien esiintymistä).

Huomautus 4.10. Jos $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T$ on mikä tahansa neliömuoto, niin origon on sen kriittinen piste. Osittaisderivoimalla näemme, että funktion Q Hessen matriisi origossa on $2A$. Kerroin 2 muodostaa samasta syystä kuin yhden muuttujan funktion $Q(x) = ax^2$ tapauksessa, jolloin triviaalisti $Q''(0) = 2a$.

Lemma 4.11. Neliömuoto Q on positiividefiniitti, jos ja vain jos siihen liittyvän symmetrisen matriisin A kaikki ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ovat positiivisia. Vastaavasti Q on negatiividefiniitti, jos ja vain jos $\lambda_i < 0$ kaikille $i = 1, 2, \dots, n$. Jos kummankinmerkkisiä ominaisarvoja esiintyy, niin Q on indefiniitti.

Todistus. Ilmeinen. □

Lemman 4.11 tulos on selkeä, mutta laskujen kannalta aika ikävä, koska vähänkään isomman matriisin ominaisarvojen ratkaiseminen on työlästä, eikä aina edes mahdollista. Tarvitaan seuraava helppokäyttöisempi kriteeri.

Lause 4.12. (Sylvesterin kriteeri) Olkoon A symmetrinen reaalinen $n \times n$ matriisi, ja Q sitä vastaava neliömuoto. Olkoon kullakin $i = 1, 2, \dots, n$, luku Δ_i matriisin vasemman $i \times i$ ylänurkan determinantti. Tällöin

Q on positiividefiniitti silloin ja vain silloin kun kaikki luvut $\Delta_i, i = 1, 2, \dots, n$, ovat positiivisia. Edelleen Q on negatiividefiniitti silloin ja vain silloin kun kaikki luvut $(-1)^i \Delta_i, i = 1, 2, \dots, n$, ovat positiivisia.

Todistus. Sivuutetaan. Huomaa kuitenkin, että Q on negatiividefiniitti tarkalleen silloin kun $-Q$ on positiividefiniitti. Koska neliömuotoa $-Q$ vastaa matriisi $-A$, ja $\Delta_i(-A) = (-1)^i \Delta_i(A)$, niin negatiividefiniittisyyttä koskeva tulos seuraa positiividefiniittisyyttä koskevasta tuloksesta. $\square$

Huomautus 4.13. Sylvesterin kriteerin alideterminanttien etumerkkien jono siis ratkaisee pääkysymyksemme seuraavasti:

- Muoto on positiividefiniitti, jos ja vain jos jono on $+, +, +, \dots$
- Muoto on negatiividefiniitti, jos ja vain jos jono on $-, +, -, +, -, +, \dots$
- Muissa tapauksissa muoto on joko indefiniitti tai semidefiniitti.

Esimerkki 4.14. Tutkitaan Esimerkin 4.4 neliömuotoja kehitetyn teorian valossa.

Ratkaisu. Muotoa $f(x, y) = x^2 + y^2$ vastaava matriisi on

$$A(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Sille $\lambda = 1$ on kaksinkertainen ominaisarvo. Koska $1 > 0$, niin kyseinen muoto on positiividefiniitti. Sylvesterin kriteerissä esiintyvät alideterminantit $\Delta_1 = 1 > 0$ ja $\Delta_2 = 1 > 0$, joten myös Sylvesterin kriteerin nojalla f on positiividefiniitti.

Muoto $g(x, y) = x^2 - y^2$ on sekin valmiiksi diagonalisoitu, ja sitä vastaa matriisi

$$A(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sen ominaisarvot ovat erimerkkisiä, joten kyseinen muoto on indefiniitti. Samaan päädytään Sylvesterin kriteerin avulla, sillä $\Delta_1 = 1 > 0$ ja $\Delta_2 = -1 < 0$.

Muotoa $h(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ vastaa symmetrinen matriisi

$$A(h) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sen ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_1 = 3$ ja $\lambda_2 = -1$. Nämä ovat erimerkkisiä, joten muoto on indefiniitti. Sylvesterin kriteerin alideterminantit ovat $\Delta_1 = 1$ ja $\Delta_2 = -3$, mikä johtaa samaan loppupäätelmään.

Esimerkki 4.15. Tutkitaan neliömuodon

$$Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$$

definiittisyyttä Sylvesterin kriteerin avulla ja ilman sitä.

Ratkaisu. Neliömuotoa Q vastaava symmetrinen matriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tällä matriisille saadaan

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$\Delta_3 = \det A = -1$$

Koska Δ_2 ei ole positiivinen, niin muoto Q ei Sylvesterin kriteerin nojalla ole positiividefiniitti. Koska $(-1)^1 \Delta_1$ ei ole positiivinen, niin Q ei ole myöskään negatiividefiniitti. Näin ollen Q on indefiniitti, ja origo on sille satulapiste.

Sama nähdään myös ominaisarvopolynomien avulla. Laskemalla saadaan ominaisarvopolynomiksi

$$m(x) = \det(xI - A) = x^3 - 6x^2 + 2x + 1.$$

Tässä $m(-1) = -8 < 0$, $m(0) = 1 > 0$, $m(1) = -2 < 0$ ja $m(6) = 13 > 0$, joten Bolzanon lauseen nojalla ominaisarvot $\lambda_1 < (-1, 0)$, $\lambda_2 \in (0, 1)$ ja $\lambda_3 \in (1, 6)$. Näemme, että matriisilla A on kummankin merkkisiä ominaisarvoja. Näin ollen muoto Q on indefiniitti.

Lause 4.16. Oletetaan, että n :n muuttujan funktion f kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia joukossa A , ja että $\mathbf{a} \in A^\circ$ on funktion f kriittinen piste. Tällöin

- Jos Hessen matriisi $H(f, \mathbf{a})$ on positiividefiniitti, niin $\mathbf{a}$ on lokaali minimikohta.
- Jos Hessen matriisi $H(f, \mathbf{a})$ on negatiividefiniitti, niin $\mathbf{a}$ on lokaali maksimikohta.
- Jos Hessen matriisi $H(f, \mathbf{a})$ on indefiniitti, niin $\mathbf{a}$ on satulapiste (eikä siis lainkaan lokaali ääriarvokohta).

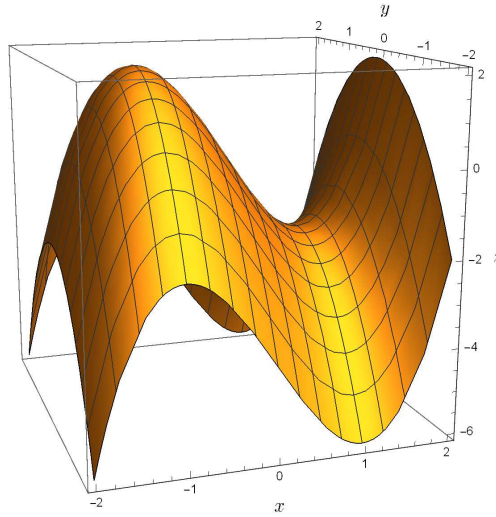
Sitä vastoin, jos Hessen matriisi on semidefiniitti, niin emme voi sanoa mitään pisteen $\mathbf{a}$ lokaalista ääriarvoluonteesta.

Todistus. Yksityiskohdat sivuutetaan. Huomaa kuitenkin, että esimerkiksi Hessen muodon positiividefiniittisyys takaa yhden muuttujan funktioiden teorian nojalla, että funktiolla $g_{\mathbf{u}}(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$ on kohdassa $t = 0$ lokaali minimi olipa $\mathbf{u}$ mikä yksikkövektori tahansa. Väite itse asiassa seuraa tästä, mutta apuna tarvitaan yksikkövektorien joukon kompaktiutta ja Seurausta 1.27. Yksityiskohdat mahdollisesti ohjattuna harjoitustehtävänä teoreettisia haasteita kaipaavalle lukijalle. $\square$

Esimerkki 4.17. Määrittää funktion

$$f(x, y) = x^3 - 3x - y^2$$

kriittiset pisteet ja selvittää niiden ääriarvoluonne.



Kuva 4.2: Funktion $f(x, y) = x^3 - 3x - y^2$ kuvaaja

Ratkaisu. Osittaisderivoimalla saadaan gradientiksi

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3, -2y).$$

Tämä on nollavektori vain, jos samanaikaisesti $-2y = 0$ ja $3x^2 - 3 = 0$. Ensin mainittu yhtälö on voimassa, kun $y = 0$ ja jälkimmäinen, kun $x = \pm 1$. Näin ollen kriittisiä pisteitä on kaksi: $\mathbf{a}_1 = (1, 0)$ ja $\mathbf{a}_2 = (-1, 0)$. Laskemalla osittaisderivaatat saadaan Hessen matriisiksi

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Näin ollen $\Delta_1(x, y) = 6x$ ja $\Delta_2(x, y) = \det H(x, y) = -12x$. Pisteessä $\mathbf{a}_1$ on siis $\Delta_1 = 6 > 0$ ja $\Delta_2 = -12 < 0$. Näin ollen Hessen muoto $H(f, \mathbf{a}_1)$ ei ole positiividefiniitti eikä negatiividefiniitti. Vastaavan matriisin ominaisarvot ovat 6 ja -2 , joten muoto on indefiniitti ja $\mathbf{a}_1$ on siis satulapiste.

Sitä vastoin pisteessä $\mathbf{a}_2$ saadaan $\Delta_1 = -6$ ja $\Delta_2 = 12$. Muoto $H(f, \mathbf{a}_2)$ on Sylvesterin kriteerin nojalla negatiividefiniitti, ja piste $\mathbf{a}_2$ on näin ollen funktion f lokaali maksimikohta. Kuva 4.2 sopii hyvin yhteen näiden tulosten kanssa.

Huomautus 4.18. Kahden muuttujan tapauksessa voidaan kehittää seuraavat muistisäännöt. Ne perustuvat Sylvesterin lauseeseen sekä siihen, että matriisin determinantti on sen ominaisarvojen tulo. Jos symmetrisen 2×2 matriisin determinantti on negatiivinen, ovat sen ominaisarvot välttämättä eri merkkisiä. Olkoon siis A Hessen matriisi funktion $f(x, y)$ kriittisessä pisteessä $\mathbf{a}$.

- Jos $\det A < 0$ niin Hessen muoto on indefiniitti ja kyseessä on satulapiste.
- Jos $\det A > 0$ niin kyseessä on lokaali ääriarvokohta. Tällöin matriisin A diagonaalialkiot ovat samanmerkkisiä. Jos ne ovat negatiivisia kyseessä on lokaali maksimi, jos taas positiivisia on kyseessä lokaali minimi.

- Jos $\det A = 0$ niin pistee $\mathbf{a}$ ääriarvoluonnetta ei voida selvittää Hessen muotoa tutkimalla.

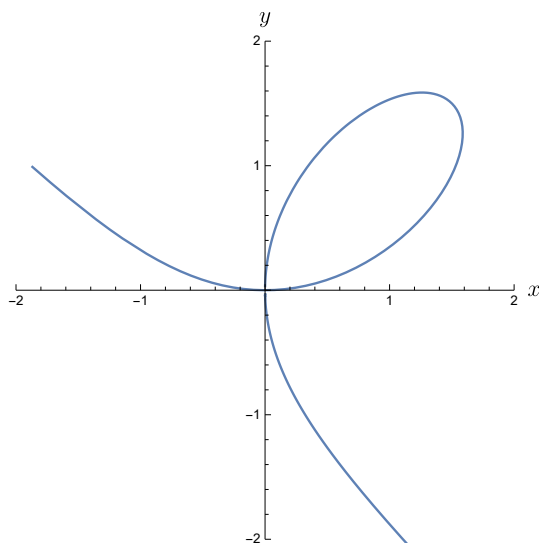
4.2 Implisiittifunktiolauseesta

Differentiaalilaskennassa keskeinen teema on pienten muutosten suhteet — etenkin niissä tilanteissa, kun tarkastelun kohteina olevien muuttujien (tai suureiden) pieniä muutoksia sitoo toisiinsa lineaarinen yhtälö. Toisessa luvussa esitelty koneisto antaa menetelmän tuottaa nämä pieniä muutoksia toisiinsa sitovat lineaariset yhtälöt siinä tapauksessa, kun osa muuttujista (yksi tai useampi) on muiden (yhden tai useamman) differentioituva funktio. Usein vastaan tulee kuitenkin tilanteita, jolloin vaadittua funktiota ei ole suoraan (eli *eksplisiittisesti*) annettu, vaan muuttujia sitoo toisiinsa jokin yhtälö. Toivomme kuitenkin, että nämä yhtälöt määräisivät yhden tai useamman muuttujan (yhtälöiden lukumäärästä riippuen) muiden funktiona *implisiittisesti* — ainakin jos rajoitamme tarkastelun koko avaruuden asemesta pieneen alueeseen yhtälöryhmän yhden tunnetun ratkaisun ympäristössä.

4.2.1 Implisiittifunktiolause tasossa

Kerrataan aluksi, mitä implisiittisistä funktioista ja implisiittisestä derivoinnista sanottiin (ehkä?) kurssilla *Analyysi I*. Samalla yritän valottaa sitä, miten rajoittuminen sopivaan pieneen alueeseen tässä yhteydessä helpottaa tilannetta.

Tasossa on 2 koordinaattia, x ja y . Koska haluamme ajatella näistä joidenkin olevan muiden funktio, ainoa mahdollisuus on kahden muuttujan tapauksessa toivoa toisen koordinaatin olevan toisen funktio. Implisiittisesti määräytyviä koordinaatteja on siis yksi, joten meille riittää yksi yhtälö, jonka voimme kirjoittaa muodossa $G(x, y) = 0$. Oletamme funktion G olevan riittävän säännöllinen. Yleensä vähintään luokkaa C^1 . Lisäksi aina oletamme, että yhtälöllä $G(x, y) = 0$ on jokin ratkaisu, eli piste $P = (x_0, y_0)$, jossa $G(x_0, y_0) = 0$.



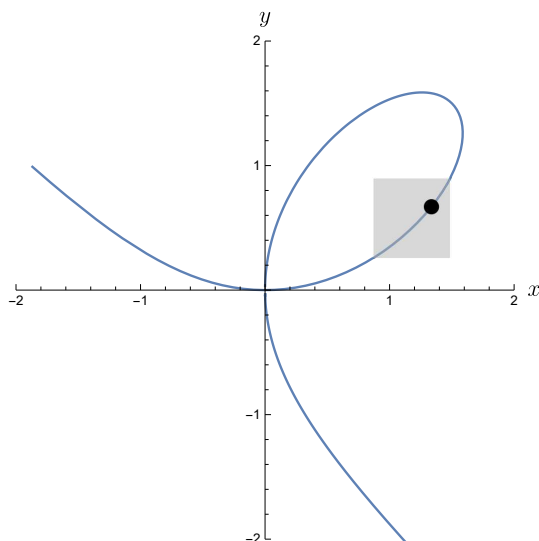
Kuva 4.3: Kartesiuksen lehti

Kuvassa 4.3 on niin sanottu *Kartesiuksen lehti*, joka muodostuu yhtälön

$$x^3 + y^3 = 3xy \quad (*)$$

toteuttavista pisteistä (x, y) . Selvästi voimme vaihtoehtoisesti kuvailla tämän käyrän funktion $G(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ nollakohtien joukkona. Ei ole lainkaan ilmeistä, että ko. yhtälön ratkaisujoukko näyttää juuri tältä, mutta emme nyt välitä siitä. Käytämme kuvaa ensin esiintyvien ilmiöiden kuvailuun.

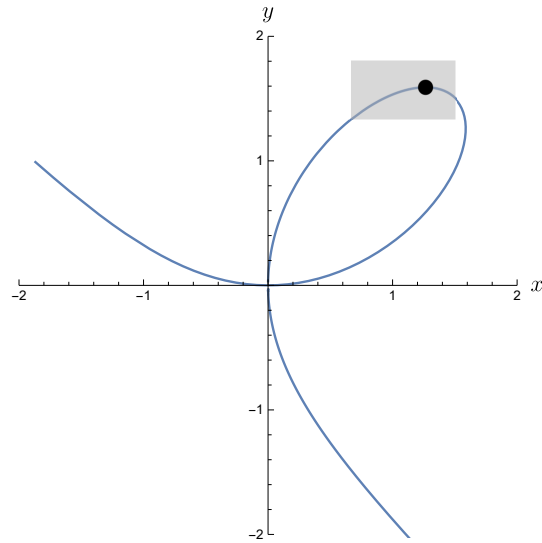
Ensimmäinen havaintomme on, ettei yhtälö $(*)$ salli meidän suoraan ratkaista muuttujaa y muuttujan x funktiona. Periaatteessa kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaava sallisi meidän tehdä tämän, mutta syntyvät lausekkeet ovat epämukavia käyttää, ja lisäksi ratkaisuja on joillakin x :n arvoilla enemmän kuin yksi, mikä ei funktiolle ole sallittua! Kuvasta 4.3 näemme heti, että kutakin $x \in (0, 1)$ kohti yhtälöllä $(*)$ on kolme reaalista ratkaisua y .



Kuva 4.4: Kartesiuksen lehden piste ja sen ympäristö, jossa kumpi tahansa koordinaatti on toisen funktion.

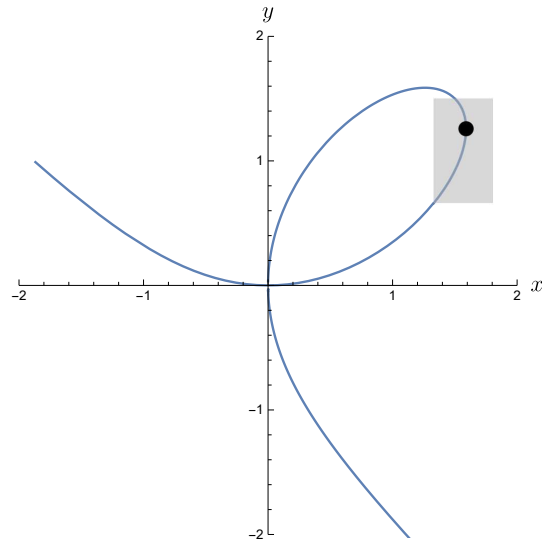
Edellisessä kappaleessa kuvattu ongelma voidaan yleensä ratkaista rajoittamalla piste (x, y) sopivaan laatikkoon, jonka sisäpiste $P = (x_0, y_0)$ on. Helposti näemme, että $P = (4/3, 2/3)$ on Kartesiuksen lehden. Kuvassa 4.4 näemme erään pisteen P ympärillä olevan laatikon, jolla on se haluttu ominaisuus, että sen sisällä kutakin x -koordinaatin arvoa kohti on olemassa yksikäsitteinen sellainen y :n arvo, jolla yhtälö $G(x, y) = 0$ toteutuu. Edelleen, saman laatikon sisällä kutakin y -koordinaatin arvoa kohti on olemassa yksikäsitteinen sellainen x :n arvo, jolla yhtälö $G(x, y) = 0$ toteutuu. Kyseisen laatikon sisällä yhtälö $(*)$ siis määrää kumman tahansa koordinaatin toisen funktiona.

Erilaisia poikkeustilanteita tästä yleissäännöstä kuitenkin tulee vastaan. Piste $Q = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ on sekin Kartesiuksen lehden. Kuvasta 4.5 katsoen näemme helposti, että sen ympärille voidaan piirtää laatikko, jonka sisällä kutakin x -koordinaatin arvoa kohti löytyy yksikäsitteinen sellainen y , jolla $G(x, y) = 0$. Huomaamme kuitenkin, ettei laatikkoa voida valita siten, että x -koordinaatti olisi y :n funktio. Osoittautuu, että



Kuva 4.5: Kartesiuksen lehden piste ja sen ympäristö, jossa y -koordinaatti on x -koordinaatin funktio.

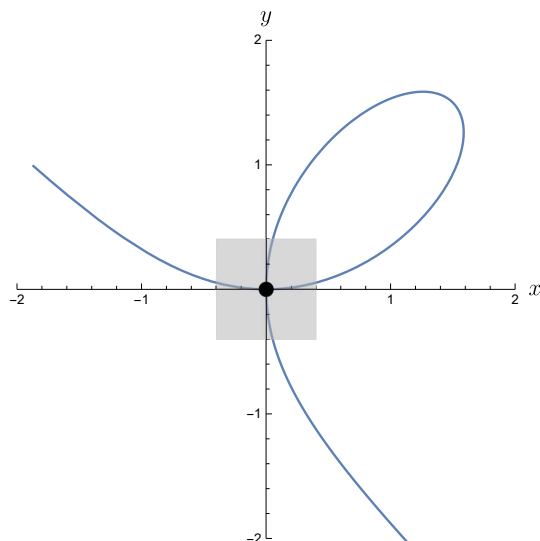
$y = \sqrt[3]{4}$ on suurin mahdollinen y :n arvo pisteen Q lähistöllä, ja sitä hivenen pienempiä y :n arvoja aina vastaa kaksi ratkaisua x :lle.



Kuva 4.6: Kartesiuksen lehden piste ja sen ympäristö, jossa x -koordinaatti on y -koordinaatin funktio.

Pisteen $R = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ lähistöllä puolestaan esiintyy päinvastainen tilanne. Kuvasta 4.6 näemme, että sen ympäriltä löytyy laatikko, jossa käyrän pisteen x -koordinaatin voidaan ajatella olevan y -koordinaatin funktio. Tällä kertaa x -koordinaatti on pisteessä R suurimmillaan (laatikon sisällä), ja sitä hivenen pienempiä x :n arvoja vastaa aina kaksi y :n arvoa käyrällä.

Origon $O = (0, 0)$ on sekin Kartesiuksen lehden piste. Sen lähistöllä tilanne on poikkeuksellisen huono.



Kuva 4.7: Origo on Kartesiuksen lehden singulaarinen piste.

Piirrämme pä origon ympärille miten pienen laatikon tahansa, niin sen sisällä ei kumpaakaan koordinaateista voida ajatella toisen funktiona — aina kutakin x :n arvoa kohti löytyy kaksi y :n arvoa ja kääntäen. Vertaa Kuvaan 4.7 Sanomme, että origo on Kartesiuksen lehden *singulaarinen piste*.

Implisiittifunktiolause on vahva tulos, joka sallii meidän tehdä diagnoosin näistä poikkeustilanteista pelkästään funktiota $G(x, y)$ ja sen osittaisderivaattoja tutkimalla.

Lause 4.19. (*Implisiittifunktiolause tasossa*) Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^2$ avoin joukko, $G : A \rightarrow \mathbb{R}$ jokin osittaisderivaattoineen jatkuva funktio, ja $(x_0, y_0) \in A$ piste, jolle $G(x_0, y_0) = 0$.

- Jos $\partial_y(G(x_0, y_0)) \neq 0$, niin on olemassa olemassa sellaiset luvut $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ ja sellainen välillä $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ jatkuvasti derivoituva funktio f , että laatikon $L = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ piste $(x, y) \in L$ on yhtälön $G(x, y) = 0$ ratkaisu jos ja vain jos $y = f(x)$. Erityisesti $f(x_0) = y_0$. Lisäksi tällöin

$$f'(x_0) = -\frac{G_x(x_0, y_0)}{G_y(x_0, y_0)}.$$

- Jos $\partial_x(G(x_0, y_0)) \neq 0$, niin on olemassa olemassa sellaiset luvut $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ ja sellainen välillä $y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ jatkuvasti derivoituva funktio f , että laatikon $L = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ piste $(x, y) \in L$ on yhtälön $G(x, y) = 0$ ratkaisu jos ja vain jos $x = f(y)$. Erityisesti $f(y_0) = x_0$. Lisäksi tällöin

$$f'(y_0) = -\frac{G_y(x_0, y_0)}{G_x(x_0, y_0)}.$$

Todistus. Sivutetaan. Wikipediassa

https://en.wikipedia.org/wiki/Implicit_function_theorem#Proof_for_2D_case

esitetään päättely, jossa tulos palautuu differentiaaliyhtälöiden teoriaan.

Huomataan kuitenkin, että mikäli tapauksessa (i) vaadittu derivoituva funktio f on olemassa, niin derivaatan $f'(x_0)$ lauseke saadaan ketjusäännön avulla seuraavasti. Oletuksemme nojalla

$$G(x, f(x)) = 0 \quad (*)$$

kaikille $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Derivoimalla (*) puolittain saadaan tulokseksi, että yhtälö

$$\partial G_x(x, f(x)) + \partial G_y(x, f(x))f'(x) = 0$$

on voimassa kaikille $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Koska $G_y(x_0, f(x_0)) = G_y(x_0, y_0) \neq 0$, derivaatta $f'(x_0)$ ratkeaa tästä lineaarisesta yhtälöstä. $\square$

Saamassamme implisiittisen funktion derivaatan kaavassa kiinnittää huomiota, että muuttuja y_0 esiintyy vielä lopullisessa derivaatan lausekkeessa. Tämä on tyypillistä implisiittisessä derivoinnissa, eikä aiheuta lainkaan ongelmia, kun tutkimme derivaattaa *tunnetussa ratkaisupisteessä* (x_0, y_0) , koska tällöin y_0 on tunnettu!

Esimerkki 4.20. Lasketaan, mitä impliittinen derivointi antaa Kartesiuksen lehden (Kuva 4.3) esiintyneisiin pisteisiin piirrettyjen tangenttien kulmakertoimiksi. Osoitetaan lisäksi, että origo on sen ainoa singularinen piste.

Ratkaisu. Kartesiuksen lehti muodostuu funktion

$$G(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

nollakohdista. Osittaisderivoimalla saadaan gradientiksi

$$\nabla G(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x).$$

Jos siis $X = (x_0, y_0)$ on Kartesiuksen lehden piste, niin siihen piirretyn tangentin kulmakertoimeksi saadaan

$$\frac{dy}{dx}(X) = -\frac{3x_0^2 - 3y_0}{3y_0^2 - 3x_0} = \frac{x_0^2 - y_0}{x_0 - y_0^2}.$$

Pisteessä $P = (4/3, 2/3)$ saadaan derivaataksi

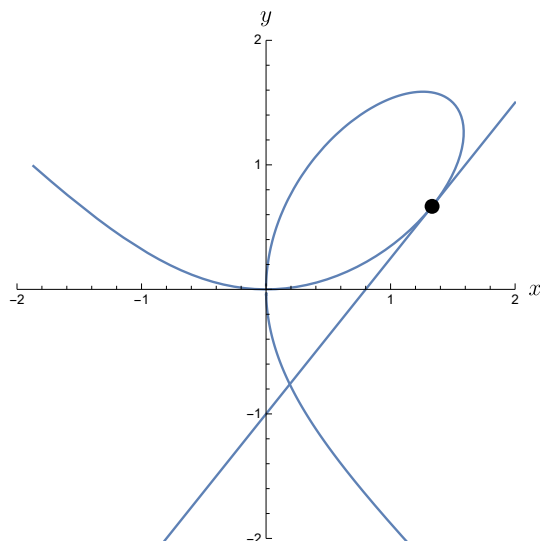
$$\frac{dy}{dx}(P) = \frac{(4/3)^2 - 2/3}{4/3 - (2/3)^2} = \frac{5}{4}.$$

Tangentin yhtälöksi saadaan näin

$$y - \frac{2}{3} = \frac{5}{4}\left(x - \frac{4}{3}\right).$$

Kuvan 4.8 perusteella saatu suoraa ainakin näyttää tangeeraavan Kartesiuksen lehteä pisteessä P .

Pisteessä $Q = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ sitä vastoin osoittaja $x_0^2 - y_0$ häviää. Tangentin kulmakertoimeksi tulee siis nolla, mikä sopii hyvin yhteen Kuvan 4.5 kanssa — tangentti on vaakasuora.



Kuva 4.8: Origo on Kartesiuksen lehti ja sen pisteeseen $P = (4/3, 2/3)$ piirretty tangentti.

Pisteessä $R = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ puolestaan nimittäjä $x_0 - y_0^2$ häviää. Tämä on huono juttu, koska tällöin yritämme jakaa nollalla. Mutta jos ajattelemmekin ratkaisevamme x :n y :n funktiona, niin tarvitsemme derivaatan $dx/dy(R) = (x_0 - y_0^2)/(x_0^2 - y_0)$, minkä arvo on nolla. Kuten Kuvasta 4.6 näkyy, tässä pisteessä Kartesiuksen lehdellä on pystysuora tangentti.

Mutta origossa $O = (0, 0)$ kumpikin osittaisderivaatta häviää — $G_x(O) = 0 = G_y(O)$. Tangentin kulmakertoimeksi tulee epämääräinen $0/0$, ja olemme singulaarisessa pisteessä.

Gradientti häviää siis sellaisissa pisteissä, joissa yhtälöt $x^2 = y$ ja $x = y^2$ toteutuvat samanaikaisesti. Sijoittamalla ensin mainittu jäljempään saadaan muuttujan x yhtälö

$$0 = x^4 - x = x(x^3 - 1).$$

Tämän yhtälön ratkaisut ovat $x = 0$ ja $x = 1$. Jos $x = 0$, niin $y = x^2 = 0$. Koska $G(0, 0) = 0$, niin origo todella on käyrällä, ja siis sen singulaarinen piste. Jos taas $x = 1$, niin $y = x^2 = 1$. Koska $G(1, 1) = -1 \neq 0$, niin piste $(1, 1)$ ei kuitenkaan ole käyrän piste. Näin ollen origo on Kartesiuksen lehden ainoa singulariteetti.

4.2.2 Implisiittifunktiolause korkeampiulotteisessa avaruudessa

Muuttujien määrän kasvattaminen tuo lisää vaihtoehtoja, mutta perustilanne on sama. Yritämme yhtälön

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

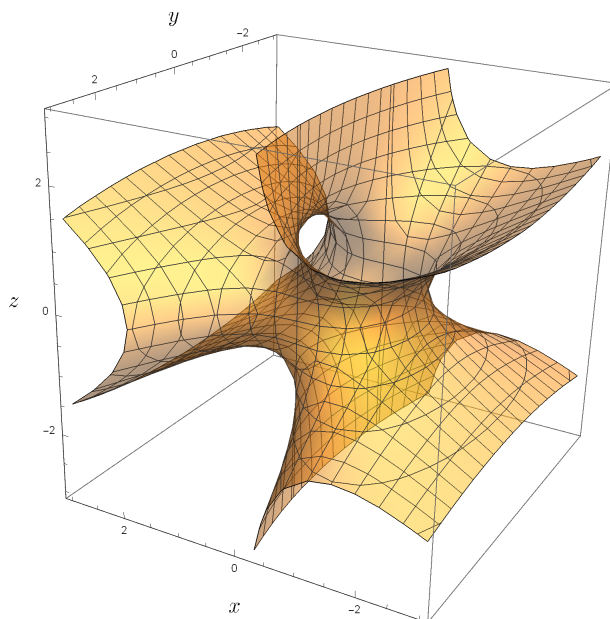
annetun ratkaisupisteen P ympäristössä esittää yhden tai useamman muuttujan muiden differentioituvana funktiona. Kuten tasossakin, funktion G osittaisderivaattojen avulla voidaan analysoida, onko tilanne

jossakin mielessä poikkeuksellinen. Esimerkeissä keskitymme tapaukseen $n = 3$, koska silloin voimme vielä havainnollistaa syntyviä tilanteita kuvin.

Merkittävä ero edellisen pykälän tilanteeseen tulee siitä, että yleisemmin funktio G voi olla vektoriaarvoinen, eli meillä voi olla useita yhtälöitä (yksi kutakin G :n komponenttia kohti). Normaalityapauksessa yritämme ratkaista niin monta muuttujaa kuin meillä on yhtälöitä. Aloitamme kuitenkin yhden yhtälön tapauksen tarkastelulla.

Yhden yhtälön tapaus

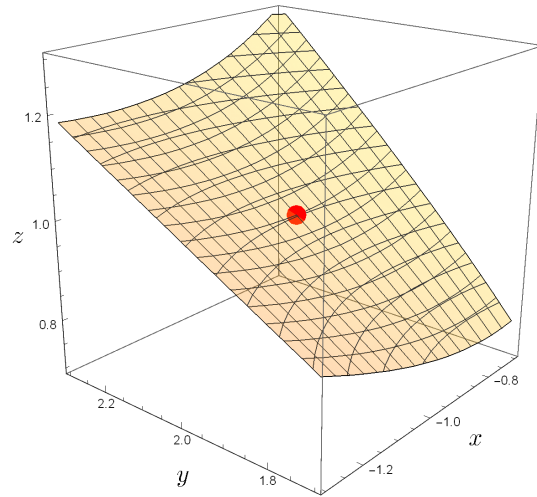
Jotta voisimme ajatella ratkaisujoukossa yhtä koordinaattia muiden funktiona, meidän on (olemassaolon takaamiseksi ja monikäsitteisyyden sulkemiseksi pois) rajoituttava sopivaan annettun ratkaisupisteen ympäristöön. Samoin menettelimme jo tason tapauksessa.



Kuva 4.9: Yhtälön $y^2 = x^3 - 3xz^2 + 2$ toteuttavat pisteet (x, y, z) avaruuden $\mathbb{R}^3$ origon lähistöllä

Kuvassa 4.9 on esimerkki tällaisesta tilanteesta. Näemme, että yhtälön $y^2 = x^3 - 3xz^2 + 2$ ratkaisut näyttävät muodostava sileän pinnan avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Voimme toki toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla ratkaista tästä yhtälöstä muuttujan z tai y muiden kahden eksplisiittisenä funktiona, mutta lausekkeesta tulee hiukan ikävä. Vielä ikävämpiä lausekkeitä saadaan, jos ratkaisemme muuttujan x kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla. Koska pinta kuitenkin näyttää sileältä (=käsite, jonka määrittelemme myöhemmin tarkasti), niin sen jokaisessa pisteessä näyttäisi olevan jonkinlainen tangenttitaso.

Kuva 4.10 havainnollistaa tilannetta. Siinä meillä on merkattu yksittäinen ratkaisupiste $(x, y, z) = (-1, 2, 1)$ punaisella täplällä, sekä otettu yhtälön $y^2 = x^3 - 3xz^2 + 2$ ratkaisuihin mukaan vain ne, jotka

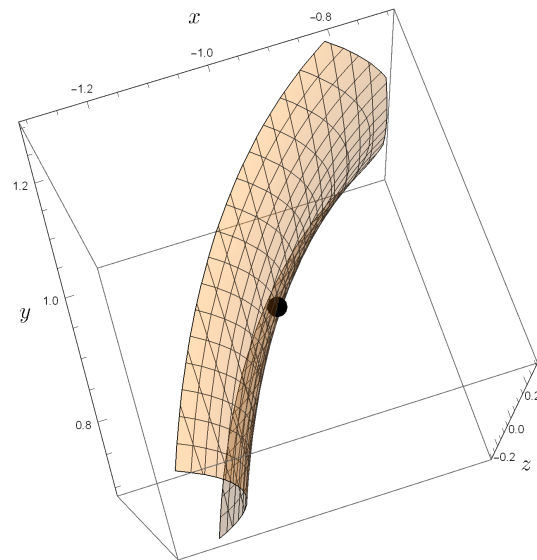


Kuva 4.10: Yhtälön $y^2 = x^3 - 3xz^2 + 2$ toteuttavat pisteet (x, y, z) pienessä laatikossa

ovat laatikossa S , jonka pisteiden koordinaatit toteuttavat epäyhtälöt

$$-1,3 < x < -0,7, \quad 1,7 < y < 2,3, \quad 0,7 < z < 1,3.$$

Kuvan perusteella näyttää ilmeiseltä, että kunhan teemme rajaukset $(x, y, z) \in S$, niin tällöin kutakin kyseeseen tulevaa paria (x, y) kohti meille todellakin on yksi ja vain yksi z , jolle $(x, y, z) \in S$ ja tietenkin myös $y^2 = x^3 - 3xz^2 + 2$.



Kuva 4.11: Yhtälön $y^2 = x^3 - 3xz^2 + 2$ ratkaisujoukko pisteen $(-1, 1, 0)$ lähistöllä on pystysuorassa asennossa

Voi myös käydä niin, että tutkittavan yhtälön ratkaisujoukko on jonkin pisteen lähistöllä sellaisessa asen-

nossa, ettei halutun muuttujan esittäminen muiden funktiona onnistu, vaikka pinta itse onkin sileä. Kuvassa 4.11 on yhtälömme ratkaisujoukosta osasuurennus pisteen $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$ (musta täplä) lähistöllä. Pinta näyttää kyseisen pisteen lähistöllä ihan sileältä. Kun katsomme ylhäältä alas paljastuu ongelma. Rajaamme tarkastelun miten pieneen pisteen $(x, y) = (-1, 1)$ ympäristöön tahansa, niin kyseisessä ympäristössä on sekä sellaisia pisteitä, joita kohti ei löydy yhtään z :n arvoa sekä sellaisia pisteitä, joita kohti niitä löytyy kaksi. Tällaisen pisteen lähistöllä joudumme luovuttamaan — ei ole mahdollista esittää z :aa x :n ja y :n funktiona kun $(x, y) \in B((-1, 1), r)$ olipa $r > 0$ miten pieni tahansa. Vastaavaan ongelmaan törmäsimme Kuvassa 4.6, jolloin ratkaisukäyrällä oli tutkittavassa pisteessä pystysuora tangentti.

Tämän viimeisen ongelman alkusyn selvittämiseksi yritämme edetä implisiittisesti määräytyneen funktion $z = z(x, y)$ osittaisderivoinnissa kuten tasonkin tapauksessa. Kirjoitamme yhtälömme ensin muodossa

$$G(x, y, z) = 0,$$

missä tällä kertaa

$$G(x, y, z) = x^3 - 3xz^2 - y^2 + 2.$$

Selvästi G on differentioituva kaikkialla avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Oletamme, että $z = z(x, y)$ on yhtälön $G(x, y, z) = 0$ jatkuvasti differentioituva ratkaisu, kun $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ (A jokin sopiva avoin joukko). Tällöin funktio

$$H(x, y) = G(x, y, z(x, y))$$

on selvästi vakio nolla kaikille $(x, y) \in A$. Näin ollen $H_x(x, y) = H_y(x, y) = 0$ kaikille $(x, y) \in A$.

Toteamme, että $H(x, y)$ on yhdistetty funktion $H = G \circ \phi$, missä $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, z(x, y))$. Oletustamme nojalla ϕ on jatkuvasti differentioituva A :ssa. Ketjusäännön avulla saamme

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial H}{\partial x} &= \partial_1 G(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \partial_2 G(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \partial_3 G(x, y, z(x, y)) \cdot \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \\ &= G_x \cdot 1 + G_y \cdot 0 + G_z \cdot z_x. \end{aligned}$$

Tästä voimme ratkaista osittaisderivaatan

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{G_x(x, y, z)}{G_z(x, y, z)} = -\frac{3x^2 - 3z^2}{-6xz} = \frac{x^2 - z^2}{2xz}.$$

Etenemällä samalla tavalla, ensin laskemalla osittaisderivaatan $0 = H_y$ ja sitten ratkaisemalla saadusta yhtälöstä osittaisderivaatta z_y , saadaan

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{G_y(x, y, z)}{G_z(x, y, z)} = -\frac{-2y}{-6xz} = -\frac{y}{3xz}.$$

Esimerkki 4.21. Määrittää pinnan $y^2 = x^3 - 3xz^2 + 2$ pisteeseen $P = (-1, 2, 1)$ piirretyn tangenttitason yhtälö. Miten pisteen $Q = (-1, 1, 0)$ poikkeava tilanne ilmenee, kun yritetään soveltaa samaa menetelmää?

Ratkaisu. Yllä jodettujen kaavojen nojalla pisteessä P on (lokaalisti määräytyneen) ratkaisun $z = z(x, y)$ osittaisderivaatoille voimassa

$$z_x = \frac{x^2 - z^2}{2xz}(x = -1, y = 2, z = 1) = \frac{1 - 1}{2 \cdot (-1) \cdot 1} = 0,$$

ja

$$z_y = -\frac{y}{3xz}(x = -1, y = 2, z = 1) = \frac{-2}{3 \cdot (-1) \cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

Näiden avulla saadaan tangenttitason yhtälöksi

$$z = \frac{2}{3}(y - 2) + 1.$$

Sitä vastoin pisteessä Q käy huonosti. Osittaisderivaattojen z_x ja z_y lausekkeiden nimittäjä on nimittäin nolla, koska nyt $z = 0$, joten osittaisderivaattoja z_x ja z_y ei tässä pisteessä saada.

Kuvatut ongelmatilanteet kattavat yhden yhtälön kanssa kohdattavat ongelmat, joten yhteenvetona todetaan seuraavaa.

Lause 4.22. (*Implisiittifunktiolause — yhden yhtälön tapaus*) Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ avoin joukko, $G : A \rightarrow \mathbb{R}$ jokin osittaisderivaattoineen jatkuva funktio, ja $\mathbf{a} \in A$ piste, jolle ehdot

$$(i) \quad G(\mathbf{a}) = 0,$$

$$(ii) \quad \partial_n G(\mathbf{a}) \neq 0$$

ovat voimassa. Tällöin on olemassa sellaiset positiiviset luvut $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, että n -ulotteisen laatikon

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i : |x_i - a_i| < \delta_i\}$$

sisällä yhtälön $G(\mathbf{x}) = 0$ ratkaisut muodostavat erään differentioituvan funktion

$$g : (a_1 - \delta_a, a_1 + \delta_1) \times \dots \times (a_{n-1} - \delta_{n-1}, a_{n-1} + \delta_{n-1}) \rightarrow \mathbb{R}$$

kuvaajan, eli kun $\mathbf{x} \in S$, niin $G(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow x_n = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Lisäksi funktion g osittaisderivaatat pisteessä $\mathbf{a}' = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ saadaan kaavoista

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a}') = -\frac{G_{x_i}(\mathbf{a})}{G_{x_n}(\mathbf{a})}.$$

Todistus. Sivuutetaan. Esitetään myöhemmillä kursseilla. □

Gradientti ja tangentialiavaruus

Katsotaan vielä osittaisderivaattoineen jatkuvan funktion $G : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$, nollakohtien joukon S tangenttitasoa implisiittifunktiolauseen valossa. Oletetaan siis, että $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ toteuttaa yhtälön $G(\mathbf{a}) = 0$, ja että $\partial_n G(\mathbf{a}) \neq 0$. Merkitään $\mathbf{a}' = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Tällöin siis voimme lokaalisti ratkaista koordinaatin x_i muiden funktiona, $x_i = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, ja lisäksi kaikille $i = 1, 2, \dots, n-1$,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a}') = -\frac{\partial_i G(\mathbf{a})}{\partial_n G(\mathbf{a})}.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että funktion g kuvaajan (eli joukon S ja jonkin pistettä $\mathbf{a}$ ympäröivän laatikon leikkausjoukon) tangenttiavaruuden yhtälö on

$$x_n - a_n = \partial_1 g(\mathbf{a}')(x_1 - a_1) + \cdots + \partial_{n-1}(\mathbf{a}')(x_{n-1} - a_{n-1}).$$

Viedään tässä kaikki termit vasemmalle puolelle, ja kerrotaan yhtälö puolittain luvulla $\partial_n G(\mathbf{a})$. Koska $-\partial_i g(\mathbf{a}')G_n(\mathbf{a}) = G_i(\mathbf{a})$ kaikilla $i = 1, 2, \dots, n-1$, saadaan tangenttiavaruuden yhtälö muotoon

$$\partial_1 G(\mathbf{a})(x_1 - a_1) + \partial_2 G(\mathbf{a})(x_2 - a_2) + \cdots + \partial_n G(\mathbf{a})(x_n - a_n) = 0. \quad (*)$$

Tämä voidaan sisätulon avulla kirjoittaa kompaktista muodossa

$$(\nabla G(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0,$$

minkä tulkitsemme geometrisesti

Joukon S pisteeseen $\mathbf{a} \in S$ piirretty tangenttiavaruus on kohtisuorassa gradienttivektoria $\nabla G(\mathbf{a})$ vastaan.

Huomautus 4.23. Tämä voidaan tulkita myös suunnattuja derivaattoja käyttäen. Kun liikumme pisteestä $\mathbf{a}$ lähtien ratkaisujoukon $G(\mathbf{x}) = 0$ suuntaisesti, niin funktion G arvo pysyy lähellä nollaa, eli lineaarisessa approksimaatiossa ei muutu lainkaan. Tällöin vastaavan suuntavektorin $\mathbf{u}$ suuntaan laskettu suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{u}}G(\mathbf{a})$ on pakosta nolla. Lauseen 2.17 nojalla tämä tarkoittaa sitä, että $\mathbf{u} \perp \nabla G(\mathbf{a})$.

Tässä tangenttiavaruuden yhtälössä koordinaatit $x_1, x_2, \dots, x_n$ ovat kaikki tasaveroisessa asemassa päin vastoin kuin Lauseessa 4.22, jossa 'ratkaistava' koordinaatti x_n oli erityisessä roolissa muihin nähden. Kuitenkin koordinaattien indeksit ovat lähinnä sattumanvaraisessa järjestyksessä niille annettuja nimilappuja, jotka voimme halutessamme vaihtaa. Näin ollen voimme soveltaa Lausetta 4.22 jonkin muun koordinaatin x_i ratkaisemiseen annetun ratkaisupisteen $\mathbf{a}$ ympäröivässä laatikossa muodossa $x_i = g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Kuitenkin edellyttäen, että osittaisderivaatta $\partial_i G(\mathbf{a}) \neq 0$.

Huomaamme, että mikäli gradientilla $\nabla G(\mathbf{a})$ on yksikin nollasta eroava komponentti, niin tällöin ainakin yksi koordinaateista voidaan lokaalisti ratkaista muiden differentioituvana funktiona. Edellisen nojalla voimme tällöin muodostaa ratkaisujoukolle $G(\mathbf{x}) = 0$ tangenttiavaruuden pisteeseen $\mathbf{a}$. Tämä motivoi seuraavan määritelmän

Määritelmä 4.24. Oletetaan, että reaaliarvoinen funktio G on osittaisderivaattoineen jatkuva joukossa $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Funktion G nollakohtien joukko on *sileä pisteessä* $\mathbf{a} \in A^\circ$, jos $\nabla G(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$.

Kirjataan Lause 4.22 uudelleen muotoiltuna

Lause 4.25. (*Implisiittifunktiolause — yhden yhtälön tapaus, yleisempi versio*). Oletetaan, että funktio $G : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on osittaisderivaattoinen jatkuva avoimessa joukossa A . Oletetaan, että $\mathbf{a} \in A$ on sellainen, että $G(\mathbf{a}) = 0$ ja $\nabla G(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Jos gradientin komponentti $\partial_i G(\mathbf{a}) \neq 0$, niin tällöin ratkaisujoukko

$S = \{\mathbf{x} \in A \mid G(\mathbf{x}) = 0\}$ on sileä pisteessä $\mathbf{a}$. Lisäksi on olemassa sellainen $\mathbf{a}$ -keskinen n -ulotteinen laatikko L , jonka sisällä muuttuja x_i voidaan ratkaista muiden koordinaattien differentioituvana funktiona: $x_i = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Pinnan S tangenttiavaruudella on tällöin yhtälö

$$0 = (\nabla G(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a}) = \partial_1 G(\mathbf{a})(x_1 - a_1) + \partial_2 G(\mathbf{a})(x_2 - a_2) + \dots + \partial_n G(\mathbf{a})(x_n - a_n).$$

Esimerkki 4.26. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ origokeskinen R -säteinen, $R > 0$, pallopinta S muodostuu yhtälön

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ratkaisusta. Osoitetaan, että S on sileä pisteessä $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Osoitetaan, että pisteeseen P piirretyn tangenttitason yhtälö on

$$x_0x + y_0y + z_0z = R^2.$$

Katsotaan kuvan avulla millaisissa pallopinnan osissa kukin koordinaateista voidaan esittää muiden differentioituvana funktiona.

Ratkaisu. Pallopinta S muodostuu funktion $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ nollakohdista. Suoraan osittaisderivoimalla gradientiksi saadaan

$$\nabla G(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

Jos siis $\nabla G(x, y, z) = \mathbf{0}$, niin $x = y = z = 0$. Piste $(0, 0, 0)$ ei kuitenkaan ole pallopinnalla S , koska $G(0, 0, 0) = -R^2 \neq 0$. Näin ollen pallopinta on sileä sen jokaisessa pisteessä. Lauseen 4.25 nojalla pisteeseen P piirretyn tangenttitason T normaalivektori on gradientin $\nabla G(P) = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$ suuntainen. Gradientti on yhdensuuntainen vektorin $\mathbf{t} = \frac{1}{2}\nabla G(P) = (x_0, y_0, z_0)$ kanssa, joten lineaarialgebran kurssin perusteella tangenttitason yhtälö on muotoa

$$x_0x + y_0y + z_0z = c,$$

missä vakio c määräytyy ehdosta $P \in T$. Sijoittamalla saadaan c :lle yhtälö $c = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$, mistä seuraa $c = R^2$, koska P oli pallopinnalla.

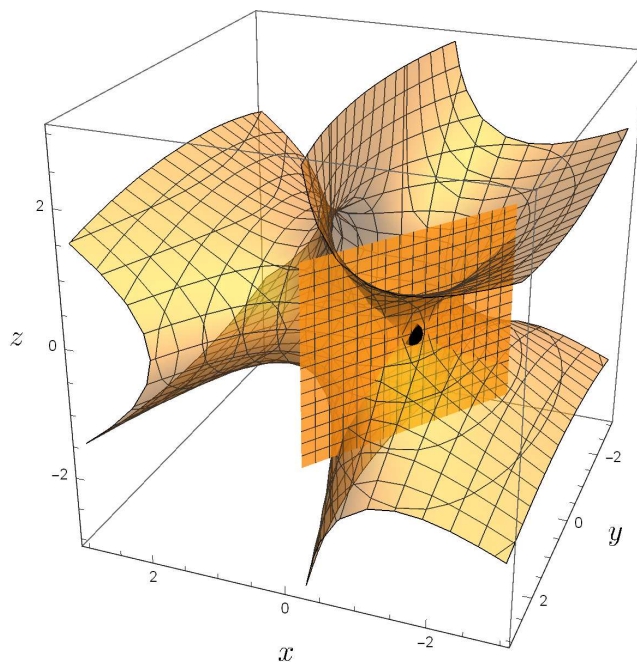
Esimerkki 4.27. (Jatkoa Esimerkille 4.21) Osoitetaan, että pinta $y^2 = x^3 - 3xz^2 + 2$ on sileä pisteessä $Q = (-1, 1, 0)$ ja määrätään vastaavan tangenttitason yhtälö.

Ratkaisu. Kyseinen pinta muodostuu funktion $G(x, y, z) = x^3 - 3xz^2 - y^2 + 2$ nollakohdista. Aiemmin jo laskimme osittaisderivaatat joten

$$\nabla G(x, y, z) = (3x^2 - 3z^2, -2y, -6xz).$$

Erityisesti siis

$$\nabla G(Q) = (3, -2, 0).$$



Kuva 4.12: Pinnan $y^2 = x^3 - 3xz^2 + 2$ pisteeseen $Q = (-1, 1, 0)$ piirretty tangenttitaso on z -akselin suuntainen

Koska $\nabla G(Q) \neq \mathbf{0}$, niin pinta on sileä pisteessä Q . Edelleen $\mathbf{n} = \nabla G(Q) = (3, -2, 0)$ on pisteeseen Q piirretyn tangenttitason T normaali, joten T :n yhtälö on muotoa $3x - 2y + 0z = d$. Koska $Q \in T$, on oltava $d = -5$. Tangenttitason yhtälö on siten

$$T : 3x - 2y + 5 = 0.$$

Kuvassa 4.12 on kuvattu pinta läpikuultavana ja piste Q mustana täplänä. Tangenttitaso T on pystysuorassa. Kuvassa 4.11 kyseinen pinnan osa on kuvattu ylhäältä päin, ja on helppo uskoa, että näin tässä pitikin käydä.

Usean yhtälön tapaus

Haluamme myös selvittää, miltä implisiittifunktiolause näyttää silloin, kun haluammekin ratkaista muuttujista $x_1, x_2, \dots, x_n$ useamman, esimerkiksi m viimeisintä eli $x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n$ edeltävien avulla. Tarvitsemme tällöin tietenkin m yhtälöä, jotka voimme kirjoittaa muodossa $G_1(\mathbf{x}) = 0$, $G_2(\mathbf{x}) = 0, \dots$, $G_m(\mathbf{x}) = 0$. Nämä voimme koota yhdeksi vektori-yhtälöksi $G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, missä $G = (G_1, G_2, \dots, G_m)$. Edellisen pykälän perusteella pidämme seuraavia vaatimuksia odotettuina:

- (i) Tarvitsemme pisteen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa yhtälöt $G(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
- (ii) Ratkaisusta tulee lokaali, eli se on voimassa vain sopivassa pistettä $\mathbf{a}$ ympäröivässä n -ulotteisessa laatikossa.

- (iii) Funktion $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tulee olla jatkuvasti differentioituva avoimessa joukossa, jonka sisäpiste $\mathbf{a}$ on.
- (iv) Tarvitsemme gradienttien $\nabla G_i(\mathbf{a})$ avulla muotoilun kriteerin vastaamaan yhden yhtälön tapauksen ehtoa $\partial_n G(\mathbf{a}) \neq 0$.

Näistä viimeisen kohdan oikean vastineen keksiminen vaatii pohdiskelua. Koska sekä derivaatta että tangenttiavaruus pyrkivät mutkikkaan funktion lineaariseen approksimointiin, otetaan mallia lineaaristen yhtälöryhmien teoriasta. Olkoot $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ jotkin m indeksiä. Muistamme, että lineaarisesta yhtälöryhmästä ($n > m$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \quad (*)$$

voidaan muuttujat $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$ ratkaista muiden funktiona (eli yksikäsitteisesti) silloin ja vain silloin kun niitä vastaavan kerroinmatriisin

$$A_{i_1 i_2 \dots i_m} = \begin{pmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \dots & a_{1i_m} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \dots & a_{2i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \dots & a_{mi_m} \end{pmatrix}$$

determinantti $\det A_{i_1 i_2 \dots i_m} \neq 0$.

Osoittautuu, että usean yhtälön tapauksessa implisiittifunktiolauseesta on voimassa tarkalleen tämän lineaarialgebran tuloksen analogia - tietenkin vain lokaalissa muodossa lineaarisesta tilanteesta poiketen. Toinen luonnollinen tapa ajatella tilannetta on seuraava. Kunkin yhden yhtälön $G_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, m$, ratkaisujoukolla $S_i \subset \mathbb{R}^n$ on, tiettyjen säännöllisyysehtojen vallitessa, tangenttiavaruus T_i , joka on erään $(n-1)$ -ulotteisen aliavaruuden sivuluokka. Nyt koko yhtälöryhmän $G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ratkaisujoukko S on yksittäisten yhtälöiden ratkaisujoukkojen leikkaus $S = \bigcap_{i=1}^m S_i$. On luonnollista toivoa, että koska tangenttiavaruus T_i (lokaalisti) seuraa hyvin tarkasti ratkaisujoukkoa S_i , niin tällöin tangenttiavaruuksien leikkaus $T := \bigcap_{i=1}^m T_i$ seuraa (lokaalisti) hyvin tarkasti yhtälöryhmän ratkaisujoukkoa S . Implisiittifunktiolauseen yleinen muoto sanoo, että näin käy silloin, kun leikkausavaruus T on $(n-m)$ -ulotteinen.

Implisiittifunktiolauseen muotoiluun tarvitaan hivenen komplisoituja merkintöjä, näistä seuraavaksi. Jos $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, U on jokin $\mathbf{a}$ -keskinen laatikko ja $S = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ jokin joukko indeksejä, $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, niin käytetään projektiota

$$p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$$

merkintää $p = p_S$, ja laatikon projektioista merkintää $U_S = p_S(U)$. Olkoon edelleen $\hat{S} := \{1, 2, \dots, n\} \setminus S$ komplementaarinen joukko indeksejä, ja $p_{\hat{S}}$ ja $U_{\hat{S}}$ vastaavat projektiot. Tässä projektio $p_S(\mathbf{x})$ poimii vektorista $\mathbf{x}$ ne koordinaatit, joiden indeksi $\in S$, ja projektio $p_{\hat{S}}$ poimii jäljelle jääneet komponentit. Selvästi

$$U = p_S^{-1}(U_S) \cap p_{\hat{S}}^{-1}(U_{\hat{S}}),$$

ja voimme ilmeisellä tavalla samaistaa laatikon U laatikoiden U_S ja $U_{\hat{S}}$ karteesisen tulon kanssa.

Lause 4.28. (*Implisiittifunktiolause — usean yhtälön tapaus*). Oletetaan, että funktio

$$G = (G_1, G_2, \dots, G_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ on osittaisderivaattoineen jatkuva avoimessa joukossa A . Oletetaan, että $\mathbf{a} \in A$ on sellainen, että $G(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Olkoot $S = \{i_1 < i_2 < \dots < i_m\}$ joukko indeksejä. Jos funktion G Jacobin matriisin $DG(\mathbf{a})$ sarakkeista $i_j, j = 1, 2, \dots, m$, muodostetun neliömatriisin determinantti $\neq 0$, niin on olemassa sellainen pisteen $\mathbf{a}$ sisältävä laatikko U , ja sellainen jatkuvasti differentioituva funktio

$$g = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_m}) : U_{\hat{S}} \rightarrow U_S,$$

että $\mathbf{x} \in U$ toteuttaa yhtälön $G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ silloin ja vain silloin kun

$$p_S(\mathbf{x}) = (g_{i_1}(p_{\hat{S}}(\mathbf{x})), g_{i_2}(p_{\hat{S}}(\mathbf{x})), \dots, g_{i_m}(p_{\hat{S}}(\mathbf{x}))).$$

Erityisesti yhtälöryhmän $G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ratkaisujoukko voidaan laatikon U sisällä esittää differentioituvan funktion $g : p_{\hat{S}}(U) \rightarrow p_S(U)$ kuvaajana jollekin indeksijoukolle $S, \#S = m$, silloin kun Jacobin matriisi $DG(\mathbf{a})$ on täysiasteinen eli astetta m .

Todistus. Sivuutetaan. Viimeinen tulos seuraa siitä lineaarialgebran tuloksesta, jonka mukaan $m \times n$ -matriisi (missä $m < n$) on täysiasteinen silloin ja vain silloin kun sillä on jokin nollasta eroava $m \times m$ alideterminantti. Kyseisen alideterminantin sarakkeiden joukko muodostaa tällöin vaaditun indeksijoukon S . $\square$

Implisiittifunktiolauseen tilanteessa luvatus funktion $g = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_m})$ osittaisderivaatat (tai Jacobin matriisi) pisteessä $p_S(\mathbf{a})$ voidaan ratkaista ketjüsäännön avulla samaan tapaan kuin yhden yhtälön tapauksessakin. Lähtökohtana käytetään tällöin tietoa siitä, että yhdistetty funktio joka saadaan korvaamalla funktion G muuttujat x_{i_j} funktion g_{i_j} arvolla (tätä yhdistettyä funktiota on hyvin hankala merkitä!) häviää kaikkialla. Kuvailaan menetelmää (samalla implisiittifunktiolauseella visualisoiden) seuraavan Esimerkin avulla.

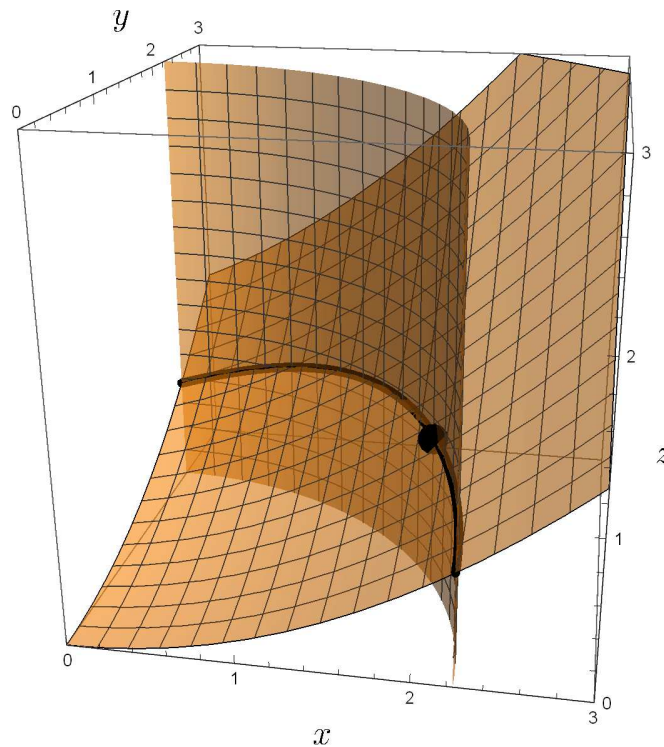
Esimerkki 4.29. Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ pintojen $x^2 + y^2 = 5$ ja $7z = x^2 + xy + y^2$ leikkausjoukkoa pisteen $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ lähistöllä implisiittifunktiolauseen avulla.

Ratkaisu. Tällä kertaa pintojen leikkausjoukko määräytyy yhtälöstä $G(x, y, z) = (0, 0)$, missä $G_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 5$ ja $G_2(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 - 7z$. Suoraan sijoittamalla nähdään, että $G_1(2, 1, 1) = 0$ ja $G_2(2, 1, 1) = 0$, joten piste $\mathbf{a}$ todella on kyseisessä leikkausjoukossa.

Kuvassa 4.13 on kuvattu yhtälön $G_1(x, y, z) = 0$ ratkaisujoukko, yhtälön $G_2(x, y, z) = 0$ ratkaisujoukko ja korostettu niiden leikkauskäyrä.

Osittaisderivoimalla saadaan

$$\nabla G_1(x, y, z) = (2x, 2y, 0) \quad \text{ja} \quad \nabla G_2(x, y, z) = (2x + y, x + 2y, -7),$$



Kuva 4.13: Pinnat $x^2 + y^2 = 5$ ja $7z = x^2 + xy + y^2$ pisteen $(2, 1, 1)$ lähistöllä

joten pisteessä $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ gradientit ovat

$$\nabla G_1(2, 1, 1) = (4, 2, 0) \quad \text{ja} \quad \nabla G_2(2, 1, 1) = (5, 4, -7).$$

Näin ollen pinnalla $G_1(x, y, z) = 0$ voidaan pisteen $\mathbf{a}$ lähistöllä esittää joko x tai y muiden koordinaattien funktiona. Kyseisen pinnan tangenttitason yhtälöksi saadaan gradientin avulla

$$0 = 4(x - 2) + 2(y - 1) + 0(z - 1) \iff 2x + y = 5.$$

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ tämä on pystysuora taso, mikä ei tietenkään yllätä, koska yhtälön $G_1(x, y, z) = 0$ ratkaisujoukko on z -akselin suuntainen putki.

Vastaavasti pinnalla $G_2(x, y, z) = 0$ voidaan pisteen $\mathbf{a}$ lähistöllä mikä tahansa koordinaatti esittää kahden muun funktiona. Tangenttitason yhtälöksi saadaan

$$5(x - 2) + 4(y - 1) - 7(z - 1) = 0 \iff 5x + 4y - 7z = 7.$$

Leikkauskäyrän tangenttisuora pisteessä $\mathbf{a}$ saadaan tangenttitasojen leikkauksena. Se muodostuu siis yhtälöparin

$$\begin{cases} 2x + y &= 5 \\ 5x + 4y - 7z &= 7 \end{cases}$$

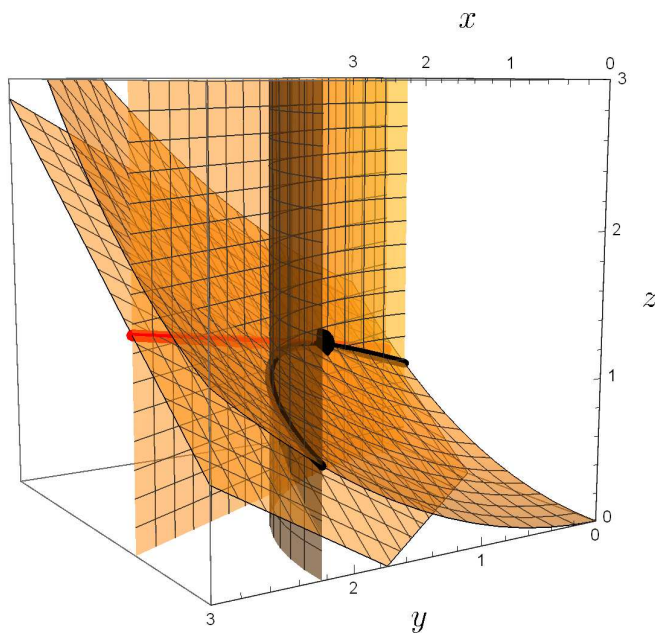
ratkaisuihin. Lineaarialgebran menetelmillä tässä ratkaisuksi saadaan (esimerkiksi x :n avulla)

$$\begin{cases} y &= 5 - 2x \\ z &= \frac{13 - 3x}{7}. \end{cases}$$

Huomaa, että kerroinmatriisiin

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

mikä tahansa 2×2 -alideterminantti $\neq 0$. Näin ollen mitkä tahansa kaksi koordinaattia voidaan ratkaista kolmannen funktiona.



Kuva 4.14: Esimerkin 4.29 pinnat niiden tangenttitasot, leikkauskäyrä ja sen tangenttisuora

Kuvassa 4.14 nähdään molemmat pinnat, tangenttitasot, leikkauskäyrä ja sen tangenttisuora.

Määritelmä 4.30. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $G = (G_1, G_2, \dots, G_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on osittaisderivaattoineen jatkuva funktio, ja että $\mathbf{a} \in A^\circ$ toteuttaa yhtälön $G(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Sanotaan, että piste $\mathbf{a}$ on *sileä funktion G suhteen*, jos Jacobin matriisi $DG(\mathbf{a})$ on täysiasteinen (eli astetta m).

Sileyden asemesta puhutaan myös säännöllisyydestä. Joskus varataan termi sileyden tilanteelle, jossa kaikki ratkaisujoukon pisteet ovat säännöllisiä. Joukon S pisteitä, jotka eivät ole säännöllisiä kutsutaan *singulaarisiksi*. Sileää ratkaisujoukkoa kutsutaan joissakin yhteyksissä myös *ei-singulaariseksi*.

Useamman yhtälön tapauksessa singulaarisuus tyypillisemmin syntyy siten, että jossakin pisteessä Jacobin matriisin vaakarivien välillä on lineaarisia riippuvuuksia.

Esimerkki 4.31. Pallopinta $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ja taso $z + 1 = 0$ selvästi leikkaavat ainoastaan pallon etelänavalla pisteessä $P = (0, 0, -1)$. Näin ollen näiden kahden pinnan leikatessa ei muodostukaan käyrää pisteen P lähistöllä. Miksi tämä ei ole ristiriidassa implisiittifunktiolauseen kanssa?

Ratkaisu. Tarvittavat kaksi funktiota, joiden nollakohtapinnoista on kysymys, ovat

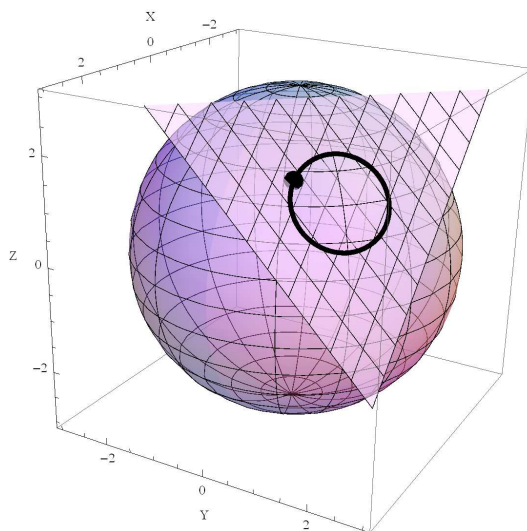
$$G_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

ja

$$G_2(x, y, z) = z + 1.$$

Osittaisderivoimalla saadaan näiden gradientteiksi $\nabla G_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ ja $\nabla G_2(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Pisteessä P siis $\nabla G_1(P) = (0, 0, -2)$ ja $\nabla G_2(P) = (0, 0, 1)$. Nämä ovat toistensa sklaarimonikertoja, joten implisiittifunktiolause ei lupaa mitään pisteen P lähistöllä.

Yhden yhtälön tapauksessa yhden tietyn koordinaatin implisiittinen määräytyminen muiden funktiona riippui siitä, ettei gradientin vastinkomponentti saanut hävitä. Useamman yhtälön tapauksessa implisiittifunktiolause edellyttää meiltä sopivan determinantin tarkistamista.



Kuva 4.15: Pallon $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ja tason $x + y + z = 5$ leikkauskäyrä

Esimerkki 4.32. Tarkista, että piste $Q = (2, 1, 2)$ on pallopinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ja tason $x + y + z = 5$ leikkauskäyrällä. Selvitä, minkä koordinaatin avulla muut kaksi voidaan esittää implisiittisinä funktioina pisteen Q lähistöllä.

Ratkaisu. Tutkittavat funktiot ovat $G_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ ja $G_2(x, y, z) = x + y + z - 5$. Näiden gradientit ovat $\nabla G_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ ja $\nabla G_2(x, y, z) = (1, 1, 1)$, joten Jacobin matriisi pisteessä Q on

$$DG(Q) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Selvästi $DG(Q)$ on täysiasteinen, joten saamme pisteessä Q säännöllisen leikkauskäyrän. Jos yritämme implisiittisesti ajatella y - ja z -koordinaatteja koordinaatin x funktioina, niin meidän on tutkittava determinanttia, joka saadaan ottamalla matriisista $DG(Q)$ mukaan toinen ja kolmas sarake (jotka vastaavat implisiittisesti ratkaistavia koordinaatteja y ja z). Saamme determinantin

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0.$$

Näin ollen implisiittifunktiolause lupaa meidän onnistuvan. Sitä vastoin, jos yritämme esittää implisiittisesti x - ja z -koordinaatit y :n funktioina pisteen Q lähistöllä, joudumme vaikeuksiin sillä matriisin $DG(Q)$ 1. ja 3. sarake ovat lineaarisesti riippuvia, ja

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

Helposti nähdään, että jättämällä 3. sarake pois, saadaan $A_{12} = 4 - 2 \neq 0$ jälleen nollasta eroava determinantti, joten muut koordinaatit määräytyvät implisiittisesti z -koordinaatin funktioina.

Kuva 4.15 esittää leikkaavia pintoja ja leikkauskäyrää. Geometrisesti on ilmeistä, että leikkauskäyrä on ympyrä. Myöhemmässä Esimerkissä selvitämme, että leikkauskäyrän pisteistä pisteellä Q on pienin y -koordinaatit. Tämä myös selittää sen, miksi juuri tämän pisteen ympäristössä emme voi käyttää y -koordinaattia leikkauskäyrän pisteiden parametrisointiin.

Seuraava tekniikka tulee vastaan kun käsitellään kahta avaruudessa $\mathbb{R}^3$ leikkaavaa pintaa. Kummankin pinnan tangenttitason normaali määräytyy vastaavasta gradienttivektorista. Koska leikkauskäyrän tangentti on kummallakin tangenttitasolla, tangenttisuoran suuntavektori on kohtisuorassa kumpaakin gradienttia vastaan. Implisiittifunktiolause tilanteessa kyseiset gradientit ovat lineaarisesti riippumattomia, joten kyseisen suuntavektorin on pakko olla yhdensuuntainen gradienttien ristitulon kanssa.

Esimerkki 4.33. Määrää Esimerkin 4.29 pintojen $x^2 + y^2 = 5$ ja $7z = x^2 + xy + y^2$ leikkauskäyrän pisteeseen $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ piirretyn tangenttisuoran suuntavektori ristituloa käyttäen.

Ratkaisu. Selvitimme Esimerkin 4.29 ratkaisun yhteydessä, että mainittujen pintojen tangenttitasojen normaalit ovat vektorien $\vec{n}_1 = (2, 1, 0)$ ja $\vec{n}_2 = (5, 4, -7)$ suuntaiset. Näiden ristitulona saadaan vektori

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-7, 14, 3).$$

Näin ollen leikkaussuoran normaalimuotoinen yhtälö on

$$\frac{x-2}{-7} = \frac{y-1}{14} = \frac{z-1}{3}.$$

4.3 Sidotuista ääriarvoista

Siirrymme tarkastelemaan *sidottuja ääriarvotehtäviä*. Ne eroavat luvun alussa käsitellyistä lokaaleista ääriarvoista siten, että minimoitavan tai maksimoitavan *tavoitefunktion* $f(\mathbf{x})$ muuttujaa $\mathbf{x}$ ei saa varioida vapaasti, vaan sitä rajataan yhdellä tai useammalla *side-ehdolla*. Menetelmämme toimii ainoastaan, kun side-ehdot on muotoiltavissa yhtälöinä $G_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, missä m on side-ehtojen lukumäärä, ja funktiot G_i ovat differentioituvia.

Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$ side-ehtojen ratkaisujoukko

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid G_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ kaikille } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Sanotaan, että piste $\mathbf{a}$ on funktion f *lokaali sidottu maksimi*, jos on olemassa sellainen $r > 0$, että $f(\mathbf{a})$ on suurin funktion f joukossa $B(\mathbf{a}, r) \cap S$ saamista arvoista. Lokaali sidottu minimi määritellään vastaavasti.

Oletetaan ensin, että $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ on säännöllinen funktion $G = (G_1, G_2, \dots, G_m)$ suhteen. Tällöin voimme käyttää implisiittifunktiolausetta tilanteen analysoimiseen. Permutoidamalla tarvittaessa koordinaatteja voimme rajoituksetta olettaa, että implisiittifunktiolauseen kuvailemalla tavalla voimme side-ehdoista $G(\mathbf{x}) = 0$ ratkaista koordinaatit $x_1, x_2, \dots, x_m$ pisteen $\mathbf{a}$ lähistöllä muiden funktiona: $x_i = g_i(x_{m+1}, \dots, x_n)$. Jos piste $\mathbf{a}$ on sidottu lokaali ääriarvo, niin tällöin pisteen $\mathbf{a}' = (a_{m+1}, \dots, a_n)$ on oltava muuttujan $\mathbf{x}' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ yhdistetyn funktion

$$\phi(\mathbf{x}') = f(g_1(\mathbf{x}'), g_2(\mathbf{x}'), \dots, g_m(\mathbf{x}'), x_{m+1}, \dots, x_n)$$

lokaali ääriarvo. Näin ollen $\mathbf{a}'$ on funktion ϕ kriittinen piste, eli $\nabla \phi(\mathbf{a}') = \mathbf{0}$.

Lasketaan osittaisderivaatat $\partial \phi / \partial x_j$ indekseillä $j = m+1, m+2, \dots, n$. Ketjusäännöllä saadaan

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\mathbf{a}') = \sum_{i=1}^m \partial_i f(\mathbf{a}) \partial_j g_i(\mathbf{a}') + \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}).$$

Tämän yhtälön oikea puoli on gradientin $\nabla f(\mathbf{a})$ ja vektorin

$$\mathbf{v}_j = (\partial_j g_1(\mathbf{a}'), \partial_j g_2(\mathbf{a}'), \dots, \partial_j g_m(\mathbf{a}'), 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

välinen sisätulo. Tässä vektorin $\mathbf{v}_j$ viimeiset $n - m$ komponenttia ovat muut nollia komponenttia j lukuun ottamatta (mikä = 1).

Tässä vektorit $\mathbf{v}_j$, $j = m+1, m+2, \dots, n$, generoivat funktion $g = (g_1, \dots, g_m)$ kuvaajan pisteeseen $\mathbf{a}$ piirretyn tangenttiavaruuden. Toisaalta implisiittifunktiolause kertoo, että joukon S pisteeseen $\mathbf{a}$ piirretty tangenttiavaruus muodostuu vektoreista, jotka ovat kohtisuorassa kaikkia gradientteja $\nabla G_i(\mathbf{a})$, $i = 1, 2, \dots, m$, vastaan.

Kerrataan lineaarialgebrasta ortogonaalisen komplementin käsite: Jos $V \subseteq \mathbb{R}^n$ on aliavaruus, niin sen ortogonaalikomplementti $V^\perp$ muodostuu vektoreista

$$V^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \text{ kaikille } \mathbf{x} \in V\}.$$

Tällöin (sisätuloavaruuksien teoria tai harjoitustehtävä) jos $\dim V = k$, niin $\dim V^\perp = n - k$. Lisäksi meillä on tulos

$$(V^\perp)^\perp = V,$$

joka kertoo, että *jokainen vektori, joka on kohtisuorassa kaikkia niitä vektoreita vastaan jotka ovat kohtisuorassa aliavaruuden V kaikkia vektoreita vastaan, kuuluu itse aliavaruuteen V .*

Soveltamalla tätä yllä kuvattuun tilanteeseen olemme perustelleet seuraavan tuloksen.

Lause 4.34. (*Lagrangen kertoimien menetelmä*) Oletetaan, että piste $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ on C^1 -luokan funktion f sidotun ääriarvokohta side-ehtojen $G_1(\mathbf{x}) = G_2(\mathbf{x}) = \dots = G_m(\mathbf{x}) = 0$ suhteen. Jos $\mathbf{a}$ on lisäksi säännöllinen funktion $G = (G_1, \dots, G_m)$ suhteen, niin tällöin gradientti $\nabla f(\mathbf{a})$ kuuluu gradienttien $\nabla G_i(\mathbf{a}), i = 1, 2, \dots, m$, generoimaan avaruuteen. Erityisesti on olemassa sellaiset vakiot $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ että

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \nabla G_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_m \nabla G_m(\mathbf{a}).$$

Lauseessa 4.34 esiintyviä kertoimia $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ kutsutaan yleisesti *Lagrangen kertoimiksi*. Ne antavat meille työkalun sidotun ääriarvotehtävän ratkaisemiseksi. Jos nimittäin tiedämme, että side-ehtojen ratkaisujoukko S on epätyhjä kompakti, niin tällöin Seurauksen 1.27 nojalla jatkuva funktio f saavuttaa joukossa S sekä suurimman että pienimmän arvonsa. Yllä kerrotun mukaisesti sidotut ääriarvot ovat joko side-ehdon suhteen epäsäännöllisiä pisteitä, tai sitten ne toteuttavat Lauseen 4.34 vektoriyhtälön joillakin Lagrangen kertoimien arvoilla. Tällä tavalla löydämme yleensä äärellisen joukon kandidaattipisteitä. Näiden joukosta on sitten yksinkertainen työ löytää kokeilemalla se, jossa tavoitefunktion arvo on suurin tai pienin.

Esimerkki 4.35. Olkoon E seuraava tason pisteiden joukko

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 = 3\}.$$

Millä joukon x pisteistä on suurin x -koordinaatti? Millä taas pienin?

Ratkaisu. Meillä on side-ehto

$$G(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

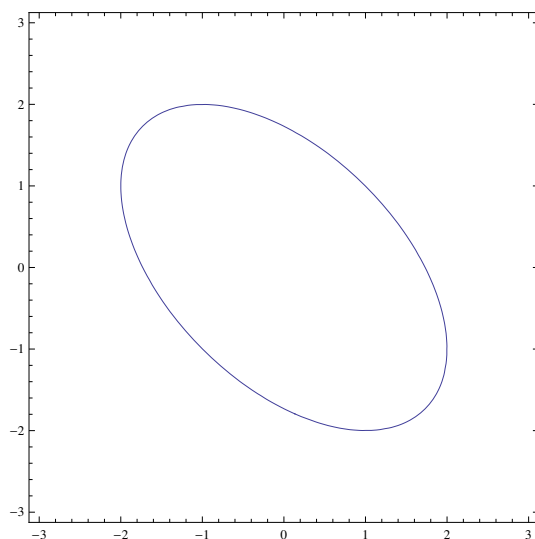
ja tavoitefunktio $f(x, y) = x$. Tarkistamme ensin, että joukon E pisteet ovat kaikki säännöllisiä side-ehdon suhteen. Funktion G gradientti

$$\nabla G(x, y) = (2x + y, x + 2y)$$

häviää ainoastaan origossa, koska yhtälöt $2x + y = 0$ ja $x + 2y = 0$ määräävät kaksi erisuuntaista origon kautta kulkevaa suoraa. Koska origo ei kuitenkaan ole käyrällä E , niin väite seuraa.

Selvästi joukko $E = G^{-1}(\{0\})$ on suljettu (Lause 1.21). Käyrän E yhtälöstä seuraa, että

$$3 = x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq \frac{3}{4}y^2,$$



Kuva 4.16: Yhtälön $x^2 + xy + y^2 = 3$ ratkaisujoukko

mistä voimme päätellä, että $y^2 \leq 4$. Samoin näemme (symmetria), että $x^2 \leq 4$. Näin ollen joukko E on rajoitettu, koska $x^2 + y^2 \leq 8$ aina, kun $(x, y) \in E$. Näin ollen E on kompakti. Koska $(1, 1) \in E$, niin E on myös epätyhjä. Näin ollen Seurauksen 1.27 nojalla tavoitefunktio saavuttaa joukossa E suurimman ja pienimmän arvonsa. Joukko E on kuvassa 4.16.

Funktion f gradientti on vakiovektori $\nabla f(x, y) = (1, 0)$. Lagrangen kertoimien menetelmä kertoo siten, että sidotussa ääriarvokohdassa $(x, y) = 0$ on voimassa vektori yhtälö

$$(1, 0) = \lambda(2x + y, x + 2y). \quad (*)$$

Tämän lisäksi meillä on tietenkin käytössämme side-ehto $G(x, y) = 0$ (3 yhtälöä 3 tuntematonta). Yhtälö $(*)$ ei voi toteutua, jos $\lambda = 0$. Kun $\lambda \neq 0$, niin vertailemalla siinä jälkimmäisiä komponentteja näemme, että $(*)$ voi toteutua vain, jos $x + 2y = 0$. Sidotuissa ääriarvokohdissa siis $x = -2y$. Sijoittamalla tämä side-ehtoon saamme yhtälön

$$0 = G(-2y, y) = 4y^2 - 2y^2 + y^2 - 3 = 3y^2 - 3,$$

mistä ratkeaa $y = \pm 1$. Koska $x = -2y$, niin saamme kaksi kandidaattipistettä $\mathbf{a}_1 = (-2, 1)$ ja $\mathbf{a}_2 = (2, -1)$.

Vastaukseksi saamme siis, että käyrällä E suurin x -koordinaatti on pisteellä $(2, -1)$ ja pienin pisteellä $(-2, 1)$.

Edellinen esimerkki yritti myös valaista Lagrangen kertoimien roolia. Voimme ne toki myös ratkaista muodostuneesta yhtälöryhmästä, mutta niiden arvon löytäminen ei aina ole tarpeen tehtävän ratkaisemiseksi.

Sidottuun ääriarvotehtävään ajaudutaan myös silloin, kun tehtävänä on etsiä tavoitefunktion f suurin ja pienin arvo annetussa kompaktissa joukossa $K \subset \mathbb{R}^n$. Koska Seurauksen 1.27 nojalla mikä tahansa jatkuva funktio saavuttaa joukossa K suurimman ja pienimmän arvonsa, niin ongelman ratkaisemiseksi riittää tuottaa sellainen äärellinen joukko kandidaattipisteitä, joiden joukosta ratkaisu löytyy:

- Jos suurin tai pienin arvo saavutetaan joukon K sisäpisteessä $\mathbf{a} \in K^\circ$, niin kyseisessä pisteessä on oltava lokaali ääriarvo. Tällaiset kandidaattipisteet löydämme määräämällä pisteet, joissa $\nabla f = \mathbf{0}$ (tai joissa f ei ole differentioituva).
- Jos suurin tai pienin arvo saavutetaan reunapisteessä $\mathbf{a} \in \partial K$, ja $\mathbf{a}$ kuuluu sellaiseen reunan osaan, joka määräytyy side-ehdoista $G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, G differentioituva, niin löydämme pisteen $\mathbf{a}$ vastaavan sidotun ääriarvotehtävän kandidaattipisteiden joukosta.
- Yleisesti reuna ∂K voi muodostua useasta suljetun joukon $C_i, i = 1, \dots, k$, unionista, kukin oman side-ehdonsa määrittelemä. Tällöin on vielä erikseen käsiteltävä reunan osien epättyhjät leikkaukset $C_i \cap C_j$, jolloin saamme kaksi side-ehdot. Tarvittaessa on jatkettava useamman kuin kahden reunan osan leikkauksiin.

Esimerkki 4.36. Olkoon $K \subset \mathbb{R}^3$ osajoukko

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, z \leq 1\}.$$

Selvitä, missä joukon K pisteessä funktio $f(x, y, z) = x + xy + z^2$ saa suurimman arvonsa ja missä taas pienimmän.

Ratkaisu. Selvästi K on suljettu ja rajoitettu, joten se on kompakti. Aloitetaan selvittämällä funktion f kriittiset pisteet. Osittaisderivoimalla saadaan gradientiksi

$$\nabla f(x, y, z) = (1 + y, x, 2z).$$

Nähdään, että tämä häviää ainoastaan pisteessä $\mathbf{a}_1 = (0, -1, 0)$. Koska $\mathbf{a}_1 \in K$ otamme sen mukaan kandidaattipisteiden joukkoon, ja laskemme $f(\mathbf{a}_1) = 0$.

Joukon K reunasta osa on pallokuorella $G_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$ ja osa tasolla $G_2(x, y, z) = z - 1 = 0$. Nämä reunan osat ja niiden leikkausjoukon nähdään Kuvassa 4.17.

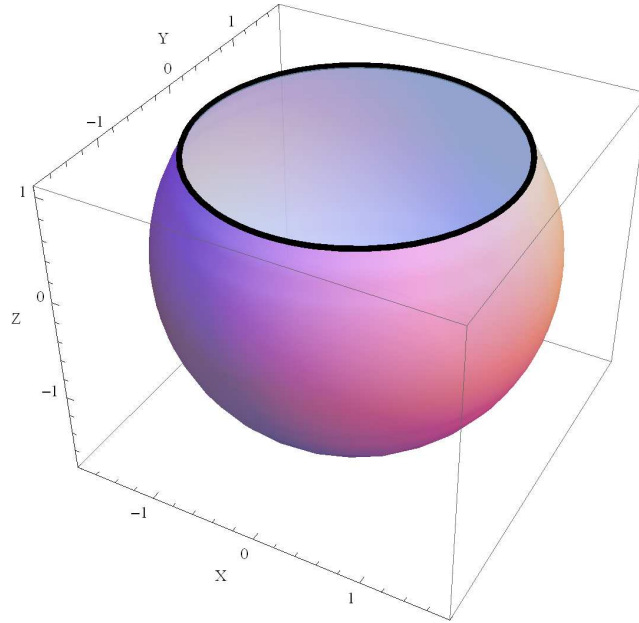
Tutkimme ensin pallokuorta, jolla on voimassa side-ehto $G_1(x, y, z) = 0$. Lagrangen kertoimien menetelmä antaa meille vektori yhtälön

$$\nabla f = (1 + y, x, 2z) = \lambda(2x, 2y, 2z) = \lambda \nabla G_1. \quad (*)$$

Vertailemalla tässä viimeisiä komponentteja näemme, että joko $\lambda = 1$ tai $z = 0$. Jos $\lambda = 1$, niin kahta ensimmäistä komponenttia vertaamalla näemme, että $x = 2/3, y = 1/3$. Yhtälöstä $G_1(x, y, z) = 3$ ratkeaa tällöin $z = \pm\sqrt{22}/3$. Koska $\sqrt{22}/3 > 1$, niin ainoastaan miinusmerkkinen ratkaisu kuuluu joukkoon K . Löysimme siis toisen kandidaattipisteen $\mathbf{a}_2 = (2/3, 1/3, -\sqrt{22}/3)$, ja $f(\mathbf{a}_2) = 10/3$.

Jos taas $z = 0$, niin yhtälössä $(*)$ meitä kiinnostaa vain 2 ensimmäistä komponenttia. Koska emme ole funktion f kriittisessä pisteessä $\lambda \neq 0$. Yhtälöparilla

$$(a, b) = \lambda(c, d)$$



Kuva 4.17: Epäyhtälöiden $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ ja $z \leq 1$ määräämän joukon reunan osat

on ratkaisu $\lambda \neq 0$ vain, jos $ad = bc$. Tällä tavalla voimme eliminoida kertoimen λ , ja saamme yhtälön

$$2x^2 = 2y + 2y^2 \implies x^2 = y + y^2.$$

Sijoittamalla tämä side-ehtoon $G_1(x, y, 0) = 0$ saadaan

$$2y^2 + y - 3 = 0,$$

jonka ratkaisut ovat $y = -3/2$ ja $y = 1$. Kumpaakin näitä y :n arvoja kohti saamme 2 vaihtoehto x :lle yhtälöstä $x^2 = y + y^2$. Kaiken kaikkiaan löydämme neljä uutta kandidaattipistettä $\mathbf{a}_2 = (\sqrt{2}, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-\sqrt{2}, 1, 0)$, $\mathbf{a}_4 = (\sqrt{3}/2, -3/2, 0)$ ja $\mathbf{a}_5 = (-\sqrt{3}/2, -3/2, 0)$. Funktion f arvot näissä pisteissä ovat $f(\mathbf{a}_2) = \sqrt{3}/4 = -f(\mathbf{a}_3)$, $f(\mathbf{a}_6) = 2\sqrt{2} = -f(\mathbf{a}_5)$

Tasolla $z = 1$ käytämme side-ehtoa $G_2(x, y, z) = 0$, ja Lagrangen kertoimien menetelmä antaa vektoriyhtälön

$$(1 + y, x, 2z) = \lambda'(0, 0, 1).$$

Vertailemalla kahta ensimmäistä komponenttia näemme, että tällöin $y = -1, x = 0$. Tästä saamme siis kandidaattipisteen $\mathbf{a}_6 = (0, -1, 1)$, jossa tavoitefunktio saa arvon $f(\mathbf{a}_6) = 1$.

Suurin tai pienin arvo voidaan vielä saavuttaa pallokuoren ja tason $z = 1$ leikkausympyrällä. Huomaa, ettei tällä leikkauskäyrällä oleva piste välttämättä tule esille sidottuna ääriarvokohtana vain toista side-ehtoa käytettäessä! Lagrangen kertoimien menetelmä antaa tällöin yhtälön

$$(1 + y, x, 2z) = \lambda_1(2x, 2y, 2z) + \lambda_2(0, 0, 1).$$

Toisaalta tiedämme toisen side-ehdon perusteella, että $z = 1$. Näemme, että kolmansia komponentteja koskevan yhtälön ainoa tarkoitus on justeerata kertoimen λ_2 arvo. Koska λ_2 ei meitä varsinaisesti kiinnosta, unohdamme kolmannet komponentti, jolloin meille jää yhtälöpari

$$(1 + y, x) = \lambda_1(2x, 2y) \quad (**)$$

sekä side-ehto $G_1(x, y, 1) = 0$. Eliminoimalla λ_1 yhtälöstä $(**)$ kuten aiemminkin saamme jälleen

$$x^2 = y + y^2$$

Sijoittamalla tämä side-ehtoon $x^2 + y^2 + 1^2 = 3$ saadaan nyt

$$2y^2 + y = 2,$$

mistä edelleen ratkeaa

$$y = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{17}).$$

Tällöin

$$x^2 = y^2 + y = \frac{1}{8}(7 \pm \sqrt{17}).$$

Merkitään $\alpha = \sqrt{(7 - \sqrt{17})/8}$, $\beta = \sqrt{(7 + \sqrt{17})/8}$, $\gamma = (-1 - \sqrt{17})/4$ ja $\delta = (-1 + \sqrt{17})/4$. Saamme neljä kandidaattipistettä lisää $\mathbf{a}_7 = (\alpha, \gamma, 1)$, $\mathbf{a}_8 = (-\alpha, \gamma, 1)$, $\mathbf{a}_9 = (\beta, \delta, 1)$ ja $\mathbf{a}_{10} = (-\beta, \delta, 1)$. Laskemalla näimme näistä suurin arvo on $f(\mathbf{a}_{10}) \approx 3,0998$ ja pienin $f(\mathbf{a}_9) \approx -1,0998$.

Yhteenvedon toteamme, että joukossa K funktio f saa pisteessä $\mathbf{a}_1 = (2/3, 1/3, -\sqrt{22}/3)$ suurimman arvonsa $10/3$ ja pienimmän arvonsa $-2\sqrt{2}$ pisteessä $\mathbf{a}_5 = (-\sqrt{2}, 1, 0)$.

Luku 5

Vektorikenttien käyräintegraaleista

Sovelluksissa törmätään myös tilanteisiin, joissa haluamme integroida yli ‘ n -ulotteisen’ joukon A , missä A on kuvailtu korkeampiulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^m$, $n < m$, osajoukkona. Haluamme esimerkiksi muodostaa integraalin yli tason (tai korkeampiulotteisen avaruuden) parametrisoidun käyrän, tai yli avaruudessa $\mathbb{R}^3$ lilluvan pinnan. Tällöin ensimmäinen ongelma on ‘sallitun’ integroimisjoukon kuvaileminen.

5.1 Käyristä

Mielikuvaamme avaruuden $\mathbb{R}^n$ käyrästä vastannee suurin piirtein joukkoa, jonka pisteet voidaan jatkuvasti parametrisoida yhden parametrin avulla (käyrän on tarkoitus olla 1-ulotteinen objekti). Parametrisointi saadaan aikaan funktiolla

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)).$$

Tässä $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ on parametrin t vaihteluväli, ja funktiota γ vastaava käyrä on sen kuvajoukko

$$\gamma([a, b]) = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [a, b]\}.$$

Saamme siis käyrän pisteitä antamalla parametrille t arvoja väliltä $[a, b]$.

Vaadimme ehdottomasti, että tässä esiintyvät funktiot c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ovat kaikki jatkuvia välillä $[a, b]$. Muutoinhan käyrä voisi hyppiä sinne tänne. Itse asiassa tämä ei aivan riitä, sillä pelkkä jatkuvuus sallii vielä sängen patologisia tilanteita. Esimerkiksi ns. *Peanon käyrä* muodostuu jatkuvien funktioiden parista $\gamma = (c_1, c_2)$, jolle $\gamma([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$. Tässä siis kuvajoukko on täysinäinen neliö, mikä ei 2-ulotteisena sovi mielikuvaamme käyrästä. Tämän kurssin puitteissa ei ole aikaa paneutua tähän problematiikkaan, ja tyydymme seuraavaan määritelmään, joka on sovellusten kannalta riittävän yleinen. Määriteltävä käsite *tie* rajaa pois anomaliset tapaukset.

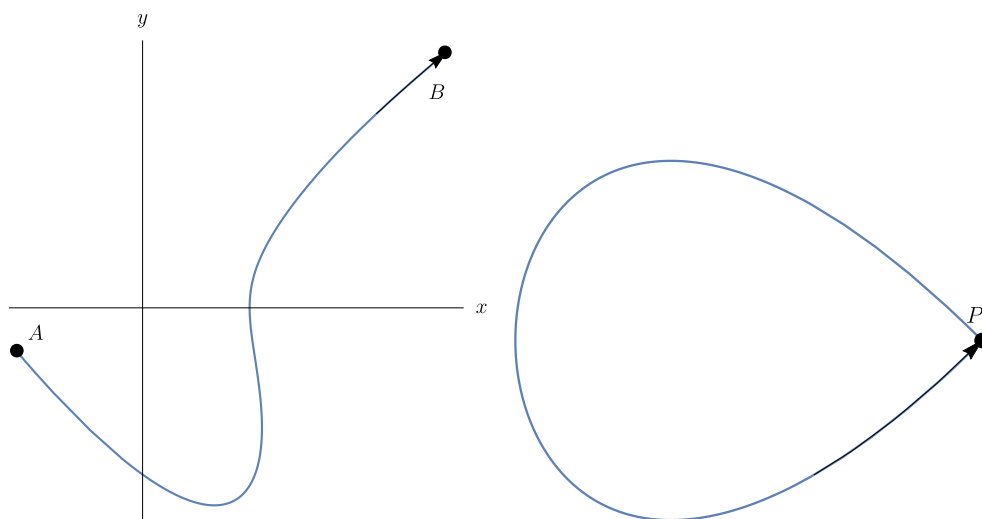
Määritelmä 5.1. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sanotaan, että $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))$ on *polku* ($\mathbb{R}^n$:ssä), merkitsemme kuvajoukkoa $\gamma^* = \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$, ja sanomme, että γ^* (eli γ :n jälki) on *käyrä* ja γ sen (eräs) *parametrisointi* tai *parametriesitys*. Sanotaan, että $\gamma(a)$ on käyrän *alkupiste* ja $\gamma(b)$ *loppupiste*.

Polku $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *sulkeutuva*, jos sen päätepisteet yhtyvät, eli jos $\gamma(a) = \gamma(b)$. Sulkeutuva polku on *Jordanin käyrä*, jos sillä on sellainen parametrisointi $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, että $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ aina kun $t_1 < t_2$ poikkeusta $t_1 = a, t_2 = b$ lukuun ottamatta (käyrä ei siis leikkaa itseään).

Polku $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *paloittain jatkuvasti derivoituva*, jos väli $[a, b]$ voidaan jakaa äärellisen moneen osaan jakopisteillä $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ siten, että

- kukin funktioista $c_i, i = 1, 2, \dots, n$, on jatkuva koko välillä $[a, b]$,
- kukin funktioista $c_i, i = 1, 2, \dots, n$, on jatkuvasti derivoituva kullakin avoimella osavälillä (t_{j-1}, t_j) , $j = 1, 2, \dots, k$, ja toispuoleisesti jatkuvasti derivoituva kunkin osavälin päätepisteissä,
- derivaatoista muodostettu vektori $(c'_1(t), c'_2(t), \dots, c'_n(t))$ (missä derivaatat tulkitaan toispuoleisina jakopisteissä $t = t_j$) ei ole nollavektori kuin mahdollisesti äärellisen monella parametrin t arvolla.

Paloittain jatkuvasti derivoituvaa polkua kutsutaan myös lyhyesti *tiekksi*.



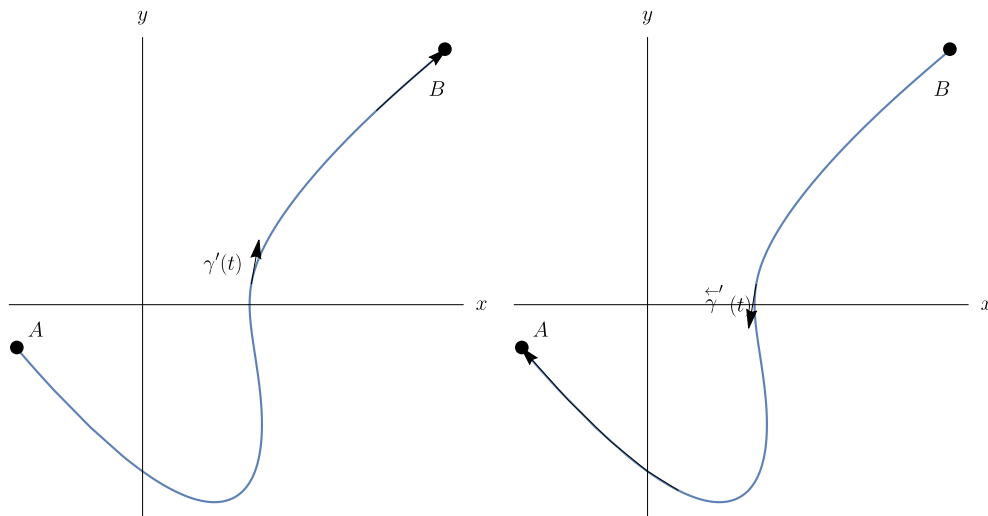
Kuva 5.1: Sileä käyrä pisteestä A pisteeseen B , ja sulkeutuva käyrä, joka alkaa ja päättyy pisteessä P . Käyrien kulkusuunta osoitetaan nuolilla.

Rajoitetulla määritelmällämme on se miellyttävä seuraus, että käyrälle voidaan tällöin määritellä tangentti. Jos $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on paloittain sileä parametrisointi, ja kohdassa $t = t_0$ sen kaikilla komponenteilla $c_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, on derivaatta, niin käyrän γ tangenttivektori $\gamma'(t_0)$ pisteessä $\gamma(t_0)$ on

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} = (c'_1(t_0), c'_2(t_0), \dots, c'_n(t_0)) \in \mathbb{R}^n.$$

Yllä erotusosamäärässä esiintyy pisteen $\gamma(t_0)$ ja sitä lähellä olevan pisteen $\gamma(t_0 + h)$ erotusvektori. Kun $h \rightarrow 0$ niin tavalliseen tapaan erotusvektori lyhenee ja kääntyy tangentin suuntaiseksi. Jakaminen suureella h johtaa siihen, että raja-arvoksi saadaan jokin nollasta eroava vektori, joka selvästikin kertoo meille käyrän

kulkusuunnan pisteestä $\gamma(t_0)$ kasvavan parametrin suuntaan jatkettaessa. Huomaa, että määritelmän ehtojen viimeisen ehdon perusteella paloittain sileästi parametrisoidulla käyrällä on tangentti kaikkialla äärellistä poikkeuspisteiden joukkoa lukuunottamatta.



Kuva 5.2: Pisteessä, jossa $\gamma(t)$ on derivoituva ja $\gamma'(t) \neq 0$ saadaan käyrälle tangenttivektori. Vastakäyrällä on sama jälki, mutta kulkusuunta on päinvastainen. Tangentti kertoo myös parametrin kasvusuunnan.

Tarvitsemme usein annetun käyrän γ *vastakäyrän* $\overleftarrow{\gamma}$ käsitettä. Idea on, että kyseessä on sama käyrä kuljettuna vastakkaiseen suuntaan, jolloin tietenkin alkupiste ja loppupiste vaihtavat rooleja keskenään. Jos $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto (c_1(t), \dots, c_n(t))$ on paloittain sileä parametrisointi, niin vastakäyrällä on parametrisointi $\overleftarrow{\gamma} : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto (c_1(-t), \dots, c_n(-t))$. Ketjusäännön nojalla

$$\overleftarrow{\gamma}'(-t_0) = -\gamma'(t_0),$$

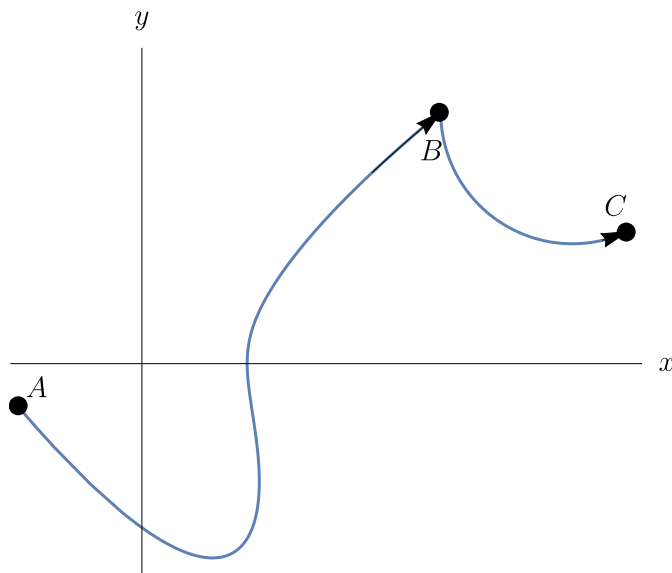
eli vastakäyrän tangenttivektori on alkuperäisen käyrän tangenttivektorin vastavektori. Huomaa, että tässä $\overleftarrow{\gamma}'(-t_0) = \gamma'(t_0)$, eli nämä tangenttivektorit on piirretty samaan pisteeseen.

Vielä useammin tarvitaan ns. *käyrien summaa* (tai *yhdistettyä käyrää*). Jos $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ toteuttavat ehdon $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, eli jos käyrän γ_1 loppupiste yhtyy käyrän γ_2 alkupisteeseen, niin käyrä $\gamma_1 + \gamma_2$ kulkee ensin pitkin käyrää γ_1 ja jatkaa sitten pitkin käyrää γ_2 . Siis

$$\gamma_1 + \gamma_2 : [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)], t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{jos } t \in [a_1, b_1], \text{ ja} \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2), & \text{jos } t \in [b_1, b_1 + (b_2 - a_2)]. \end{cases}$$

Jos tässä γ_1 ja γ_2 olivat paloittain sileitä parametrisointeja, niin sama koskee parametrisointia $\gamma_1 + \gamma_2$. Komponenttifunktioiden jatkuvuuden kannalta oli välttämätöntä, että $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$.

Käyrien summasta käytetään myös merkintää $\gamma_1 \vee \gamma_2$. Kysehän on eräänlaisesta unionista, mitä $\vee$ -merkintä muistuttaa enemmän kuin $+$ -merkintä. Lisäksi summamerkintää käytettäessä on lieviä vaaroja sekaannuksesta. Koska $\mathbb{R}^n$ on vektoriavaruus, niin $\mathbb{R}^n$ -arvoisten funktioiden summa usein määritellään *pisteittäin* $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$. Käyrien summassa tästä EI ole kyse. Lisäksi on pidettävä mielessä, ettei



Kuva 5.3: Jos γ_1 on paloittain sileä käyrä pisteestä A pisteeseen B , ja γ_2 paloittain sileä käyrä pisteestä B pisteeseen C , niin yhdistetty käyrä $\gamma_1 + \gamma_2$ on paloittain sileä käyrä pisteestä A pisteeseen C .

summaa ole määritelty kaikille käyrille, vaan ainoastaan niissä tapauksissa, joissa seuraava käyrää jatkaa edellistä.

Käyrän parametrisointi ei ole yksikäsitteinen. Pidämme kahta sileästi parametrisoitua käyrää samoina, jos niillä on sama jälki ja sama kulkusuunta. Asetamme teknisiä rajoituksia parametrin vaihdolle. Seuraava tulos antaa tarkan määritelmän, ja vetää yhteen parametrinvaihdon ominaisuudet.

Lemma 5.2. *Oletetaan, että $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))$ on paloittain sileä parametrisointi. Oletetaan lisäksi, että $\tau : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ on aidosti kasvava ja koko välillä jatkuvasti derivoituva bijektiivinen funktio. Tällöin $\gamma \circ \tau : u \mapsto (c_1(\tau(u)), c_2(\tau(u)), \dots, c_n(\tau(u)))$ on sekin paloittain sileä parametrisointi. Näitä vastaavat käyrät $\gamma([a, b])$ ja $(\gamma \circ \tau)([\alpha, \beta])$ yhtyvät pistejoukkoina. Koska $\tau(\alpha) = a$ ja $\tau(\beta) = b$, niin näitä parametrisointeja vastaavilla käyrillä on myös sama alkupiste ja sama loppupiste. Niiden tangenttivektorit ovat yhdensuuntaisia kaikissa niissä käyrän pisteissä $\gamma(t), t = \tau(u)$, joissa $\gamma'(t)$ on olemassa, ja $\tau'(u) \neq 0$. Täsmällisemmin:*

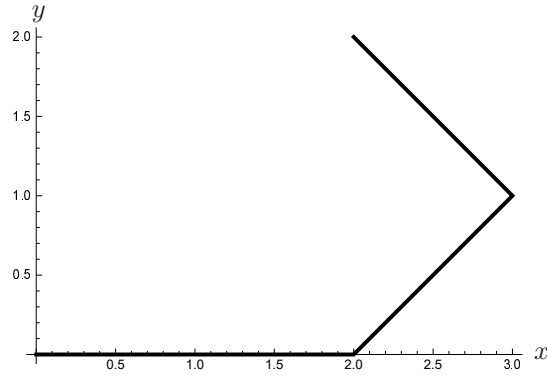
$$(\gamma \circ \tau)'(u) = \tau'(u) \gamma'(\tau(u))$$

kaikille $u \in [\alpha, \beta]$.

Todistus. Koska vaadimme, että τ on aidosti kasvava bijektio, sen on kuvattava välin $[\alpha, \beta]$ päätepisteet välin $[a, b]$ päätepisteiksi esitetyllä tavalla. Tangenttien välinen yhteys seuraa yhden reaaliarvoittujan funktioiden ketjusäännöstä

$$\frac{d(c_i(\tau(u)))}{du} = c'_i(\tau(u)) \cdot \tau'(u),$$

joka on voimassa kaikille $i = 1, 2, \dots, n$, niissä pisteissä joissa esiintyvät derivaatat ovat olemassa. $\square$

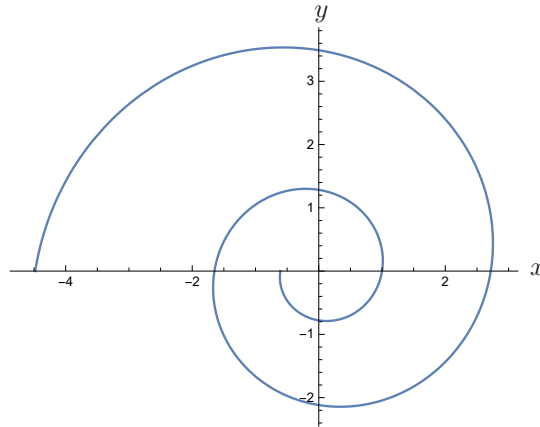


Kuva 5.4: Murtoviiva on luonnostaan paloittain sileästi parametrisoitu käyrä.

Esimerkki 5.3. Kuvan 5.4 murtoviiva on helposti parametrisoitavissa paloittain sileästi. Esimerkiksi funktio $\gamma : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0), & \text{kun } 0 \leq t < 2, \\ (t, t-2), & \text{kun } 2 \leq t < 3, \\ (6-t, t-2), & \text{kun } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

parametrisoi sen. Tässä $\gamma'(t) = (1, 0)$ kun $t \in [0, 2)$, $\gamma'(t) = (1, 1)$ kun $t \in (2, 3)$ ja $\gamma'(t) = (-1, 1)$ kun $t \in (3, 4]$. Käyrällä ei ole tangenttia kärjissä $\gamma(2)$ ja $\gamma(3)$. Toispuoleiset derivaatat niissäkin kuitenkin on.



Kuva 5.5: Napakoordinaattiyhtälön $r = e^{\phi/2\pi}$ välillä $\phi \in [-\pi, 3\pi]$ parametrisoitu käyrä.

Esimerkki 5.4. Napakoordinaattikulma ϕ on usein luonteva parametri tasokäyrälle. Kuvassa 5.5 on napakoordinaattiyhtälön $r = e^{\phi/2\pi}$ kuvaaja välillä $-\pi \leq \phi \leq 3\pi$. Tässä $(x, y) = \gamma(\phi)$

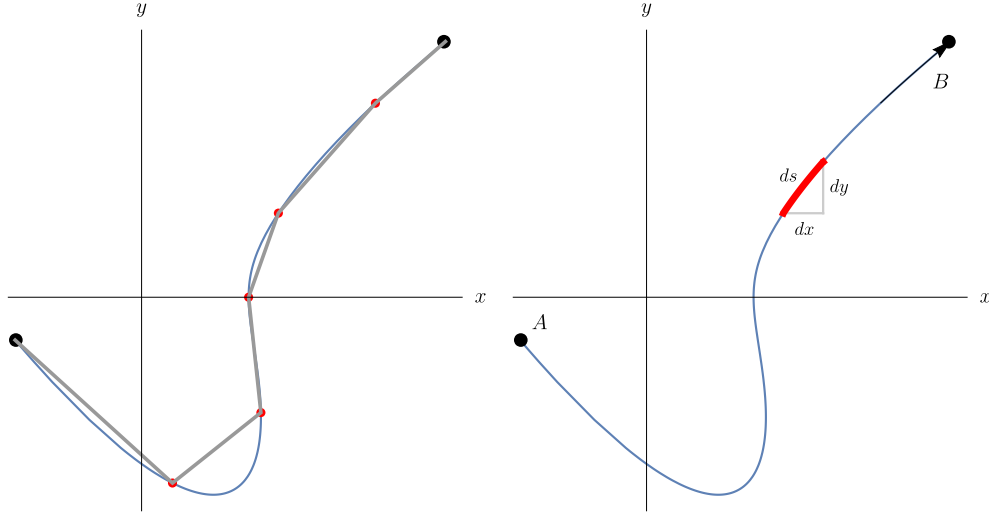
$$\begin{cases} x &= e^{\phi/2\pi} \cos \phi, \\ y &= e^{\phi/2\pi} \sin \phi. \end{cases}$$

Tämän käyrän alkupiste on $(-e^{-1}, 0)$ ja loppupiste $(-e^3, 0)$. Käyrän tangentti pisteessä $\gamma(\phi)$ on

$$\gamma'(\phi) = \frac{e^{\phi/2\pi}}{2\pi} (\cos \phi, \sin \phi) + e^{\phi/2\pi} (-\sin \phi, \cos \phi).$$

5.2 Käyrän pituus

Käsitlemme käyrän pituutta ainoastaan sileässä tapauksessa, eli oletamme parametrisoinnin olevan paloittain jatkuvasti derivoituva. Koska suoran jananpätjän pituus ei ole lainkaan ongelmallinen käsite, on luonteva lähestymistapa jakaa käyrä lyhyisiin "suoriin" osiin.



Kuva 5.6: Sileän käyrän approksimointi murtoviivalla ja kaarialkio $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Jos käyrällämme on paloittain sileä parametrisointi $\gamma = (c_1, c_2, \dots, c_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, niin välin $[a, b]$ jakoa $D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ vastaa käyrän korvaaminen pistejonon $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$ määräämällä murtoviivalla kuten Kuvassa 5.6 vasemmalla. Murtoviivan yksittäiset jananpätkät ovat erotusvektoreita

$$\Delta\gamma(i) = \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}).$$

Tällaisen murtoviivan pituus $L(\gamma, D)$ on tietenkin näiden vektorien pituuksien summa

$$L(\gamma, D) = \sum_{i=1}^m \|\Delta\gamma(i)\|.$$

Toiveena on, että jaon D tihentyessä tällaisten murtoviivojen pituudet lähestyisivät raja-arvona jotakin reaalilukua L . Jos näin on, sanomme, että käyrä γ on *suoristuva*, ja määrittelemme sen pituudeksi $L(\gamma) = L$. Osoitamme, että sileän käyrän tapauksessa asia on aina näin, ja johdamme käyrän pituudelle kaavan määrättynä integraalina. Perustelu on hieman kursorinen.

Oletuksen mukaan voimme jakaa käyrän äärelliseen moneen osaan, joilla parametrisointi jatkuvasti derivoituvaa. Voimme tutkia pituutta yksi tällainen osa kerrallaan tarvittaessa jakoa tihentämällä, joten oletamme yksinkertaisuuden vuoksi funktioiden $c_j(t), j = 1, 2, \dots, n$ olevan jatkuvasti derivoituvia välillä $t \in [a, b]$. Sovelletaan differentiaalilaskennan väliarvolausetta funktioon c_j osavälillä $I_i = [t_{i-1}, t_i]$. DVAL lupaa, että on olemassa luku $\xi_{ij} \in I_i$, jolle

$$c_j(t_i) - c_j(t_{i-1}) = c'_j(\xi_{ij})(t_i - t_{i-1}).$$

Näin ollen

$$\|\Delta\gamma(i)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n c'_j(\xi_{ij})^2(t_i - t_{i-1})^2} = \sqrt{\sum_j c'_j(\xi_{ij})^2(t_i - t_{i-1})}. \quad (*)$$

Kiinnitetään toleranssi $\varepsilon > 0$. Komponenttien derivaattojen neliöt $c'_j(t)^2$, $j = 1, 2, \dots, n$, ovat tasaisesti jatkuvia suljetulla välillä $[a, b]$, joten kunhan jako D on tarpeeksi tiheä, niin kullakin j :n arvolla on voimassa epäyhtälö

$$|c'_j(\xi_{ij})^2 - c'_j(t_i)^2| < \varepsilon^2/n.$$

Korvaamme yhtälössä $(*)$ luvut ξ_{ij} , $j = 1, 2, \dots, n$, kaikki *samalla* luvulla t_i . Näemme, että tiheää jakoa käyttettäessä kaavassa $(*)$ syntyvä virhe on $< \varepsilon(t_i - t_{i-1})$, eli

$$\left| \|\Delta\gamma(i)\| - \sqrt{\sum_j c'_j(t_i)^2(t_i - t_{i-1})} \right| \leq \varepsilon(t_i - t_{i-1}).$$

Laskemalla osavälien I_i kontribuutiot yhteen saamme tulokseksi

$$\left| L(\gamma, D) - \sum_i \sqrt{\sum_j c'_j(t_i)^2(t_i - t_{i-1})} \right| \leq \varepsilon(b - a). \quad (**)$$

Tässä esiintyvä summa on määrättyyn integraaliin

$$\int_{t=a}^b \sqrt{\sum_{j=1}^n c'_j(t)^2} dt$$

ja jakoon D liittyvä Riemannin summa. Jatkuvuuden vuoksi kyseinen integraali on olemassa. Koska voimme valita luvun $\varepsilon > 0$ mielivaltaisen pieneksi, ja jaon D riittävän tiheäksi, niin epäyhtälön $(**)$ nojalla murtoviivojen osamäärät lähestyvät raja-arvoon mainittua integraalia. Olemme perustelleet seuraavan tuloksen.

Lause 5.5. *Oletetaan, että $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on paloittain jatkuvasti derivoituva käyrä. Tällöin käyrällä γ on pituus $L(\gamma)$, ja*

$$L(\gamma) = \int_{t=a}^b \sqrt{\sum_{j=1}^n c'_j(t)^2} dt.$$

Tulos on ehkä helpompi muistaa käyttäen *kaarialkiota* ds . Koska käyrä on sileä, sen infinitesimaalinen pätkä on suora vektori $d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$, jonka pituus

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}$$

n -ulotteisen Pythagoraan lauseen mukaisesti. Kuvassa 5.6 oikealla on kuva 2-ulotteisen käyrän kaarialkiosta.

Tässä $dx_i = c'_i(t)dt$, ja kaava käyrän pituudelle $L = \int ds$ seuraa.

Samalla saamme tangenttivektorin pituudelle lausekkeen

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{c'_1(t)^2 + c'_2(t)^2 + \dots + c'_n(t)^2}$$

ja yhteyden

$$ds = \|\gamma'(t)\| dt.$$

Tarkistetaan ensin, että Lause 5.5 antaa oikean tuloksen ympyrän kaaren pituudelle.

Esimerkki 5.6. Origokeskisellä R -säteisellä ympyrällä on parametrisointi $\gamma(\phi) = (R \cos \phi, R \sin \phi)$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Käyrä on suljettu, sillä $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (R, 0)$. Derivoimalla $dx/d\phi = -R \sin \phi$, $dy/d\phi = R \cos \phi$, mistä

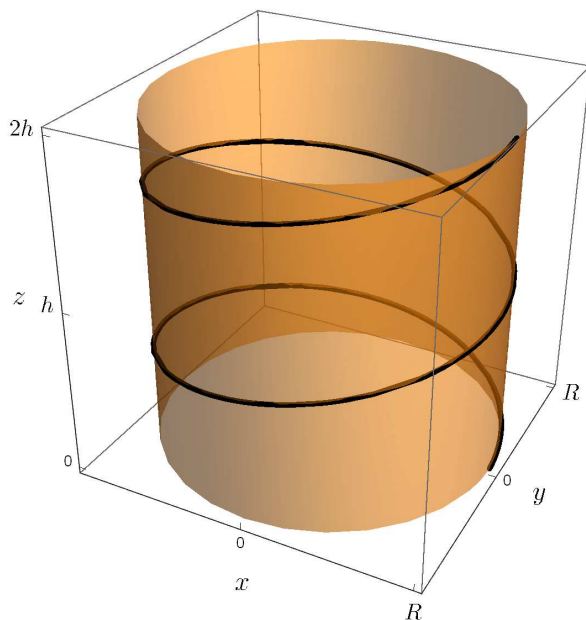
$$x'(\phi)^2 + y'(\phi)^2 = R^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = R^2.$$

Ympyrän kaaren pituudeksi saadaan näin

$$L = \int_{\phi=0}^{2\pi} \sqrt{R^2} d\phi = 2\pi R.$$

Esimerkki 5.7. Yhden reaalimuuttujan funktion $f(x)$ kuvaajalla $y = f(x)$ voimme käyttää x -koordinaattia parametrina, $\gamma(x) = (x, f(x))$. Kunhan f on luokkaa C^1 välillä $x \in [a, b]$, niin tässä $c'_1(x) = dx/dx = 1$ ja $c'_2(x) = dy/dx = f'(x)$. Kuvaajakäyrän pituus L saadaan siis integraalista

$$L = \int_{x=a}^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$



Kuva 5.7: Ruuvikierre- eli *helix*-käyrä.

Esimerkki 5.8. Ruuvikierrekäyrällä (ks. Kuva 5.7) on parametrisointi

$$\begin{cases} x &= R \cos t, \\ y &= R \sin t, \\ z &= \frac{ht}{2\pi}, \end{cases}$$

missä t on parametri, ja h, R käyrän muodon ja koon kiinnittäviä vakioita. Kuvaille vakioiden h ja R geometrinen merkitys ja laske ruuvikierteen yhden kierroksen, $t \in [0, 2\pi]$, pituus L .

Ratkaisu. Huomaamme, että kaikilla parametrin t arvoilla

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2,$$

eli ruuvikierre on lieriön $x^2 + y^2 = R^2$ pinnalla Kuvan 5.7 mukaisesti. Lisäksi trigonometristen funktioiden jaksollisuuden vuoksi kaikilla parametrin t arvoilla on voimassa yhtälöt

$$\begin{cases} x(t+2\pi) &= R \cos(t+2\pi) &= x(t), \\ y(t+2\pi) &= R \sin(t+2\pi) &= y(t), \\ z(t+2\pi) &= \frac{h(t+2\pi)}{2\pi} &= z(t) + h. \end{cases}$$

Nämä tarkoittavat sitä, että aina, kun parametri t kasvaa 2π :n verran, käyrällä siirrytään matkan h verran ylöspäin (lieriön akselin eli tällä kertaa z -akselin suuntaan).

Derivoimalla näemme, että

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 &= R^2 ((-\sin t)^2 + (\cos t)^2) + \frac{h^2}{4\pi^2} \\ &= R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}, \end{aligned}$$

eli parametrilla t riippumaton vakio. Ruuvikierteen yhden kierroksen pituus on näin ollen

$$\begin{aligned} L &= \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\ &= 2\pi \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \\ &= \sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Huomaamme, että L on myös sellaisen suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus, jonka kateetit ovat $2\pi R$ ja h . Tämä on selitettävissä seuraavasti. Kuvittele mielessäsi suorakaiteen muotoinen paperiarkki, jonka sivujen pituudet ovat $2\pi R$ ja h . Kyseisen suorakaiteen lävistäjän pituus on tällöin L . Kyseisellä paperiarkilla voi paperoida R -säteisen ympyrälieriön muotoisen putken, jonka pituus on h . Paperoitaessa arkin lävistäjä seuraa tarkalleen ruuvikierrekäyrää lieriön pinnalla. Huomaa, että lieriötä paperoitaessa arkki ei rypisty (päinvastoin kuin pallon muotoista lahjaa paperoitaessa).

5.3 Käyräintegraali

Oletetaan, että γ on alueessa $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kulkeva tie, ja $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ joukossa A määritelty jatkuva vektorikenttä. Kentän f integraali yli käyrän γ laskee kentän f käyrän γ tangentinsuuntaisten sisätulojen summaa. Tähän käsitteeseen törmätään muun muassa fysiikassa, kun lasketaan voimakentän käyrää γ pitkin liikkuvaan kappaleeseen tekemä työ, mutta käsite on yleisempi.

Näihin liittyvät differentiaalit esiintyvät kirjallisuudessa usein merkinnöin: paikkavektorin $\mathbf{r}$ differentiaali $d\mathbf{r}$ (etenkin fysiikassa) sekä pienen kaarenpalan pituus $ds = \|d\mathbf{r}\|$. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ käytetään $d\mathbf{r}$:stä myös (vektori)merkintää $d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$. Kun $n = 2$ tai $n = 3$, ja tavalliset karteesiset koordinaatit ovat käytössä, niin $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ tai $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ niin ikään tarkoittavat samaa.

Jos $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ on paloittain sileä parametrisointi, ja $D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ on jokin välin $[a, b]$ jako, niin voimme muodostaa tähän jakoon liittyviä Riemannin summia

$$S(D, \xi) = \sum_{i=1}^k (f(\gamma(\xi_i)), \Delta\gamma_i),$$

missä luvut $\xi_i, i = 1, 2, \dots, k$, valitaan satunnaisesti väliltä $[t_{i-1}, t_i]$. Käyräintegraali $\int_\gamma f$ määritellään siten näiden Riemannin summien raja-arvona jakoa D tihennettäessä (mikäli tällainen lukujen ξ_i valinnasta riippumaton raja-arvo on olemassa). Voisimme yrittää myös muodostaa tähän jakoon liittyvät ylä- ja alasummat, jolloin annamme lukujen ξ_i käydä läpi koko osavälin $[t_{i-1}, t_i]$ ja määräämme sisätulon $(f(\gamma(\xi_i)), \Delta\gamma_i)$ infimumin ja supremumin kullakin osavälillä, ja muodostaa vastaavat ylä- ja alasummat. Tähän liittyy kuitenkin se periaatteellinen ongelma, ettei jaon tihentäminen yleensä kiellä sitä, etteikö yläsumma voisi kasvaa! Tämä pulma voidaan kiertää paloittaisen sileyden avulla, mutta sivuutamme yksityiskohdat. Toteamme yksinkertaisesti, että paloittain sileässä tapauksessa voimme käyttää yhteyttä $\Delta\gamma(i) \approx \gamma'(t_{i-1})\Delta t_i$. Tällöin

$$\sum_{i=1}^k (f(\gamma(\xi_i)), \Delta\gamma(i)) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(\xi_i))(c_j(t_i) - c_j(t_{i-1})).$$

Tässä koordinaattia x_j vastaavassa summassa

$$\sum_{i=1}^k f_j(\gamma(\xi_i))(c_j(t_i) - c_j(t_{i-1})) \quad (*)$$

on differentiaalilaskennan väliarvolauseen ja funktion c_j derivoituvuuden nojalla kullakin osavälillä olemassa sellainen luku $\xi_{ij} \in (t_{i-1}, t_i)$ jolle $c_j(t_i) - c_j(t_{i-1}) = c'_j(\xi_{ij})(t_i - t_{i-1})$. Kentän f komponenttifunktioiden f_j tasaisen jatkuvuuden vuoksi voimme valita $\xi_i = \xi_{ij}$ (periaate on sama kuin käyrän pituutta määriteltäessä, mutta sivuutamme yksityiskohdat). Tällöin summa $(*)$ muuttuu summaksi

$$\sum_{i=1}^k f_j(\gamma(\xi_i))c'_j(\xi_{ij})(t_i - t_{i-1}). \quad (**)$$

Näemme, että tämä on funktion $g_j(t) = f_j(\gamma(t))c'_j(t)$ välin $t \in [a, b]$ jakoon D liittyvä Riemannin summa. Erityisesti se on funktion $g_j(t)$ tähän jakoon liittyvien ylä- ja alasummien välissä. Paloittainen sileys takaa, että funktio $g_j(t)$ on paloittain jatkuva, ja siis integroitava yli välin $[a, b]$. Näin ollen summat $(**)$ lähestyvät integraalia

$$\int_{t=a}^b f_j(\gamma(t))c'_j(t) dt$$

jaon tihentyessä. Laskemalla yhteen eri koordinaattien kontribuutiot päädymme seuraavan tulokseen, jota voimme käyttää myös käyräintegraalin määritelmänä valitsemassamme rajoitetussa kontekstissa.

Lause 5.9. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva vektorikenttä, ja $\gamma = (c_1, c_2, \dots, c_n) : [a, b] \rightarrow A$ paloittain sileä käyrä. Tällöin

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=a}^b \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) c'_j(t) dt.$$

Tästä käyräintegraalista käytetään myös merkintää

$$\int_{\gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n,$$

missä integrandina esiintyy *differentiaalimuoto* $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$ (niistä enemmän kurssilla *Differentiaaligeometria*). Koska tämä voidaan formaalisti ajatella sisätulona

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n = f \cdot d\mathbf{r},$$

niin merkintä

$$\int_{\gamma} f \cdot d\mathbf{r}$$

on myös käytössä (ja 2- tai 3-ulotteisissa tilanteissa sangen havainnollinen!).

Huomautus 5.10. Käyräintegraali on sikäli hyvinmääritelty, ettei se riipu käyrän parametrisoinnista. Jos nimittäin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on erään käyrän paloittain sileä parametrisointi, ja $\tau : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ on derivoituva parametrinvaihtofunktio, niin ketjusäännön nojalla

$$\frac{d(c_j \circ \tau)(u)}{du} = c'_j(\tau(u)) \cdot \tau'(u)$$

välin $u \in [\alpha, \beta]$ niissä pisteissä, joissa c_j on derivoituva (eli äärellistä poikkeusjoukkoa lukuun ottamatta kaikkialla). Näin ollen sijoitus $t = \tau(u)$ muuttaa integraalin

$$\int_{t=a}^b \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) c'_j(t) dt$$

integraaliksi

$$\int_{u=\alpha}^{\beta} \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(\tau(u))) c'_j(\tau(u)) \tau'(u) du = \int_{u=\alpha}^{\beta} \sum_{j=1}^n f_j(\tilde{\gamma}(u)) \tilde{c}'_j(u) du,$$

mikä määritelmän nojalla on vektorikentän f käyräintegraali yli paloittain sileän käyrän

$$\tilde{\gamma} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n),$$

missä $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ ja $\tilde{c}_j = c_j \circ \tau$ saatiin parametrinvaihtoa τ vastaavina yhdistettyinä funktioina.

Analogisesti yhden muuttujan määrättyjä integraaleja koskevan säännön $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ kanssa saamme käyrien summan käyräintegraaleille säännön

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Luonteeltaan samanlainen havainto on

$$\int_{\gamma} f = - \int_{\bar{\gamma}} f.$$

Tämä on käyräintegraalien vastine yhden muuttujan määrättyjä integraaleja koskevalle säännölle $\int_a^b f = - \int_b^a f$.

Esimerkki 5.11. Lasketaan vakiokentän $f = (1, 1)$ käyräintegraali yli Kuvan 5.4 murtoviivan.

Ratkaisu. Murtoviivalla on parametrisointi $\gamma : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0), & \text{kun } 0 \leq t < 2, \\ (t, t-2), & \text{kun } 2 \leq t < 3, \\ (6-t, t-2), & \text{kun } 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Näin ollen

$$(c'_1(t), c'_2(t)) = \begin{cases} (1, 0), & \text{kun } 0 < t < 2, \\ (1, 1), & \text{kun } 2 < t < 3, \\ (-1, 1), & \text{kun } 3 < t < 4. \end{cases}$$

Edelleen sisätulo $(f, \gamma'(t))$ saa arvot 1, 2 ja 0 vastaavilla parametrin t väleillä. Etsitty käyräintegraali on siis

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_{\gamma} dx + dy \\ &= \int_{t=0}^2 1 \, dt + \int_{t=2}^3 2 \, dt + \int_{t=3}^4 0 \, dt \\ &= (2-0) \cdot 1 + (3-2) \cdot 2 + (4-3) \cdot 0 = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

Esimerkki 5.12. Lasketaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektorikentän $f = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2))$ integraali

$$\int_{\gamma} \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}$$

yli yksikköympyrän $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$.

Ratkaisu. Käyrällä γ on $x = \cos t$, joten $dx = -\sin t \, dt$. Vastaavasti $y = \sin t$, joten $dy = \cos t \, dt$. Tiellä γ on tietenkin $x^2 + y^2 = 1$. Näin ollen

$$x \, dy - y \, dx = \cos^2 t \, dt - (-\sin t)(\sin t) \, dt = (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = dt.$$

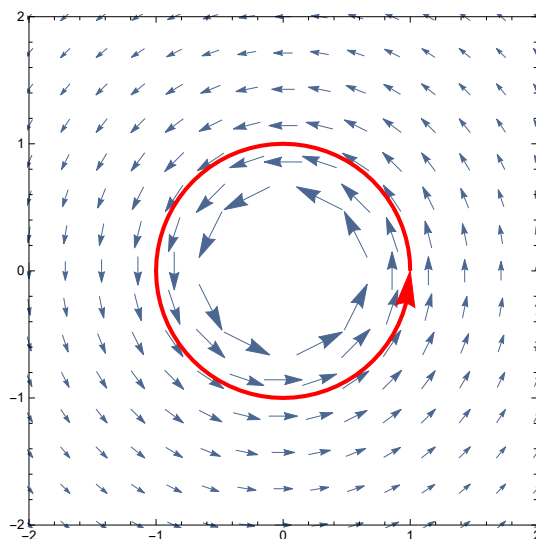
Tämän integrointi on siis helppo

$$\int_{\gamma} f = \int_{t=0}^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Kuvasta 5.8 näemme, että vektorikenttä ‘pyörii kaikkialla samaan suuntaan kuin yksikköympyräpolku’. Tämä näkyy siinä, että integrandimme on positiivinen (jopa vakio 1) koko integroimistiellä.

Palaamme tähän käyräintegraalin jatkossa. Se on ehkä tärkein *Funktioteorian* kurssilla vastaan tulevista käyräintegraaleista, ja ansaitsee myös tällä kurssilla saamansa ylimääräisen huomion.

Esimerkissä 5.11 tavallaan laskimme erään käyräintegraalin yli jananpätkien $\gamma_1 : (0, 0) \rightarrow (2, 0)$, $\gamma_2 : (2, 0) \rightarrow (3, 1)$ ja $\gamma_3 : (3, 1) \rightarrow (2, 2)$ summakäyränä $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ saatavan murtoviivan.



Kuva 5.8: Vektorikenttä $(-y, x)/(x^2 + y^2)$ ja yksikköympyrä

Huomautus 5.13. Jos käyrä $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on sulkeutuva, eli $\gamma(a) = \gamma(b)$, niin tätä tärkeää erikoistapausta korostetaan usein käyräintegraalin merkinnässä lisäämällä sen päälle ympyrä:

$$\int_{\gamma} f = \oint_{\gamma} f.$$

Tällöin lukijaa automaattisesti muistutetaan siitä, että integraali on yli suljetun käyrän.

5.4 Greenin lause tasossa

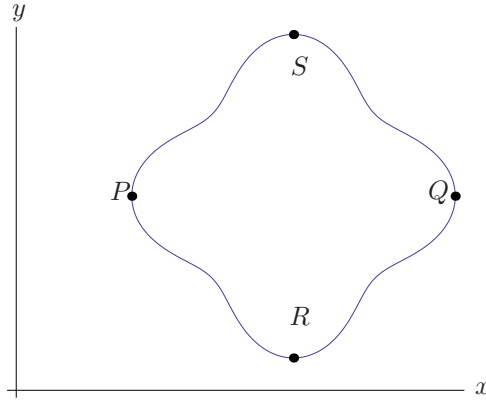
Tarkastelemme seuraavassa tarkemmin käyräintegraaleja tasossa $\mathbb{R}^2$. Osoittautuu, että vektorikentän käyräintegraali yli Jordanin käyrän yhtyy erään funktion integraaliin yli kyseisen käyrän sisäalueen. Tulos yleisty n -ulotteiseen avaruuteen ns. Stokesin lauseeksi — siitä enemmän kurssilla *Differentiaaligeometria*.

Greenin lause tasossa väittää seuraavaa.

$$\int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial A} g dx + f dy.$$

Tässä A on tasoalue. Tällä kurssilla vaadimme siltä enemmän kuin mitä Seuraus 3.23 edellytti. Vaadimme nimittäin, että alueen A reunan osina esiintyvät käyrät ovat paloittain sileitä. Tämä tietenkin siksi, ettemme törmäisi esiintyvän käyräintegraalin olemassaoloon liittyviin ongelmiin. Erityistä huomiota kohdistamme (paloittain sileän) reunakäyrän ∂A kulkusuuntaan. Yleisperiaatteena on, että reunaa tulee kulkea siten, että alueen A sisäosa on kulkusuuntaan katsottuna vasemmalla.

Todistamme Greenin lauseen muutamissa erikoistapauksissa. Todistuksen yksityiskohdat riippuvat paljolti alueen muodosta ja *topologiasta* (karkeasti ottaen mahdollisista rei'istä, niiden lukumäärästä ja sijainnista toisiinsa). Emme yritäkään todistaa yleisintä mahdollista versiota. Tavoitteena on antaa lukijalle mielikuva tekniikasta, jolla yleistys ainakin monireikäisille ja muille erikoisen muotoisille alueille voidaan tehdä.



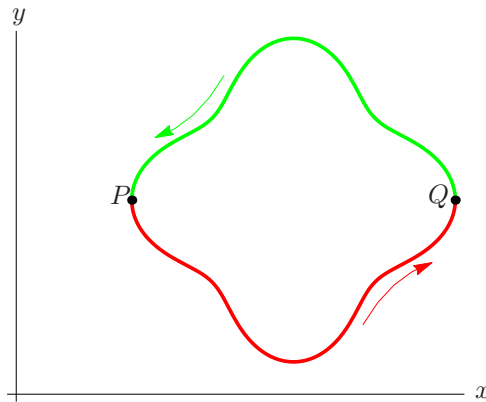
Kuva 5.9: Yksinkertainen tasoalue, jonka reuna leikkaa koordinaattiakselin suuntaista suoraa enintään kahdessa pisteessä.

Lause 5.14. Oletetaan, että A on sellainen tason osajoukko, jonka yläreunalla ja alareunalla y on x :n derivoituva funktio, sekä vasemalla ja oikealla reunalla puolestaan x on y :n derivoituva funktio:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \in [c, d], x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\} \end{aligned}$$

missä $y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $x_1, x_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ovat derivoituvia funktioita, ja lisäksi $y_1 \leq y_2$, $y_1(a) = y_2(a)$, $y_1(b) = y_2(b)$ ja $x_1 \leq x_2$, $x_1(c) = x_2(c)$, $x_1(d) = x_2(d)$ tarkasteluväleillä, ks. Kuva 5.9. Osoitetaan, että Greenin lause on voimassa tällaiselle alueelle A .

Todistus. Funktio $y_1(x)$ määrittää alueen alareunan, $y_2(x)$ yläreunan, $x_1(y)$ vasemman reunan ja $x_2(y)$ oikean. Kuvassa siis $P = (a, y_1(a)) = (a, y_2(a))$, $Q = (b, y_1(b)) = (b, y_2(b))$, $R = (x_1(c), c) = (x_2(c), c)$, $S = (x_1(d), d) = (x_2(d), d)$. Lasketaan funktion $-\partial g / \partial y$ integraali yli alueen A . Käytetään ala- ja yläreunoista

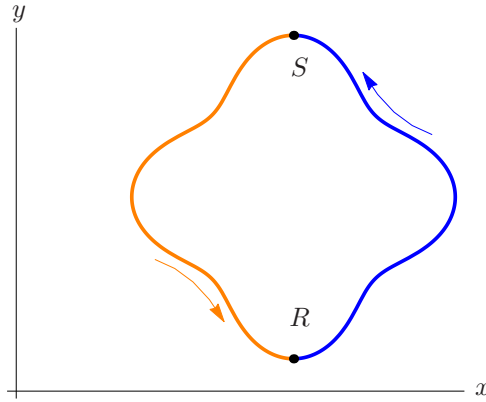


Kuva 5.10: Yksinkertaisen alueen reuna jaettuna ylä- ja alareunaksi

merkintöjä: $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t, y_1(t))$, $\gamma_2 : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (-t, y_2(-t))$.

Kummallakin reunalla t kasvaa Kuvan 5.10 nuolen suuntaan. Tässä

$$\begin{aligned}
\int_A \left(-\frac{\partial g}{\partial y}\right) dx dy &= \int_{x=a}^b \left(- \int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) dx \\
&= \int_{x=a}^b \left(- \int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} g(x, y) \right) dx \\
&= \int_{x=a}^b (g(x, y_1(x)) - g(x, y_2(x))) dx \\
&= \int_{t=a}^b g(\gamma_1(t)) dt + \int_{t=-b}^{-a} g(\gamma_2(t)) dt \\
&= \int_{\gamma_1} g(x, y) dx + \int_{\gamma_2} g(x, y) dx.
\end{aligned}$$



Kuva 5.11: Yksinkertaisen alueen reuna jaettuna vasemmaksi ja oikeaksi reunaksi

Lasketaan sitten funktion $\partial f / \partial x$ integraali yli alueen A . Käytetään oikeasta ja vasemmasta reunasta merkintöjä: $\gamma_3 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_3(t) = (x_2(t), t)$, $\gamma_4 : [-d, -c] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_4(t) = (x_1(-t), -t)$.

Kummallakin reunalla t kasvaa Kuvan 5.11 nuolen suuntaan.

Tässä puolestaan

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy &= \int_{y=c}^d \left(\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right) dy \\
&= \int_{y=c}^d \left(\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \right) dy \\
&= \int_{y=c}^d (f(x_2(y), y) - f(x_1(y), y)) dy \\
&= \int_{t=c}^d f(\gamma_3(t)) dt + \int_{t=-d}^{-c} f(\gamma_4(t)) dt \\
&= \int_{\gamma_3} f(x, y) dy + \int_{\gamma_4} f(x, y) dy.
\end{aligned}$$

Polkuserumat $\gamma_2 + \gamma_1$ ja $\gamma_4 + \gamma_3$ muodostavat kumpikin alueen reunakäyrän (sulkeutuva!) positiiviseen kiertosuuntaan — toinen alkaen ja päättyen pisteestä P , toinen alkaen ja päättyen pisteestä R .

Harjoitustehtävänä voit osoittaa, että käyräintegraalin arvo yli suljetun käyrän ei riipu alkupisteen (=loppupisteen) valinnasta. Koska $\partial A = \gamma_2 + \gamma_1$ ja $\partial A = \gamma_4 + \gamma_3$, niin laskemalla yhteen yllä saadut integraalit saadaan Greenin lause yksinkertaiselle alueelle

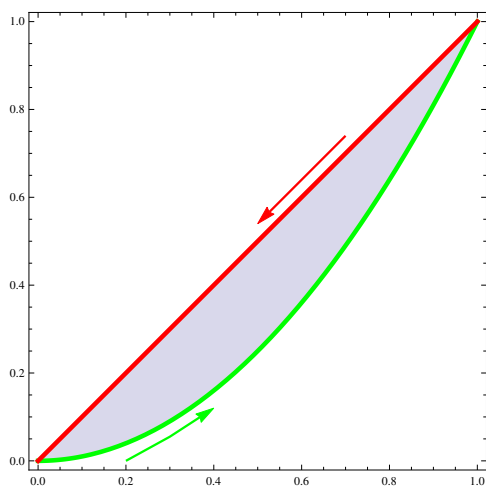
$$\int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} g dx + f dy.$$

□

Huomautus 5.15. Lauseen 5.14 tilanteessa reunakäyrä ∂A kuljetaan positiiviseen kiertosuuntaan alueen A jäädessä sen sisälle. Niin sanottu *Jordanin käyrälause* sanoo, että Jordanin käyrä jakaa tason aina sisä- ja ulkoalueeseen. Tämän ‘ilmeisen’ faktan todistaminen on yllättävän hankalaa, ja vaatii esimerkiksi algebrallisen topologian koneistoa. Emme kiinnitä tällä kurssilla huomiota tähän liittyvään problematiikkaan, sillä esiintyvissä esimerkkitalanteissa tämä on helposti tarkistettavissa.

Esimerkki 5.16. Tarkistetaan Greenin lauseen voimassaolo, kun $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $g(x, y) = x + y$, ja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}.$$



Ratkaisu. Nyt

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 2x + y - 1,$$

joten

$$\begin{aligned} \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x (2x + y - 1) dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left[2xy + y^2/2 - y \right]_{y=x^2}^x dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(-x + \frac{7x^2}{2} - 2x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Alareunalla $\gamma_1(t) = (t, t^2)$, $dx = dt$, $dy = 2t dt$, $f(\gamma_1(t)) = t^2 + t^3 + t^4$ ja $g(\gamma_1(t)) = t + t^2$, joten

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} g dx + f dy &= \int_{t=0}^1 ([t + t^2] \cdot 1 + [t^2 + t^3 + t^4] \cdot 2t) dt \\ &= \int_{t=0}^1 (2t^5 + 2t^4 + 2t^3 + t^2 + t) dt = 31/15.\end{aligned}$$

ja yläreunalla $\overleftarrow{\gamma}_2(t) = (t, t)$, $dx = dy = dt$, $f = 3t^2$, $g = t^2$, ja

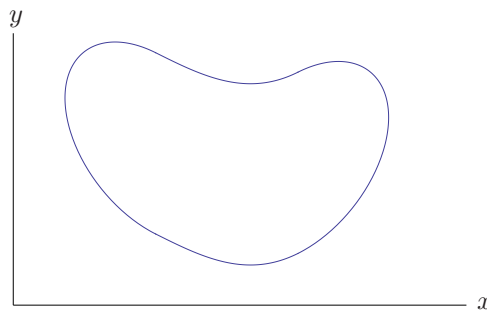
$$\int_{\gamma_2} g dx + f dy = - \int_{t=0}^1 (3t^2 + 2t) dt = -2.$$

Siis myös

$$\int_{\gamma} g dx + f dy = \frac{31}{15} - 2 = \frac{1}{15}.$$

- Toistamalla Lauseen 5.14 todistuksessa tehdyt laskut nähdään, ettei haittaa vaikka jollakin reunan osalla olisikin x tai y -koordinaatti vakio. Se muuttaa hieman laskun yksityiskohtia: joko y_1, y_2 tai x_1, x_2 -pari eivät saa jommassa kummassa reunapisteessä samoja arvoja, mutta tämä ei haittaa, koska vaakasuoralla (vast. pystysuoralla) osuudella $dy = 0$ (vast. $dx = 0$). Yksityiskohdat harjoitustehtävänä.
- Monimutkaisemmat alueet voidaan käsitellä jakamalla ne yksinkertaisiin osiin, joille Greenin lause on jo todistettu. Tällöin lisätään väliaikaisesti reunakäyrään ylimääräisiä osia, jotka kuljetaan kahdesti, kerran kumpaankin suuntaan, jolloin näiden ylimääräisten osien vaikutus käyräintegraaliin kumoutuu.

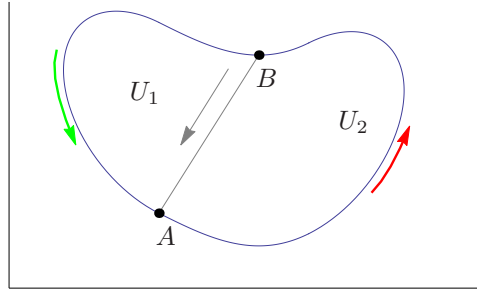
Esimerkki 5.17. Selitä, miksi Greenin lause on voimassa myös Kuvan 5.12 alueelle U , vaikka sen reuna ei jakaudukaan vasempaan ja oikeaan reunaan kuten Lauseessa 5.14.



Kuva 5.12: Mutkikkaampi alue, jota koordinaattiakselin suuntainen suora voi leikata useammassa kuin kahdessa pisteessä

Ratkaisu. Halkaistaan alue janalla $L(A, B)$ kahteen osaan U_1 ja U_2 Kuvan 5.13 Tässä U_1 ja U_2 molemmat ovat ‘yksinkertaisia’.

Merkitään: kaari $A \rightarrow B = \gamma_1$, kaari $B \rightarrow A = \gamma_2$, jana $BA = \gamma_3$. Tällöin yhdistetty polku $\gamma_3 + \gamma_1$ on alueen U_2 reuna. Vastaavasti $\overleftarrow{\gamma}_3 + \gamma_2$ on alueen U_1 reuna (positiiviseen kiertosuuntaan).



Kuva 5.13: Mutkikkaamman alueen jakaminen yksinkertaisiin palasiin

Lyhennetään $h = \partial f / \partial x - \partial g / \partial y$ ja $\omega = g dx + f dy$. Greenin lauseen yksinkertaista aluetta koskevan version mukaan

$$\int_{U_2} h = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_3} \omega$$

ja

$$\begin{aligned} \int_{U_1} h &= \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3^+} \omega \\ &= \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_3} \omega. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \int_U h &= \int_{U_2} h + \int_{U_1} h \\ &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_3} \omega - \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_2} \omega \\ &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega \\ &= \int_{\gamma_2 + \gamma_1} \omega. \end{aligned}$$

Tässä yhdistetty polku $\gamma_2 + \gamma_1$ on alueen U reuna positiiviseen suuntaan kierrettynä.

Huomautus 5.18. Esimerkin 5.17 tulos yleistyy tilanteeseen, jossa A on Jordanin käyrän rajaama tason osa, jolloin kyseinen käyrä muodostaa reunan ∂A . Greenin lause tasossa yleistyy myös alueille, joiden keskellä on yksi tai useampi reikä. Tällöin reuna muodostuu useammasta Jordanin käyrästä, ja meidän on kiinnitettävä erityistä huomiota reunan kiertosuuntaan. Esimerkkejä tästä luennoilla.

Käsitlemme tässä yhteydessä Greenin lauseen soveltamista tasoalueen pinta-alan laskemisessa. Ei ehkä niin yllättäen tasoalueen pinta-ala voidaan määrätä laskemalla sopiva käyräintegraali sen reunan yli. Jos nimittäin funktiot $f(x, y)$ ja $g(x, y)$ toteuttavat ehdon

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

koko tasossa, niin tällöin alueen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ pinta-ala saadaan integraalista

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_A 1 = \int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{\partial A} g(x, y) dx + f(x, y) dy, \end{aligned}$$

kunhan reunan ∂A osat suunnastetaan Greenin lauseen edellyttämällä tavalla.

- Valinta $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = -y$ johtaa mm. koulusta tuttuun tasoalueen pinta-alan kaavaan, missä integroidaan muuttujan x suhteen.
- Valinta $f(x, y) = x$, $g(x, y) = 0$ johtaa kaavaan missä integrointi tapahtuu y :n suhteen.
- Symmetrisempi valinta $f(x, y) = x/2$, $g(x, y) = -y/2$ johtaa kaavaan

$$m(A) = \frac{1}{2} \int_{\partial A} x dy - y dx.$$

Esimerkki 5.19. Pitkin x -akselia vierivä R -säteinen ympyrä piirtää sykloidiksi kutsutun käyrän. Jos merkitään t :llä ympyrän pyörähtämää kulmaa, niin syklodin parametrisoinniksi $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ saadaan

$$x(t) = R(t - \sin t), \quad y(t) = R(1 - \cos t).$$

Sykloidi koskettaa x -akselia pisteissä $(0, 0)$ ja $(2R\pi, 0)$ vastaten parametrin vaihteluväliä $t \in [0, 2\pi]$. Laske syklodin tällä välillä olevan kaaren ja x -akselin rajaaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu. Laskettavan alueen reuna muodostuu kahdesta osasta. Palanen x -akselia origosta pisteeseen $(2R\pi, 0)$ ja sen jälkeen palataan syklodin kaarta oikealta vasemmalle. Vaakasuoralla pätkällä $y = 0$, joten kannattaa käyttää vaihtoehtoa

$$m(A) = \int_{\partial A} (-y) dx = \int_{\gamma} y dx.$$

Koska $dx = R(1 - \cos t) dt$ vastaukseksi saadaan

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_{\gamma} y dx \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} R^2 (1 - \cos t)^2 dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} R^2 (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = R^2 (2\pi - 0 + \pi) \\ &= 3\pi R^2. \end{aligned}$$

Napakoordinaatteja käytettäessä symmetrisellä differentiaalimuodolla

$$\omega = \frac{1}{2} (x dy - y dx)$$

on muutama etu. Ensinnäkin, käytettäessä suuntakulmaa ϕ parametrina käyrällä $r = r(\phi)$ on tuttu parametrisointi

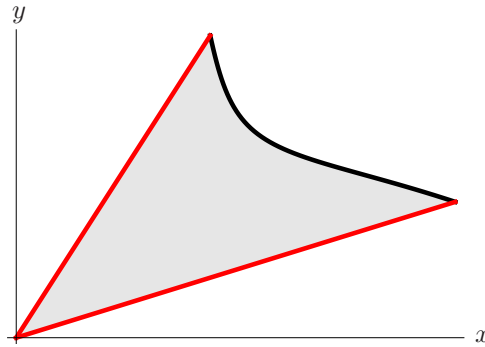
$$x = r \cos \phi = r(\phi) \cos \phi, \quad y = r \sin \phi = r(\phi) \sin \phi.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2}(x dy - y dx) = \frac{1}{2}[r^2 \cos^2 \phi + rr' \cos \phi \sin \phi \\ &\quad - (r \sin \phi)r(-\sin \phi) - rr' \sin \phi \cos \phi] d\phi \\ &= \frac{1}{2}r^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2}r^2 d\phi. \end{aligned}$$

Differentiaali muodolla ω on lisäksi se ominaisuus, että origosta lähtevällä säteellä $x = t \cos \alpha$, $y = t \sin \alpha$, $t \geq 0$, α kiinteä, se häviää. Nimittäin

$$x dy - y dx = (t \cos \alpha \sin \alpha - t \sin \alpha \cos \alpha) dt = 0.$$



Kuva 5.14: Napakoordinaattikäyrän $r = r(\phi)$ sektorissa $\phi \in [\alpha, \beta]$ rajaama alue

Seuraus 5.20. Oletetaan, että napakoordinaattikäyrä $r = r(\phi)$ ja säteet $\phi = \alpha$ ja $\phi = \beta$ rajaavat tasoalueen A , ks. Kuva 5.14. Oletetaan lisäksi, että $r(\phi) \geq 0$ tarkasteluvälillä. Tällöin

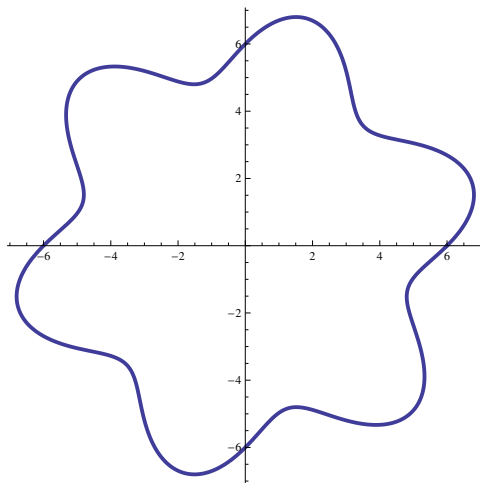
$$m(A) = \frac{1}{2} \int_{\phi=\alpha}^{\beta} r^2(\phi) d\phi.$$

Todistus. Aluetta A rajaavat kulmia α ja β vastaavat säteet (Kuvassa 5.14 punaisia) ja käyrä $r = r(\phi) \geq 0$ (musta), joka välillä $\phi \in [\alpha, \beta]$ saa ei-negatiivisia arvoja. Greenin lauseen nojalla sen pinta-alaksi saadaan

$$\begin{aligned} m(A) &= \frac{1}{2} \int_{\partial A} x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{säde } \phi=\alpha} + \frac{1}{2} \int_{\text{käyrä } r=r(\phi), \alpha \leq \phi \leq \beta} r^2 d\phi + \frac{1}{2} \int_{\text{säde } \phi=\beta} \leftarrow \\ &= \frac{1}{2} \int_{\phi=\alpha}^{\beta} r^2(\phi) d\phi. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 5.21. Selitä, miksi napakoordinaattiyhtälö $r = 6 + \sin 6\phi$ rajaa Kuvan 5.15 mukaisen piparinmuotoisen alueen ja laske sen pinta-ala.



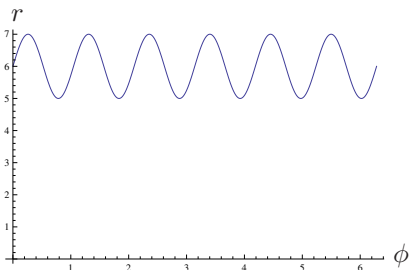
Kuva 5.15: Napakoordinaattikäyrän $r = 6 + \sin 6\phi$ rajaama alue.

Ratkaisu. Funktion $r = 6 + \sin 6\phi$ kuvaaja ϕr -tasossa olisi normaali Kuvan 5.16 mukainen sinikäyrä, joka heilahtelee välillä $r \in [5, 7]$. Vastaava napakoordinaattikäyrä heilahtelee etäisyydellä $r \in [5, 7]$ origosta. Koska 2π on funktion $\sin 6\phi$ eräs jakso, napakoordinaattikäyrä alkaa toistaa itseään täyden kierroksen jälkeen. Erityisesti koska $r(0) = 6 = r(2\pi)$, niin suuntakulmat $\phi = 0$ ja $\phi = 2\pi$ molemmat vastaavat pistettä $(x, y) = (6, 0)$ Kuvassa 5.15.

Piparin alaksi tulee näin

$$\begin{aligned} m(P) &= \frac{1}{2} \int_{\phi=0}^{2\pi} (6 + \sin 6\phi)^2 d\phi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (36 + 12 \sin 6\phi + \sin^2 6\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2} (72\pi + 0 + \pi) = \frac{73\pi}{2}. \end{aligned}$$

6-säteisen ympyrän ala olisi 36π . Pipari on siis aavistuksen verran isompi. Tämä ei ole kuvasta katsoen



Kuva 5.16: Funktion $r = 6 + \sin 6\phi$ kuvaaja (ϕ, r) -tasossa

erityisen ilmeistä mutta ei myöskään yllättävää.

5.5 Potentiaaleista

Esimerkki 5.22. Käyrillä $\gamma_1(t) = (1-t, t)$, $t \in [0, 1]$, $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$, $\gamma_3(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, \pi/2]$ on kaikilla alkupisteenä $(1, 0)$ ja loppupisteenä $(0, 1)$. Lasketaan käyräintegraalit

$$\int_{\gamma_k} x^2 dx + y dy$$

kaikille teille γ_k , $k = 1, 2, 3$.

Ratkaisu. Tiellä γ_1 on $dx = -dt$, $dy = dt$, joten

$$\int_{\gamma_1} x^2 dx + y dy = \int_{t=0}^1 [-(1-t)^2 + t] dt = \left|_{t=0}^1 \left(\frac{(1-t)^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right) \right| = 0.$$

Tiellä γ_2 on $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$, joten

$$\int_{\gamma_2} x^2 dx + y dy = \int_{t=0}^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t + \sin t \cos t) dt = \left|_{t=0}^{\pi/2} \left(\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\sin^2 t}{2} \right) \right| = \frac{1}{6}.$$

Tiellä γ_3 puolestaan on $dx = -3\cos^2 t \sin t dt$ ja $dy = 3\sin^2 t \cos t dt$, ja

$$\int_{\gamma_3} x^2 dx + y dy = \int_{t=0}^{\pi/2} (-3\cos^8 t \sin t + 3\sin^5 t \cos t) dt = \left|_{t=0}^{\pi/2} \left(\frac{3\cos^9 t}{9} + \frac{3\sin^6 t}{6} \right) \right| = \frac{1}{6}.$$

Esimerkki 5.23. Lasketaan myös käyräintegraalit $\int_{\gamma} x dx + x dy$ yli edellisen tehtävän käyrien γ_1 ja γ_2 .

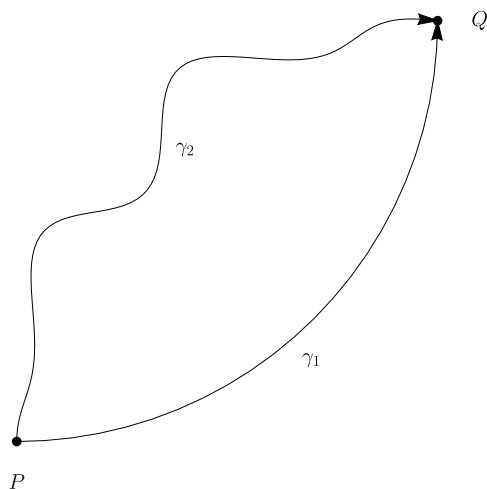
Ratkaisu. Käyrällä γ_1 on $dx + dy = -dt + dt = 0$, joten käyräintegraali saa arvon nolla. Käyrällä γ_2 sitä vastoin

$$\int_{\gamma_2} x dx + x dy = \int_{t=0}^{\pi/2} (-\sin t \cos t + \cos^2 t) dt = \frac{\pi - 2}{4}.$$

Näyttäisi siltä, että joillakin vektorikentillä on sellainen ominaisuus, että niiden käyräintegraali riippu ainoastaan käyrän päätepisteistä eikä lainkaan kuljetusta tiestä. Pehdymme tähän ongelmaan. Ilmiö on keskeisessä roolissa esimerkiksi mekaniikassa ja sähköopissa, ja näin terminologiakin on osin lainattu fysiikasta.

Määritelmä 5.24. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin joukko, ja että vektorikenttä $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ on luokkaa C^1 joukossa A . Sanotaan, että kentän f käyräintegraalit ovat *riipumattomia tiestä alueessa* A , jos kaikille teille $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow A$ ja $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow A$ joiden alku- ja loppupisteet yhtyvät, on voimassa

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$



Kuva 5.17: Jos γ_1 ja γ_2 ovat kaksi tietä pisteestä P pisteeseen Q , niin $\gamma_1 + \overleftarrow{\gamma_2}$ ja $\overleftarrow{\gamma_1} + \gamma_2$ ovat sulkeutuvia teitä. Ensin mainitulla alku- ja päätepisteenä P , jälkimmäisellä Q .

Huomautus 5.25. Käyräintegraalin riippumattomuus tiestä annetussa alueessa A on ekvivalenttia sen kanssa, että integraalit yli suljettujen teiden häviävät. Jos nimittäin γ_1 ja γ_2 ovat kaksi tietä A :ssa pisteestä P pisteeseen Q , niin tällöin summakäyrä $\gamma_1 + \overleftarrow{\gamma_2}$ on sulkeutuva käyrä (P on sen alku- ja loppupiste), vrt. Kuva 5.17 Yhteys perustuu havaintoon

$$\int_{\gamma_1 + \overleftarrow{\gamma_2}} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f.$$

Jos integraalit yli suljettujen käyrien häviävät, niin tässä vasemmalla puolella on nolla, jolloin oikealta puolelta voidaan ratkaista $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

Kääntäen, jokainen sulkeutuva käyrä voidaan esittää tällä tavalla kahden kaksi pistettä yhdistävän käyrän "erotuksena".

Määritelmä 5.26. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin, ja $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -luokan vektorikenttä. Sanotaan, että funktio $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ on *kentän f potentiaali alueessa A* , jos kaikille $i = 1, 2, \dots, n$, ja kaikille $\mathbf{x} \in A$ on voimassa

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}).$$

Tällöin sanomme, että kenttää f vastaava differentiaalimuoto

$$f_1(\mathbf{x}) dx_1 + f_2(\mathbf{x}) dx_2 + \dots + f_n(\mathbf{x}) dx_n$$

on *eksakti* (vrt. Differentiaaliyhtälöiden kurssi).

Esimerkki 5.27. Esimerkin 5.22 kentällä $f = (x^2, y)$ on koko tasossa $\mathbb{R}^2$ potentiaali

$$u(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2,$$

sillä osittaisderivoimalla näemme, että

$$u_x(x, y) = x^2 = f_1(x, y) \quad \text{ja} \quad u_y(x, y) = y = f_2(x, y).$$

Lause 5.28. Oletetaan, että avoimessa joukossa $A \subseteq \mathbb{R}^n$ määritellyllä C^1 -luokan vektorikentällä $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ on potentiaali $u : A \rightarrow \mathbb{R}$. Tällöin kaikille teille $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ on voimassa

$$\int_{\gamma} f = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)).$$

Erityisesti kentän f käyräintegraalit alueessa A ovat tiestä riippumattomia.

Todistus. Olkoon $\gamma(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))$. Tutkitaan yhdistettyä funktiota

$$h(t) = u(\gamma(t)) = u(c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)).$$

Ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{\partial u}{\partial x_1}(\gamma(t))c'_1(t) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\gamma(t))c'_2(t) + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\gamma(t))c'_n(t) \\ &= f_1(\gamma(t))c'_1(t) + f_2(\gamma(t))c'_2(t) + \dots + f_n(\gamma(t))c'_n(t). \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_{t=a}^b (f_1(\gamma(t))c'_1(t) + f_2(\gamma(t))c'_2(t) + \dots + f_n(\gamma(t))c'_n(t)) dt \\ &= \int_{t=a}^b h'(t) dt \\ &= h(b) - h(a) = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Analyyisin Peruslauseen nojalla.

Jos sitten γ ja γ' ovat kaksi tietä alueessa A , kummankin alkupiste P ja loppupiste Q , niin nähdyn perusteella

$$\int_{\gamma} f = u(Q) - u(P) = \int_{\gamma'} f,$$

joten kentän f käyräintegraalit alueessa A ovat tiestä riippumattomia. □

Esimerkki 5.29. Esimerkin 5.22 tulos saadaan nyt helposti potentiaalin $u(x, y) = x^3/3 + y^2/2$ avulla. Jokaisen esiintyvän käyrän alkupiste on $P = (1, 0)$ ja loppupiste $Q = (0, 1)$. Potentiaalifunktion arvojen erotus

$$u(Q) - u(P) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

yhtyy Lauseen 5.28 nojalla jokaiseen käyräintegraaliin $\int_{\gamma} f$, kunhan P on γ :n alkupiste ja Q loppupiste.

Esimerkki 5.30. Esimerkin 5.12 tulos

$$\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = 2\pi,$$

missä γ on tason yksikköympyrä positiiviseen kiertosuuntaan kuljettuna, osoittaa, ettei vektorikentällä

$$f = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x)$$

ole potentiaalia puhkaistussa tasossa $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Osoitetaan kuitenkin, että välille $\phi \in (-\pi, \pi)$ rajoitettu napakoordinaattifunktio $u(x, y) = \phi$ on kentän f potentiaali sädettä pitkin leikatussa tasossa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0 \text{ tai } x > 0\}.$$

Ratkaisu. Tässä siis $u(x, y)$ on pisteen $P = (x, y)$ kuvatulla tavalla rajattu napakoordinaatti ϕ kunhan P ei ole ei-positiivisen x -akselin piste.

Kun $y > 0$, niin $\phi \in (0, \pi)$. Tällä välillä kosini on injektiivinen, joten ϕ ratkeaa yhtälöstä $x = r \cos \phi$, ja saamme

$$\phi = \arccos \frac{x}{r} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Jos $t = x/\sqrt{x^2 + y^2}$, niin $t^2 = x^2/(x^2 + y^2)$, $1 - t^2 = y^2/(x^2 + y^2)$ ja siis $\sqrt{1 - t^2} = |y|/\sqrt{x^2 + y^2} = y/\sqrt{x^2 + y^2}$. Edelleen suoraviivaisesti derivoimalla saadaan

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

ja

$$\frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Ketjusäännön ja derivointikaavan $D \arccos t = -1/\sqrt{1 - t^2}$ avulla saamme siten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{1}{\sqrt{y^2/(x^2 + y^2)}} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \\ &= -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \cdot \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{y}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{1}{\sqrt{y^2/(x^2 + y^2)}} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \\ &= -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \cdot \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Näin ollen $\nabla \phi = f$ puolitasossa $y > 0$.

Puolitasossa $y < 0$ suuntakulma $\phi \in (-\pi, 0)$, jolloin $\phi = -\arccos(x/r)$. Lasku etenee samoin lukuun ottamatta detaljia $\sqrt{1 - t^2} = |y|/\sqrt{x^2 + y^2} = -y/\sqrt{x^2 + y^2}$. Tämä juurikin kompensoi arkuskosinin merkieron.

Positiivinen x -akseli hoidetaan osana puolitasoa $x > 0$. Tässä alueessa $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Kyseisellä välillä sini on injektiivinen, joten ϕ saadaankin lausekkeeta $\phi = \arcsin(y/r)$. Laskut etenevät samalla tavalla, ja ne jätetään harjoitustehtäväksi.

Huomaa, ettemme saa aikaiseksi samaa tulosta puolitasossa $x < 0$. Negatiivisella x -akselilla valitulla tavalla rajatun kulmamuuttujan ϕ arvo hyppää arvosta $\approx \pi$ arvoon $\approx -\pi$ eikä näin ollen ole edes jatkuva funktio. Huomaa kuitenkin, että jos asettaisimmekin suuntakulman avoimelle välille $(0, 2\pi)$, saisimme siitä kentän f potentiaalin tason siihen osaan, josta ei-negatiivinen x -akseli on poistettu.

Lause 5.31. Jos vektorikentällä $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ on luokan C^2 potentiaali $u(\mathbf{x})$ avoimessa joukossa $A \subseteq \mathbb{R}^n$, niin tällöin komponenttifunktioiden osittaisderivaatat toteuttavat yhtälöt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

koko A :ssa kaikilla indeksipareilla i, j .

Todistus. Tämä seuraa C^2 -luokan funktion sekaderivaattojen yhtymisestä. Koska $f_i = \partial_i u$, nii

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

□

Tarkastelemme seuraavaksi kysymystä, missä määrin edellisen Lauseen tulos on käännettävissä? Esimerkissä 5.30 näimme, että vektorikentällä $f = (f_1, f_2) = (-y, x)/(x^2 + y^2)$, jolla on potentiaali sekä alueessa $A_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ että alueessa $A_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$. Näin ollen sen komponentit toteuttavat differentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

joukossa $A = A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Kyseisessä joukossa sillä ei kuitenkaan ole potentiaalia Esimerkin 5.12 nojalla. Osoittautuu, että ongelman alkusyy on joukon A origossa oleva reikä, jonka integroimistiet voivat kiertää eri suuntiin.

Määritelmä 5.32. Pisteitä $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ yhdistää jana

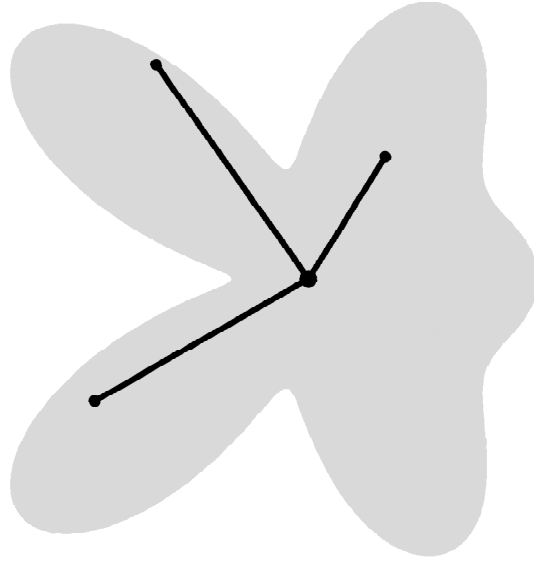
$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mid t \in [0, 1]\}.$$

Sanotaan, että avoin joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on *tähtimäinen*, jos on olemassa sellainen piste $\mathbf{a} \in A$, jolle $L(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \subseteq A$ aina, kun $\mathbf{x} \in A$.

Sanotaan, että avoin joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on *yhtenäinen*, jos sitä ei voida esittää kahden epätyhjän, avoimen ja erillisen osajoukon unionina. Ei siis ole mahdollista löytää kahta avointa epätyhjää joukkoa U, V , joille $A = U \cup V$ ja $U \cap V = \emptyset$.

Sanotaan, että avoin joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on *koordinaattimurtoviivayhtenäinen*, jos sen mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää joukkoon A sisältyvällä murtoviivalla, jonka jokainen jana on jonkin koordinaattiakselin suuntainen.

Lemma 5.33. Avoin epätyhjä joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on yhtenäinen jos ja vain jos se on koordinaattimurtoviivayhtenäinen. Tähtimäinen avoin joukko A on aina yhtenäinen.



Kuva 5.18: Tähtimäisessä alueessa on ainakin yksi sellainen piste, josta kaikki muut pisteet “näkyvät”.

Todistus. Oletetaan ensin, että A on yhtenäinen. Kiinnitetään piste $\mathbf{a} \in A$. Määritellään joukossa A relaatio $\sim$ asettamalla $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ silloin ja vain silloin kun on olemassa joukkoon A sisältyvä koordinaattimurtoviiva, jonka alkupiste on $\mathbf{x}$ ja loppupiste $\mathbf{y}$. Seuraavat seikat on helppo perustella:

- (i) Kaikille $\mathbf{x} \in A$ on voimassa $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$ (nollan mittainen murtoviiva).
- (ii) Jos $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, niin myös $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ (korvataan murtoviiva γ käänteisellä murtoviivalla $\gamma^{\leftarrow}$).
- (iii) Jos $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ ja $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$, niin $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$ (muodostetaan yhdistävien koordinaattimurtoviivojen summatie).
- (iv) Näin ollen $\sim$ on joukon A ekvivalenssirelaatio, joten A jakautuu ekvivalenssiluokkiin.
- (v) Jos $\mathbf{x} \in A$, ja $B(\mathbf{x}, r)$ on avoin joukkoon A sisältyvä pallo, niin jokaiselle pisteelle $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$ on voimassa $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ (voimme suoraviivaisesti ‘korjata’ koordinaatit yksi kerrallaan mielivaltaisessa järjestyksessä poistumatta pallosta $B(\mathbf{x}, r)$).
- (vi) Näin ollen jokainen ekvivalenssiluokka $[\mathbf{x}]$ on avoin.

Jos tässä $A = [\mathbf{a}]$, niin tällöin A on koordinaattimurtoviivayhtenäinen, koska sen jokainen piste voidaan yhdistää pisteen $\mathbf{x}$ kanssa koordinaattimurtoviivalla (ja kohiten 2 ja 3 nojalla mitkä tahansa kaksi joukon A pistettä voidaan yhdistää keskenään). Jos taas $U = [\mathbf{a}]$ on joukon A aito osajoukko, niin $V = A \setminus [\mathbf{a}]$ on sekin avoin ekvivalenssiluokkien unionina. Koska kahden eri ekvivalenssiluokan leikkaus on aina tyhjä, niin A ei olekaan yhtenäinen.

Oletetaan sitten, että A on koordinaattimurtoviivayhtenäinen. Tehdään vastaoletus, ettei A ole yhtenäinen. Tällöin löytyy jotkin kaksi avointa epätyhjää joukkoa U ja V , joille $A = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$. Valitaan piste

$\mathbf{x} \in U$ ja $\mathbf{y} \in V$. On olemassa koordinaattimurtoviiva $\gamma : [a, b] \rightarrow A$, jolle $\gamma(a) = \mathbf{x}$ ja $\gamma(b) = \mathbf{y}$. Tutkitaan joukkoa

$$S = \{t \in [a, b] \mid \gamma(t) \in U\}.$$

Koska $S \subseteq [a, b]$, joukko S on ylhäältä rajoitettu. Koska $a \in S$, se on myös epätyhjä. Näin ollen sillä on supremum $s = \sup\{t \in [a, b] \mid \gamma(t) \in U\}$. Osoitamme, ettei $\gamma(s)$ kuulu kumpaankaan joukoista U , V , mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $U \cup V = A$.

Jos $\gamma(s) \in U$, niin on olemassa sellainen $r > 0$, että pallo $B(\gamma(s), r) \subseteq U$. Polun γ jatkuvuuden nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$ että $\gamma([a, b] \cap (s - \delta, s + \delta)) \subseteq B(\gamma(s), r) \subseteq U$. Tällöin erityisesti $\gamma(s + \delta/2) \in U$, eikä s olekaan joukon S yläraja.

Jos taas $\gamma(s) \in V$, niin joukon V avoimuuden nojalla samoin löytyy sellainen $\delta > 0$, että γ kuvaa kaikki välin $[a, b] \cap (s - \delta, s + \delta)$ pisteet joukkoon V . Erityisesti $S \cap (s - \delta, s + \delta) = \emptyset$. Täten $s - \delta/2$ on sekin joukon S yläraja vastoin supremumin määritelmää.

Viimeinen väite tähtimäisen joukon yhtenäisyydestä todistetaan kuten yllä todistettu implikaatio *koordinaattimurtoviivayhtenäinen* $\Rightarrow$ *yhtenäinen*. Koordinaattimurtoviivan asemesta käytetään janaa, joka yhdistää tähtimäisen alueen keskipistettä $\mathbf{a}$ johonkin sellaiseen pisteeseen $\mathbf{x}$, joka ei kuulu samaan joukkoista U ja V kuin $\mathbf{a}$. Sivuutamme yksityiskohdat. $\square$

Lause 5.34. (*Poincarén lemma*) Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on tähtimäinen alue, $\mathbf{a}$ sen eräs keskus. Oletetaan lisäksi, että C^1 -luokan vektorikenttä $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ toteuttaa differentiaaliyhtälöt $\partial_{x_i} f_j = \partial_{x_j} f_i$ koko A :ssa kaikilla indeksipareilla i, j . Tällöin kentällä f on olemassa potentiaali $u : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Todistus. Määritellään funktio $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ yhdysjanojen $L(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ yli laskettuna käyräintegraalina.

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \int_{L(\mathbf{a}, \mathbf{x})} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n \\ &= \int_{t=0}^1 \left(\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x_i - p_i) \right) dt. \end{aligned}$$

Osoitetaan sitten, että tämä on vaadittu potentiaali, eli että $\partial_{x_j} u = f_j$ kaikille $j = 1, 2, \dots, n$. Oleelliset ideat näkyvät jo tapauksessa $n = 2$, joten merkintöjen yksinkertaistamiseksi käsitellään vain se.

Oletetaan siis, että $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$, $\mathbf{x} = (x, y) \in U$, $\partial_y f_1 = \partial_x f_2$ koko alueessa U . Merkintöjen lisäyksin kertaistamiseksi todetaan, että voidaan olettaa $\mathbf{a} = (0, 0)$. Jos nimittäin suuntaissiirrämme koko tarkastelun vektorin $-\mathbf{a}$ verran, eli määrittelemme vektorikentän g alueessa $U - \mathbf{a} = \{\mathbf{x} - \mathbf{a} \mid \mathbf{x} \in U\}$ säännöllä $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{a})$, niin ehdot $\partial_x g_2 = \partial_y g_1$ ovat yhtäpitäviä ehtojen $\partial_x f_2 = \partial_y f_1$ kanssa. Edelleen kentän g potentiaali u_g alueessa $U - \mathbf{a}$ antaa kentän f potentiaalin alueessa U säännöllä $u(\mathbf{x}) = u_g(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, sillä tällöin $\partial_i u(\mathbf{x}) = \partial_i u_g(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = g_i(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f_i(\mathbf{x})$.

Luovutaan apumerkinnöistä $U - \mathbf{a}$, g , ja oletetaan (siis yleisyyttä loukkaamatta!) että $\mathbf{a} = (0, 0)$. Määrittelemme siis

$$u(x, y) = \int_{t=0}^1 [f_1(tx, ty)x + f_2(tx, ty)y] dt.$$

Lauseen 3.45 ja ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \int_{t=0}^1 [D_1 f_1(tx, ty)tx + f_1(tx, ty) + D_1 f_2(tx, ty)y] dt \\ &= \int_{t=0}^1 \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(tx, ty)tx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(tx, ty)ty \right] dt + \\ &\quad + \int_{t=0}^1 f_1(tx, ty) dt, \quad (*)\end{aligned}$$

missä käytimme oletusta $\partial_x f_2 = \partial_y f_1$.

Tutkitaan apufunktiota

$$h(t) = f_1(tx, ty).$$

Ketjusääntö kertoo meille, että

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f_1}{\partial y}(tx, ty)y,$$

joten yhtälön (*) oikean puolen ensimmäisen integraalin hakasuluissa oleva integrandi voidaan kirjoittaa muodossa $th'(t)$. Osittaisintegroinnilla ($u = t, dv = h'(t) dt$) saadaan

$$\int_0^1 th'(t) dt = \int_{t=0}^1 th(t) - \int_{t=0}^1 h(t) dt.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (*) saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \int_0^1 th'(t) dt + \int_{t=0}^1 f_1(tx, ty) dt \\ &= \int_{t=0}^1 th(t) - \int_{t=0}^1 h(t) dt + \int_{t=0}^1 f_1(tx, ty) dt \\ &= (1 \cdot h(1) - 0) - \int_{t=0}^1 f_1(tx, ty) dt + \int_{t=0}^1 f_1(tx, ty) dt \\ &= h(1) = f_1(x, y).\end{aligned}$$

Toistamalla vaiheet nähdään samaan tapaan, että $\partial u / \partial y = f_2(x, y)$. □

Poincarén Lemma itse asiassa tarjoaa myös menetelmän potentiaalin konstruoinniseksi. Koska tiedämme, että käyräintegraali on tässä tilanteessa tiestä riippumaton, voimme käyttää yhdysjanan asemesta integroimistienä esimerkiksi koordinaattimurtoviivaa.

Esimerkki 5.35. Osoita, että vektorikenttä $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) &= \sin x \cos x + e^x y^2 + z^3, \\ f_2(x, y, z) &= 2e^x y z^3, \\ f_3(x, y, z) &= 3e^x y^2 z^2 \end{cases}$$

toteuttaa Poincarén Lemman ehdot koko $\mathbb{R}^3$:ssa, ja etsi sille jokin potentiaali.

Ratkaisu. Selvästi $\mathbb{R}^3$ on tähtimäinen. Voimme valita origon keskipisteeksi. Suoraan osittaisderivoimalla näemme, että

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y} \text{ ja } \frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial z}$$

kaikkialla. Näin ollen kentällä f on potentiaali. Eräs potentiaali saadaan integroimalla origosta pisteeseen (x, y, z) pitkin koordinaattimurtoviivaa $(0, 0, 0) \rightarrow (x, 0, 0) \rightarrow (x, y, 0) \rightarrow (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{t=0}^x (\sin t \cos t + e^t 0^2 0^3) dt + \int_{t=0}^y 2e^x t 0^3 dt + \int_{t=0}^z 3e^x y^2 t^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 x + e^x y^2 z^3. \end{aligned}$$

Esimerkki 5.36. Esimerkin 5.30 vektorikenttä

$$f = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x)$$

toteuttaa differentiaaliyhtälön $\partial_y f_1 = \partial_x f_2$ alueessa $A_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Näimme, ettei sillä kuitenkaan ole potentiaalia koko A :ssa. Selitys on siinä, että alue A_0 ei ole tähtimäinen. Jos jätämme pois negatiivisen x -akselin, ja rajoitumme alueeseen

$$A_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\},$$

niin avoimelle välille $(-\pi, \pi)$ rajattu suuntakulma on kentän f potentiaali alueessa A_1 . Kuvasta katsoen näemme helposti, että A_1 on tähtimäinen. Nimittäin $P_1 = (1, 0)$ kelpaa alueen A_1 keskipisteeksi (suoraan origon takana olevat pisteet eivät näy pisteeseen P_1). Vastaavasti alue

$$A_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$$

on sekin tähtimäinen, näköalapisteenä $P_2 = (-1, 0)$. Alueessa A_2 kentällä f onkin Poincarén Lemman lupamana potentiaalina avoimella välillä $(0, 2\pi)$ rajattu napakoordinaatti ϕ .

Kuitenkin alueen tähtimäisyys on Poincarén Lemmassa turhankin rajoittava oletus. Yleensä käy nimittäin niin, että ainoastaan alueessa oleva reiät johtavat ongelmiin. Esitän luvun lopuksi muutaman havainnon, joiden avulla päästään eteenpäin. Täydellisempään teoriaan päästään *Differentiaaligeometrian* kurssilla.

Lemma 5.37. *Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on yhtenäinen, avoin joukko. Oletetaan, että kentällä f on potentiaali u joukossa A . Jos $C \in \mathbb{R}$ on jokin vakio, niin tällöin myös funktio $u + C$ on kentän f potentiaali. Lisäksi kaikki potentiaalit ovat tätä muotoa.*

Todistus. Koska vakiofunktion osittaisderivaatat häviävät, niin $u + C$ on ilman muuta potentiaali.

Oletetaan sitten, että $u' : A \rightarrow \mathbb{R}$ on jokin toinen potentiaali. Tällöin kaikille muuttujille $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, ja kaikille $\mathbf{x} \in Z$ on voimassa

$$\partial_i u(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) = \partial_i u'(\mathbf{x}).$$

Näin ollen $\partial_i(u - u') = 0$ koko A :ssa. Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla tästä seuraa, että funktio $u - u'$ on vakio kaikilla joukkoon A sisältyvillä sellaisilla janoilla, joilla ainoastaan koordinaatti x_i muuttuu. Koska A on koordinaattimurtoviivayhtenäinen, niin tästä seuraa, että $u - u'$ on vakio koko A :ssa. $\square$

Lemma 5.38. (*Liimauslemma*) Oletetaan, että kentällä f on potentiaalit avoimissa joukoissa $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ ja $U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Oletetaan lisäksi, että joukko $U_1 \cap U_2$ on yhtenäinen. Tällöin kentällä f on potentiaali unionissa $U_1 \cup U_2$.

Todistus. Oletetaan, että $u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ ovat kentän f potentiaaleja. Tällöin niiden rajoittumina saadut funktiot ovat molemmat kentän f potentiaaleja yhtenäisessä avoimessa joukossa $U_1 \cap U_2$. Lemman 5.37 nojalla on olemassa sellainen vakio C , että $u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) + C$ kaikille $\mathbf{x} \in U_1 \cap U_2$. Määritellään sitten funktio $u : U_1 \cup U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

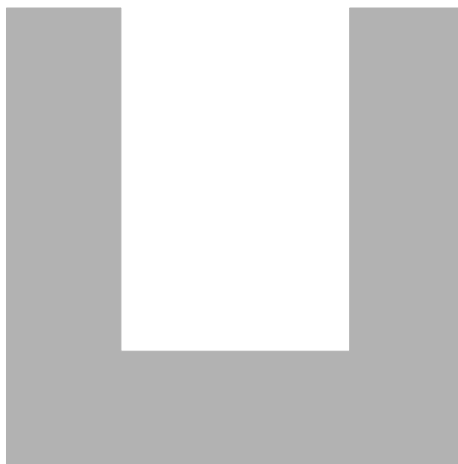
$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_1(\mathbf{x}), & \text{kun } \mathbf{x} \in U_1, \text{ ja} \\ u_2(\mathbf{x}) + C, & \text{kun } \mathbf{x} \in U_2. \end{cases}$$

Edellisen perusteella $u(\mathbf{x})$ on hyvinmääritelty, eli kun $\mathbf{x} \in U_1 \cap U_2$, niin käytettävissä olevat eri määritelmät yhtyvät. Jos $\mathbf{x} \in U_1 \cup U_2$, niin pisteellä $\mathbf{x}$ on olemassa sellainen palloympäristö, joka sisältyy toiseen joukoista U_1, U_2 . Koska u_1 ja u_2 kumpikin ovat funktion f potentiaaleja, niin u :lla on pisteessä $\mathbf{x}$ kaikki osittaisderivaatat, ja lisäksi $\nabla u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. $\square$

Liimauslemman tapaiseen mekanismiin törmäävät myös kurssilla *Funktioteoria*, kun tarkastellaan funktion *analyttistä jatkamista*.

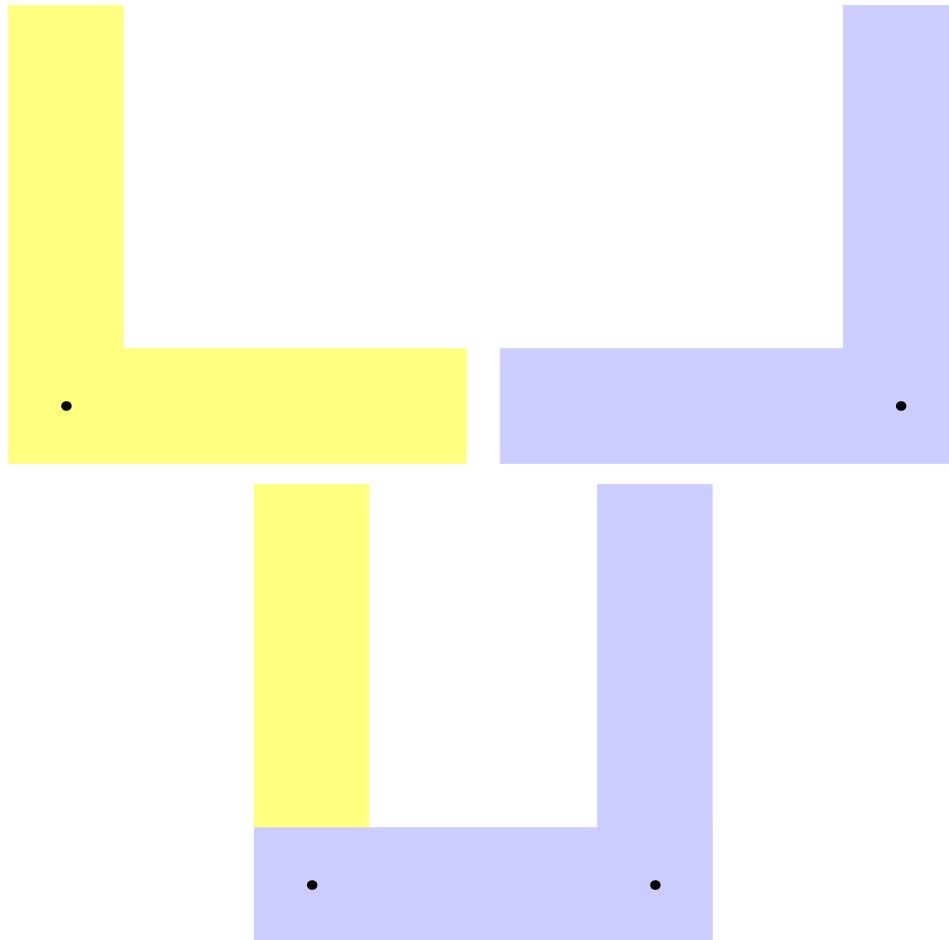
Esimerkki 5.39. Esimerkissä 5.36 näimme, että kentällä $f = (-y, x)/(x^2 + y^2)$ on potentiaali u alueessa $A_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ ja potentiaali u' alueessa $A_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$. Tässä tapauksessa $A_1 \cap A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ ei ole yhtenäinen, sillä x -akselin ylä- ja alapuoliset osat ovat molemmat avoimia joukkoja. Näin ollen Lemma 5.38 ei lupaakaan, että kentällä f olisi potentiaali joukossa $A_1 \cup A_2$.

Esimerkki 5.40. Oletetaan, että C^1 -vektorikenttä $f = (f_1, f_2)$ toteuttaa ehdon $\partial_x f_2 = \partial_y f_1$ Kuvan 5.19 joukossa. Osoita, että sillä on siinä potentiaali.



Kuva 5.19: Ei-tähtimäinen joukko

Ratkaisu. Kuvattu joukko voidaan jakaa tähtimäiseen osiin (ks. Kuva 5.20 siten, että osien leikkaus on yhtenäinen. Potentiaalien olemassaolo tähtimäisissä osissa seuraa Poincarén Lemmasta. Koska osien leikkausjoukko on yhtenäinen (suorakaide), niin väite seuraa liimauslemmasta.



Kuva 5.20: Ei-tähtimäinen joukko kahden tähtimäisen joukon unionina

Luku 6

Vektorikenttien pintaintegraaleista

6.1 Parametrisoitu pinta ja pinta-alkio

Joitakin avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukkoja haluamme kutsua *pinnoiksi*. Kaikilla on varmasti jonkinlainen mielikuva siitä, mitä pinta tarkoittaa. Sen täsmällinen määrittäminen törmää samanlaisiin haasteisiin kuin käyränkin määrittely. Kuten käyränkin tapauksessa tyydymme käyttämään parametrisointiin perustuvaa määritelmää. Myöhemmillä kursseilla määritellään yleisempi k -ulotteisen moniston käsite, mikä yleistää käyttämiämme pinnan ja käyrän määritelmiä. Tällöin ei välttämättä oleteta, että kuvattava objekti edes olisi $\mathbb{R}^n$:n osajoukko millään n :n arvolla.

Jos $U \subseteq \mathbb{R}^2$ on avoin joukko, ja

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3, f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

on vähintään luokan C^1 injektiivinen funktio, jonka Jacobin matriisi

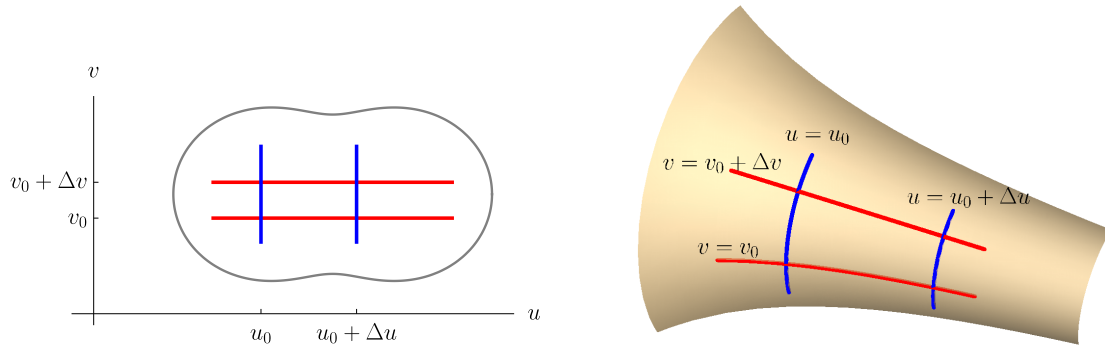
$$D\phi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

kaikkialla on täysiateinen (eli sen rivit ovat lineaarisesti riippumattomia kaikilla $(u, v) \in U$), niin sanomme, että f on *pinnan* $S = f(U)$ *sileä parametrisointi*, ja että S on *avaruuden* $\mathbb{R}^3$ *sileä pinta*.

Esimerkki 6.1. Pallokoordinaattikuvaus $(x, y, z) = f(\phi, \theta)$,

$$\begin{cases} x(\phi, \theta) = \cos \phi \sin \theta, \\ y(\phi, \theta) = \sin \phi \sin \theta, \\ z(\phi, \theta) = \cos \theta \end{cases}$$

parametrisoi pallopinnan $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ nollameridiaania lukuun ottamatta, kun rajaamme pallokoordinaatteja vaatimalla, että $(\phi, \theta) \in U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$. Kun navat ja nollameridiaani on rajattu pois, niin helposti nähdään, että f on injektio, ja että sen derivaatan täysiateisuus on voimassa kaikissa joukon U pisteissä.



Kuva 6.1: Parametrijoukko ja sitä vastaava parametrisoitu pinta

Parametrisointi tavallaan luo jonkinlaisen koordinaatiston pinnalle $f(U)$. Lähtöjoukossa U kumpikin koordinaatti, u tai v , saa vakioarvon koordinaattiakselin suuntaisella suoralla, ja funktion f välityksellä pinnalle $f(S)$ saadaan näiden kuvina käyriä, joilla jompikumpi parametreista saa vakioarvon. Kuva 6.1 yrittää havainnollistaa yleistä tilannetta. Esimerkissä 6.1 parametrin ϕ (vast. θ) vakioarvokäyrät ovat meridiaaneja (vast. leveyspiirejä).

Usein on tarkoituksenmukaista ottaa mukaan parametrialueen U reuna ∂U . Vaatimukset funktion f injektiivisyydestä ja Jacobin matriisin täysiasteisuudesta eivät tällöin koske reunan pisteitä. Esimerkin 6.1 parametrisoinnissa ei kaikilla parametrin θ arvoilla voimassa oleva yhtälö $f(0, \theta) = f(2\pi, \theta)$ haittaa. Eikä myöskään se, että navoilla, eli pisteissä, joissa $\theta \in \{0, \pi\}$, oletus Jacobin matriisin täysiasteisuus särkyy. Kun kehitämme tähän sopivan integraalin käsitteen, huomaamme, että poikkeusjoukot ovat nollajoukkoja, ja voidaan jättää huomiotta. Tyypillisesti tämä tarkoittaa sitä, että parametrien arvojoukkoon U voidaan ottaa sen reuna mukaan — usein avoin vaihteluväli muuttuu tällöin suljetuksi.

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ pinta S on sitten muotoa $f_i(U_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, olevien joukkojen unioni,

$$S = \bigcup_{i=1}^k f_i(U_i).$$

Tässä $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ ovat kaikki sileitä parametrisointeja. Edellytetään, että pinnan osat $f_i(U_i)$ eivät leikkaa toisiaan mahdollisesti reunoja $f_i(\partial U_i)$ lukuun ottamatta. Esimerkiksi kuution pinta on siis tässäkin mielessä pinta, joka muodostuu kuudesta osasta (=kuution tahkoista), jotka kukin ovat sileästi parametrisoituja sopivien funktioiden $f_i : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \dots, 6$ välityksellä, mutta leikkaavat reunoilla.

Jos $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ on säännöllinen pinnan parametrisointi, niin pinta $f(U)$ jakautuu *pinta-alkioihin* $f(I)$, missä $I = [u_0, u_0 + \Delta u, v_0, v_0 + \Delta v]$ on jokin parametrialueen U pieni väli. Koska f on luokkaa C^1 , niin Luvun 2 teorian perusteella kuvajoukkoa $f(I)$ voidaan approksimoida suunnikkaana, jonka yhtenä kärkenä on piste

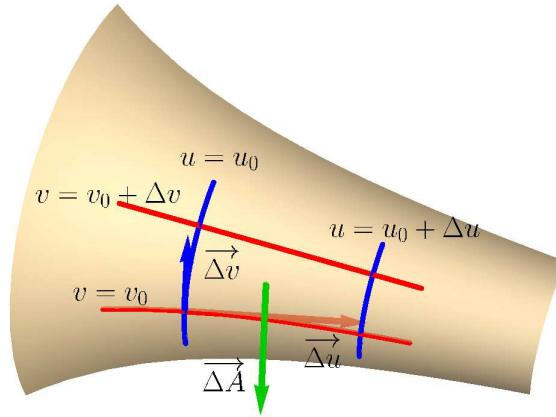
$f(u_0, v_0)$ ja siitä lähtevinä sivuina vektorit

$$\vec{\Delta u} = \Delta u \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) \quad (1)$$

ja

$$\vec{\Delta v} = \Delta v \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right). \quad (2)$$

Lineaarialgebran perusteella kahden avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorin $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ määräämän suunnikkaan pinta-ala saadaan niiden ristitulon $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ pituudesta. Lisäksi vektori $\vec{n}$ on kohtisuorassa ko. suunnikkaan sisältämää tasoa vastaan siten, että vektorikolmikko $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ muodostaa ns. *oikeakätisen systeemin*, eli niveliä särkevät on mahdollista asettaa oikean käden peukalo vektorin $\vec{a}$ suuntaiseksi, etusormi vektorin $\vec{b}$ suuntaiseksi, ja keskisormi vektorin $\vec{n}$ suuntaiseksi.



Kuva 6.2: Pinta-alkion approksimointi suunnikkaalla, ja sitä kuvaavat vektorit.

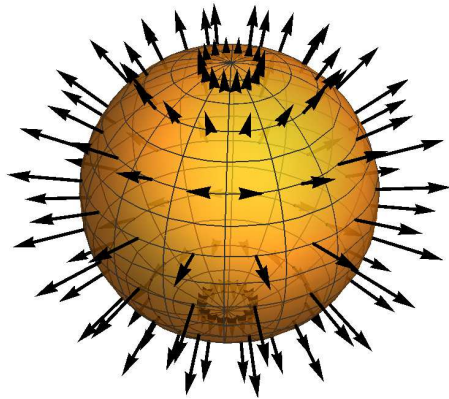
Käytämme parametrisoidun pintamme pinta-alkion $f(I)$ kuvaamiseen siten ristituloa

$$\vec{\Delta A} = \vec{\Delta u} \times \vec{\Delta v}.$$

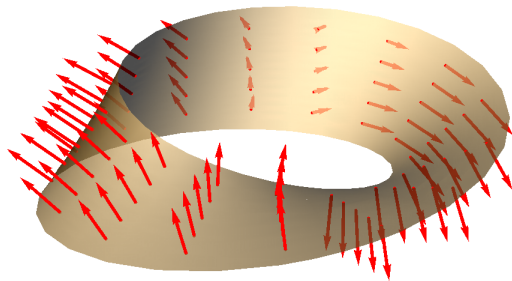
Vektorin $\vec{\Delta A}$ pituus siis kertoo tasomaisen pinta-alkion pinta-alan, ja suunta sen asennon avaruudessa. Ensinnäkin kyseinen vektori on kohtisuorassa pinta-alkiota vastaan. Kuva 6.2 yrittää havainnollistaa näitä vektoreita kuvatun pinta-alkion yhteydessä. Siinä pinta-alkiota kuvaava vektori $\vec{\Delta A}$ on piirretty alkamaan pinta-alkion keskeltä.

Lisäksi vektorisysteemin $\vec{\Delta u}, \vec{\Delta v}, \vec{\Delta A}$ oikeakätisyys pitää sisällään valinnan pinta-alkion *suunnastuksesta*. Valitsemalla vektorin $\vec{\Delta u}$ ristitulon ensimmäiseksi tekijäksi vektorin $\vec{\Delta v}$ asemesta, valitsimme sa-

mallalla kummalle puolelle pintaa $\phi(U)$ vektori $\vec{\Delta A}$ osoittaa. Jos kuvittelemme itsemme kävelemässä pinta-alkiosuunnikkaan ympäri siten, että lähdemme pisteestä $f(u_0, v_0)$ ensin vektorin $\vec{\Delta u}$ suuntaan, ja huolehdimme siitä, että kierrättävä alue on vasemman käden puolella, tällöin päämme osoittaa vektorin $\vec{\Delta A}$ suuntaan.



Kuva 6.3: Pallopinta on suunnastettu.



Kuva 6.4: Möbiuksen lehteä ei voi suunnastaa.

Kun kohta käsittelemme pintaintegraaleja, oletamme, että tutkittava pinta S on *suunnastuva*. Tämä tarkoittaa hieman epätäsmällisesti ilmaistuna sitä, että voimme koko pinnalla määrätä pinta-alkioita kuvaavien vektorien suunnat yhdenmukaisesti siten, että toistensa naapureina esiintyvillä pinta-alkioilla vektorien $\vec{\Delta A}$ suunta muuttuu jatkuvasti. Kuvasta 6.3 näemme, että pallopinnalla tämä on helppoa, valitaan kaikki

vektorit $\overrightarrow{\Delta A}$ osoittamaan ulospäin. On helppo vakuuttua siitä, että jos pinta S on avaruuden $\mathbb{R}^3$ riittävän säännöllisen kappaleen reuna, niin suunnatus on aina mahdollista tehdä. Tällöin suunnastuksen valinta on ekvivalenttia sen kanssa, kumpaa pinnan puolta kutsutaan sen ulkopuoleksi ja kumpaa sisäpuoleksi.

On kuitenkin olemassa ns. 1-puoleisia pintoja, kuten Kuvan 6.4 *Möbiuksen nauha*. Ongelmaksi muodostuu Möbiuksen nauhan kierre, jonka seurauksena nauhaa pitkin kävelemällä päästään pinnan vastakkaiselle puolelle. Kuvassa tämä näkyy pinta-alkioiden normaalivektorien epäjatkovana hyppynä puolelta toiselle etualalla olevalla jakolinjalla. Suunnastukseen liittyviä käsitteitä ja pulmia (muun muassa yleistys korkeampi ulotteisiin objekteihin) sivutaan enemmän topologian ja differentiaaligeometrian kursseilla.

6.2 Parametrisoidun pinnan ala

Oletetaan, että $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ on pinnan säännöllinen parametrisointi. Pinnan $f(U)$ pinta-alkion pinta-alan mittaa tällöin suure

$$\Delta A = \|\overrightarrow{\Delta A}\| = \|\overrightarrow{\Delta u} \times \overrightarrow{\Delta v}\|.$$

Yhtälöiden (1) ja (2) perusteella

$$\Delta A = \|\partial f_u \times \partial f_v\| \Delta u \Delta v.$$

Jakamalla pinta $f(U)$ osiin, approksimoimalla osia pinta-alkiolla, ja laskemalla niiden pinta-alat yhteen, nähdään, että summia $\sum_{\text{jako}} \Delta A$ voidaan arvioida ylhäältä ja alhaalta integraalin

$$I = \int_U \|\partial f_u \times \partial f_v\| du dv$$

ylä- ja alasummilla. Raja-arvoprosessi, jossa parametrialueen U jakoa tihennetään rajatta, motivoi tällöin määritelmän, jonka mukaan pinnan $f(U)$ pinta-ala A saadaan integraalina

$$A = \int_U \|\partial f_u \times \partial f_v\| du dv.$$

Jonkinlaisena tarkistuksen tämän määritelmän järkevyydestä käsitellään seuraava esimerkki.

Esimerkki 6.2. Lasketaan yksikköpallon S pinta-ala käyttäen Esimerkin 6.1 parametrisointia

$$f(\theta, \phi) = \begin{cases} x(\phi, \theta) = \cos \phi \sin \theta, \\ y(\phi, \theta) = \sin \phi \sin \theta, \\ z(\phi, \theta) = \cos \theta \end{cases},$$

missä kulmaparametrit $(\theta, \phi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$.

Ratkaisu. Suoraan osittaisderivoimalla saadaan

$$\partial f_\theta = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, -\sin \theta),$$

ja

$$\partial f_\phi = (-\sin \phi \sin \theta, \cos \phi \sin \theta, 0).$$

Näiden ristitulo sievenee muotoon

$$\partial f_\theta \times \partial f_\phi = (\sin^2 \theta \cos \phi, \sin^2 \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \theta).$$

Tämän vektorin pituus on Pythagoraan lauseen nojalla

$$\begin{aligned} \|\partial f_\theta \times \partial f_\phi\| &= \sqrt{\sin^4 \theta \cos^2 \phi + \sin^4 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{\sin^4 \theta + (1 - \sin^2 \theta) \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{\sin^2 \theta} \\ &= \sin \theta, \end{aligned}$$

sillä välillä $\theta \in [0, \pi]$ sini on positiivinen.

Näin ollen pinta-ala saadaan integraalista

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \theta \, d\phi \, d\theta \\ &= 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \, d\theta \\ &= 2\pi \left| -\cos \theta \right|_{\theta=0}^{\pi} \\ &= 2\pi(1 - (-1)) = 4\pi. \end{aligned}$$

Tämä tietenkin sopii yhteen pallon pinta-alan kaavan $A = 4\pi r^2$ kanssa, koska nyt $r = 1$.

Esimerkki 6.3. (Kuvaajan pinta-ala) Jos $U \subseteq \mathbb{R}^2$ on avoin, ja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ on jokin C^1 -luokan funktio, niin sen kuvaajapinta $z = f(x, y)$ alueen U päällä voidaan parametrisoida koordinaattien x ja y avulla funktiolla $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$. Tässä

$$\partial \phi_x = (1, 0, f_x),$$

ja

$$\partial \phi_y = (0, 1, f_y),$$

joiden ristitulon

$$\partial \phi_x \times \partial \phi_y = (-f_x, -f_y, 1)$$

pituus on

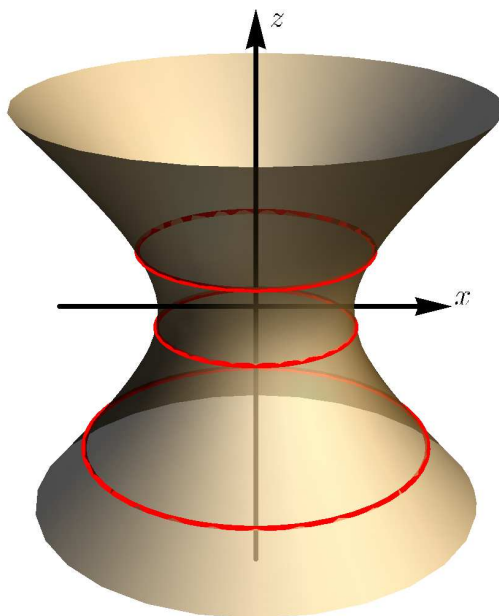
$$\|\partial \phi_x \times \partial \phi_y\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

Näin ollen kuvaajapinnan $\phi(U)$ pinta-ala A saadaan integraalista

$$A = \int_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy.$$

Tätä tulosta kannattaa verrata sen kanssa analogiseen kuvaajakäyrän pituuden kaavaan Esimerkissä 5.7.

Sovelluksissa usein esiintyy ns. *pyöräyspintoja*. Pyöräyspinta muodostuu, kun parametrisoitu käyrä γ pyörähtää jonkin akselin L ympäri. Tässä kukin piste $\mathbf{r} \in \gamma$ on yksikäsitteisellä suoraa L vastaan kohtisuoralla tasolla T , ja pyörähdyksessä piste $\mathbf{r}$ piirtää tasolle T ympyrän, joka kulkee pisteen $\mathbf{r}$ kautta, ja jonka keskipiste on akselin L ja tason T leikkauspiste.



Kuva 6.5: Pyöräyspinta joka muodostui hyperbelin $x^2 - z^2 = 1$ pyörähtäessä z -akselin ympäri. Eräitä pisteitä vastaavat pyöräysympyrät korostettu.

Usein valitaan koordinaatisto siten, että L on z -akseli, ja pyörähtävä käyrä on tasossa $y = 0$. Piste $\mathbf{r} = (x_0, 0, z_0)$ piirtää tällöin ympyrän tasossa $z = z_0$. Ympyrän säde on x_0 ja keskipiste $(0, 0, z_0)$. Sen parametrisointi on siis

$$(x_0 \cos \phi, x_0 \sin \phi, z_0), \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

Kuvassa 6.5 on muodostuva pinta, kun pyörähtävä käyrä on xz -tason hyperbelin $x^2 - z^2 = 1$ oikeanpuoleinen haara, jolla $x > 0$.

Jos pyörähtävällä käyrällä on parametrisointi

$$\gamma(t) = (x(t), 0, z(t)), \quad t \in [a, b],$$

niin vastaavalle pyöräyspinnalle saadaan parametrisointi

$$f(t, \phi) = (x(t) \cos \phi, x(t) \sin \phi, z(t)), \quad (t, \phi) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$$

Esimerkki 6.4. Johdetaan yo. pyöräyspinnan pinta-alan laskeva integraali.

Ratkaisu. Ym. parametrisoinnille saadaan

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right) &= (x'(t) \cos \phi, x'(t) \sin \phi, z'(t)) \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi}, \frac{\partial z}{\partial \phi}\right) &= (-x(t) \sin \phi, x(t) \cos \phi, 0),\end{aligned}$$

ja siitä ristituloksi

$$f_t \times f_\phi = (xz' \cos \phi, xz' \sin \phi, xx'),$$

jonka normi on

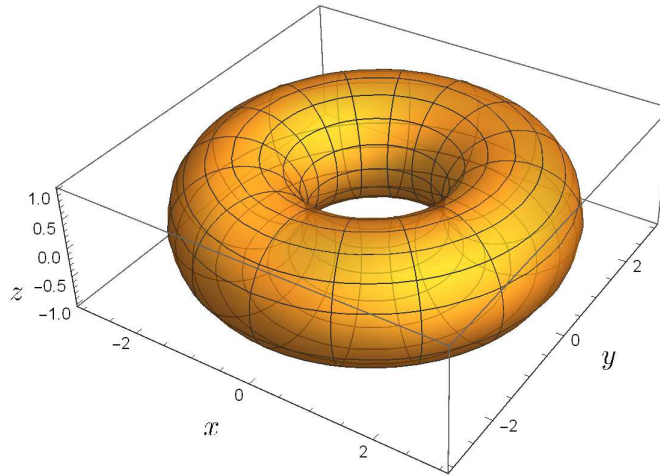
$$\left\| \frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial \phi} \right\| = x(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Kuvatun pyöräyspinnan S alaksi saadaan siten

$$\begin{aligned}A(S) &= \int_{t=a}^b \int_{v=0}^{2\pi} x(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dv dt \\ &= 2\pi \int_{t=a}^b x(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt.\end{aligned}$$

Tämä yleistyy vastaamaan muuta pyöräysakselia, kun tulkitaan, että yllä $x(t)$ on pisteen $\mathbf{r}$ etäisyys pyörähdysakselista, ja $\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \|\gamma'(t)\| dt$ on pyörähtävän tasokäyrän kaari-alkion pituus.

Huomautus 6.5. Käytetyn parametrisoinnin avulla nähdään helposti, että pyöräyspinta on aina suunnastuva.



Kuva 6.6: Toruspinta joka muodustuu xz -tason ympyrä $x(t) = a + b \cos t, y(t) = 0, z(t) = b \sin t, t \in [0, 2\pi]$ pyörähtäessä z -akselin ympäri. Kuvassa $a = 2, b = 1$.

Esimerkki 6.6. Kiinnitetään vakiot a ja $b, a > b > 0$. Tällöin xz -tason ympyrällä, jonka keskipiste on pisteessä $(x, z) = (a, 0)$ ja säde b , on parametrisointi $x = x(t) = a + b \cos t, z = z(t) = b \sin t$, missä $t \in [0, 2\pi]$.

Kyseinen ympyrä on kokonaan z -akselin oikealla puolella, joten sen pyörähtäessä z -akselin ympäri muodostuu munkkirinkilää tai autonrengasta muistuttava ns. *toruspinta*, Kuva 6.6. Lasketaan sen pinta-ala.

Ratkaisu. Tässä $x'(t) = -b \sin t$ ja $z'(t) = b \cos t$, joten

$$\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{b^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = b.$$

Näin ollen Esimerkissä 6.4 johdetun tuloksen nojalla toruksen pinta-ala saadaan integraalista

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{t=0}^{2\pi} b(a + b \cos t) dt \\ &= 2\pi b \left[at + b \sin t \right]_{t=0}^{2\pi} \\ &= (2\pi b)(2\pi a) = 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

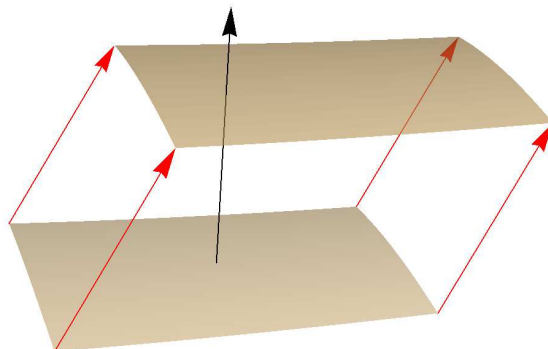
6.3 Vektorikentän pintaintegraali

Vektorikentän pintaintegraali on, kuten edellisessä luvussa käsitelty käyräintegraali, luonteeltaan hieman erilainen kuin kolmannen luvun ylä- ja alasummien avulla määritellyt integraalit. Tässäkin on luontevaa käyttää A) Riemannin summia ylä- ja alasummien asemesta, B) integraalilla on luonteva fysikaalinen tulkinta, jonka sivuuttaminen on mielestäni pedagogisesti haitallista. Tämä siitä huolimatta, että kumpikin käsite palautuu differentiaaligeometrian menetelmin kolmannen luvun täsmällisen määritelmän mukaiseksi.

Käyräintegraalia määriteltäessä pidettiin mielessä vektorikentän käyrää pitkin liikkuvaan kappaleeseen tekemä työ. Siinä käyrä jaettiin infinitesimaalisen pieniin palasiin $d\vec{r}$ (=käyrä-alkioihin), joilla kentän $\vec{F}$ ajateltiin olevan vakiovektorin suureinen, ja käyräintegraali muodostui pistetuloina laskettujen pienten 'infinitesimaalisten töiden' $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ summien raja-arvona palasten lukumäärän kasvaessa rajatta.

Pintaintegraalissa vastaavanlainen mielessä pidettävä fysikaalinen suure on vektorikentän *vuon* pinnan läpi. Mielikuvan luomiseksi esimerkkipintana usein tässä käytetään tiheäsilmaista katiskaverkkoa pintana, ja vektorikenttänä veden virtausta sen pinnan läpi. Tällöin haluamme vastata kysymykseen, kuinka paljon verkon (tai sen osan) läpi vettä virtaa aikayksikköä kohti? Jos verkon yhden silmän pinta-ala on ΔA , ja sen kohdalla virtaus on verkkoa vastaan kohtisuoraan nopeudella v , niin tällöin kyseisen silmän läpi virtaavan veden tilavuus aikayksikköä kohti on yksinkertaisesti $v \Delta A$, ja kokonaisvirtaus saadaan tällaisten pienten virtausalkioiden summana. Käytännössä virtaus ei yleensä ole kohtisuoraan verkon pintaa vastaan, ja joudumme ottamaan tämän huomioon. Tällöin nopeus $\vec{v}$ on paikasta riippuva vektoriarvoinen funktio (eli vektorikenttä), ja tulemme tarvitsemaan myös pinta-alkion vektoriversiota $\vec{\Delta A}$.

Kuvaa 6.7 hetken katselemalla vakuututaan helposti siitä, että yllä nopeudesta $\vec{v}$ on tällöin otettava huomioon ainoastaan pintaa vastaan kohtisuora komponentti. Kunhan rajoitumme tarpeeksi pienelle alueelle, jotta vektorikenttä $\vec{v}$ ei juuri ehdi muuttua, niin pinta-alkion ΔA läpi virrannut vesi on tilavuudeltaan raja-arvomielessä sama kuin kuvan suuntaissärmiön. Jos $\vec{n}$ on pinta-alkiota vastaan kohtisuora yksikkövektori



Kuva 6.7: Vektorikentän (punainen) vuo pinta-alkion ΔA läpi voidaan tulkita infinitesimaalisen särmiön tilavuutena. Särmiön pohjan ala on ΔA , ja korkeus vektorikentän pintaa vastaan kohtisuora komponentti.

(=pinnan normaali), niin kyseisen särmiön korkeus $h = \vec{v} \cdot \vec{n}$. Näin ollen sen tilavuus

$$\Delta V = h \Delta A = \vec{v} \cdot \vec{\Delta A},$$

kuten *Lineaarialgebran* kurssilla.

Yhtä seikkaa on syytä korostaa. Tässä pinnan suunnastus, eli pinta-alkiovektorien $\vec{\Delta A}$ suunnan valinta näyttelee keskeistä roolia. Katiskan pinnan tapauksessa tämä on luontevaa ajatella siten, että katiskalla on ulkopuoli ja sisäpuoli. Jos suunnastamme katiskan pinnan siten, että $\vec{\Delta A}$ kaikkialla osoittaa ulospäin, niin tällöin sisätulo $\vec{v} \cdot \vec{\Delta A}$ on positiivinen, jos kyseisen silmän kohdalla vesi virtaa katiskasta ulos. Kyseinen sisätulo on puolestaan negatiivinen niiden silmien kohdalla, joissa vesi virtaakin katiskan sisään. Laskemalla yhteen kaikkien silmien virtaukset saamme lopputuloksena ulospäin suuntautuneen ja sisäänpäin suuntautuneen virtauksen erotuksen, eli ns. nettovirtauksen. Juuri tällaista suuretta haluamme laskea, mikä motivoi seuraavan määritelmän.

Määritelmä 6.7. Oletetaan, että $U \subseteq \mathbb{R}^2$ on avoin, ja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ pinnan $S = f(U)$ säännöllinen parametrisointi. Oletetaan, että pinta S sisältyy avaruuden $\mathbb{R}^3$ sellaiseen osajoukkoon V , jossa vektorikenttä $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ on jatkuva. Tällöin *vektorikentän ϕ integraali yli suunnastetun pinnan S* saadaan raja-arvona summista $\phi(\mathbf{x}) \cdot \vec{\Delta A}(\mathbf{x})$ missä $\vec{\Delta A}$ käy läpi pinnan S pinta-alkiot, ja $\mathbf{x}$ valitaan kustakin pinta-alkiosta erikseen. Raja-arvosta käytetään merkintää

$$\int_S \phi \cdot d\vec{A}.$$

Jos pinnalla S on sileä parametrisointi $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ niin näimme, että

(infinitesimaalista) pinta-alkiota kuvaava vektori on ristitulo

$$\vec{dA} = \partial_u f(u, v) \times \partial_v f(u, v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_u x(u, v) & \partial_u y(u, v) & \partial_u z(u, v) \\ \partial_v x(u, v) & \partial_v y(u, v) & \partial_v z(u, v) \end{vmatrix}.$$

Tämän ja vektorikentän $\phi(x, y, z) = (\phi_1(x, y, z), \phi_2(x, y, z), \phi_3(x, y, z))$ sisätulo saadaan sekin kätevästi 3-rivisenä determinanttina

$$\phi \cdot \vec{dA} = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \partial_u x(u, v) & \partial_u y(u, v) & \partial_u z(u, v) \\ \partial_v x(u, v) & \partial_v y(u, v) & \partial_v z(u, v) \end{vmatrix},$$

missä tietenkin kentän komponentit ϕ_i , $i = 1, 2, 3$, lasketaan pisteessä $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Tavallinen raja-arvoprosessi johtaa sitten sileästi parametrisoidulle pinnalle $f : U \rightarrow S$ ja jatkuvalle vektorikentälle ϕ seuraavaan laskukaavaan.

Lause 6.8. Oletetaan, että $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ on pinnan S säännöllinen parametrisointi, ja että pinta S on suunnastettu parametrisointia vastaavasti, $\vec{dA} = \partial_u f \times \partial_v f du dv$. Oletetaan, että kenttä $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ on jatkuva pinnalla S . Tällöin

$$\int_S \phi \cdot \vec{dA} = \int_U \begin{vmatrix} \phi_1(x, y, z) & \phi_2(x, y, z) & \phi_3(x, y, z) \\ \partial_u x(u, v) & \partial_u y(u, v) & \partial_u z(u, v) \\ \partial_v x(u, v) & \partial_v y(u, v) & \partial_v z(u, v) \end{vmatrix} du dv.$$

Esimerkki 6.9. Oletetaan, että pinta S on tasolla $T : z = ax + by + c$, jonka normaalivektori on $\vec{n}$ on normeerattu yksikkövektori. Oletetaan, että vektorikenttä ϕ on vakio, $\phi(x, y, z) = \vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ koko avaruudessa. Tarkistetaan, että tällöin

$$\int_S \phi \cdot \vec{dA} = \vec{s} \cdot \vec{n} A(S),$$

missä $A(S)$ on pinnan S pinta-ala.

Ratkaisu. Koska tasolla T z -koordinaatti on annettu muiden koordinaattien funktiona, voimme käyttää koordinaatteja (x, y) parametrisoinnissa. Tällöin joukko U saadaan projisoimalla S xy -tasoon, ja parametrisointi on siis

$$f : U \rightarrow S, (x, y) \mapsto (x, y, ax + by + c).$$

Tällöin $\partial f_x = (1, 0, a)$, $\partial f_y = (0, 1, b)$, ja pinta-alkioksi saadaan (vrt. Esimerkkiin 6.3)

$$\vec{dA} = (-a, -b, 1) dx dy.$$

Tässä esiintyvä vektori $(-a, -b, 1)$ on selvästi tason T kasvavan z -koordinaatin puoleinen normaali. Sen pituus on $\sqrt{1 + a^2 + b^2}$, joten

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}(-a, -b, 1).$$

Näin ollen pinnan S ala on

$$A(s) = \int_U \sqrt{1 + a^2 + b^2} dx dy$$

ja kysytty pintaintegraali puolestaan

$$\begin{aligned}\int_S \vec{s} \cdot d\vec{A} &= \int_U \vec{s} \cdot \sqrt{1+a^2+b^2} \vec{n} \, dx \, dy \\ &= \vec{s} \cdot \vec{n} \int_U \sqrt{1+a^2+b^2} \, dx \, dy \\ &= \vec{s} \cdot \vec{n} A(S).\end{aligned}$$

Kun pinta S koostuu useasta parametrisoidusta osasta, on osien suunnastusten kanssa oltava tarkkana. Aiemmin käytimme mielikuvaa, jossa kuvittelimme itsemme kävelemässä pitkin pinnan reunaa siten, että pinta pysyy vasemman käden puolella, ja tätä reunan kiertosuuntaa vastaavassa suunnastuksessa pinta-alkiovektorit $\vec{\Delta A}$ osoittivat päämme suuntaan. Jos jaamme parametrisoidun pinnan kahteen osaan piirtämällä pinnan keskelle uuden rajaviivan, niin kyseinen rajaviiva on tällöin osa kummankin osapinnan reunaa. Jotta osapintojen suunnastukset eivät rajaviivan lisäyksessä muuttuisi, niin uusi reunaviiva on "käveltävä" toisessa osapinnassa vastakkaiseen suuntaan, vertaa Kuvaan 5.13.

Käytämme tätä ajattelua mallina siihen, miten suunnastusten kanssa tulee toimia silloin, kun "liimaamme" kaksi sileästi parametrisoitua pintaa pitkin niiden yhteistä reunakäyrää. Sanomme, että palasten suunnastukset ovat *yhteensopivia*, jos ne osa-alueiden reunoinan "kävellään" vastakkaisiin suuntiin. Esimerkkinä tästä periaatteesta mietimme kuution pinnan suunnastusta. Asetetaan kuutio siten, että sen tahkot ovat koordinaattitasojen suuntaisia. Annetaan ylätahkolla suunnastus, jossa pinta-alkiovektorit osoittavat ylöspäin. Tätä vastaava yläreunan kiertosuunta on sellainen, missä ylhäällä edessä olevaa särmää kävellään vasemmalta oikealle. Kun haluamme antaa kuutio edessä olevalle tahkolle yhteensopivan suunnastuksen, kyseinen särmä on käveltävä oikealta vasemmalle. Tätä kiertosuuntaa vastaten etutahkolla pinta-alkiovektorit sitten osoittavat meitä kohti. Samaan päädytään siten, että suunnastetaan ensin iso paperiarkki. Asetetaan se kuution ylätahkon päälle siten, että sen pinta-alkiovektorit osoittavat ylöspäin. Kun se repimättä taitetaan kuution etutahkon päälle, paperin pinta-alkiovektorit kääntyvä jälleen osoittamaan kohti katsojaa.

Voidaan todistaa, että yhtenäisen, riittävän säännöllisen kolmiulotteisen kappaleen pinta voidaan suunnastaa yhteensopivasti kahdella eri tavalla, joista toisessa pinta-alkiovektorit kaikki osoittavat kappaleesta ulospäin, ja toisessa sisäänpäin. Usein näistä valitaan ulospäin osoittava suunnastus, ja käytän sitä kaikissa kurssin esimerkeissä, ks. Kuva 6.3. Jos samanlaista liimausta yritetään Möbiuksen lehdelle, Kuva 6.4, ajautaan seuraavaan ongelmaan. Liimattavilla osapinnoilla on kaksi erillistä yhteistä reunakäyrää, ja suunnastusten sovittaminen yhteen niistä toisella johtaa yhteensopimattomuuteen toisella.

Lause 6.10. *Oletetaan, että pinnalla S on paloittain sileä parametrisointi $f_i : U_i \rightarrow S_i$, missä palat S_i , $i = 1, 2, \dots, k$, leikkaavat vain reunakäyriään pitkin. Oletetaan lisäksi, että palaset S_i on suunnastettu yhteensopivalla tavalla. Tällöin kaikille vektorikentille ϕ*

$$\int_S \phi \cdot d\vec{A} = \sum_{i=1}^k \int_{S_i} \phi \cdot d\vec{A},$$

missä termeinä esiintyvät pintaintegraalit lasketaan Lauseen 6.8 määrittämällä tavalla.

Esimerkki 6.11. Olkoon S yksikkökuution $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [0, 1]\}$ pinta, ja $\phi = (s_1, s_2, s_3)$ vakiokenttä. Osoitetaan, että

$$\int_S \phi \cdot \vec{dA} = 0.$$

Ratkaisu. Tahkolla

$$S_1 = \{(x, y, 1) \mid x, y \in [0, 1]\}$$

on parametrisointi $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S_1, f(u, v) = (u, v, 1)$. Tälle $\partial_u f = (1, 0, 0)$ ja $\partial_v f = (0, 1, 0)$, joten $\partial_u f \times \partial_v f = (0, 0, 1)$ ja siis $\vec{dA} = (0, 0, 1) du dv$. Näin ollen

$$\int_{S_1} f \cdot \vec{dA} = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^1 s_3 du dv = s_3.$$

Huomaa, että ylätahkolla on normaalivektori $\vec{n}_1 = (0, 0, 1)$, ja että ylätahkon pinta-ala on $A(S_1) = 1$. Näin ollen tuloksemme on sama kuin Esimerkissä 6.9.

Tutkitaan seuraavaksi alatahkoa

$$S_6 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in [0, 1]\}.$$

Miten tämä tulee suunnastaa, jotta suunnastus olisi yhteensopiva? Ylätahkon reunalla särmä $E = \{(x, 0, 1) \mid x \in [0, 1]\}$ kuljetaan tässä suunnastuksessa vasemmalta oikealle. Näin ollen etutahkon

$$S_2 = \{(x, 0, z) \mid x, z \in [0, 1]\}$$

suunnastuksessa särmä E tulee kulkea oikealta vasemmalle. Kyseisessä suunnastuksessa etutahkon alareunan särmä $E' = \{(x, 0, 0) \mid x \in [0, 1]\}$ kuljetaan tällöin vasemmalta oikealle. Näin ollen yhteensopivassa alatahkon S_6 suunnastuksessa E' kuljetaan oikealta vasemmalle. Tätä kiertosuuntaa vastaa alatahkon alaspäin osoittava normaali. $\vec{n}_6 = (0, 0, -1)$. Näin ollen Esimerkin 6.9 mukaan

$$\int_{S_6} \phi \cdot \vec{dA} = A(S_6) \phi \cdot \vec{n}_6 = -s_3.$$

Näemme, että kentän ϕ integraalit yli tahkojen S_1 ja S_6 kumoavat toisensa. Tämä ei oikeastaan ole yllättävää, sillä kyseessä on vakiovirtausta vastaava kenttä, jolle ilmeisesti kuution K ylätahkolta virtaa ulos yhtä paljon kuin alatahkolta virtaa sisään.

Toistamalla vastaavat laskut kahdelle muulle vastakkaisten tahkojen pareilla päädymme väitettyyn tulokseen, $\int_S \phi \cdot \vec{dA} = 0$.

Esimerkki 6.12. Coulombin lain mukaan origossa sijaitseva pistemäinen sähkövaraus q luo ympärilleen sähkökentän

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{(x, y, z)}{r},$$

missä r on pallokoordinaatti $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ja $(x, y, z)/r$ on pisteeseen $P = (x, y, z)$ piirretty yksikkövektori, joka osoittaa pois päin origosta. Lasketaan kentän $\vec{F}$ vuo yli R -säteisen origokeskisen pallopinnan $S(R)$.

Ratkaisu. Skaalaamalla Esimerkin 6.1 parametrisointi R -säteiseksi saamme pinnalle $S(R)$ parametrisoinnin

$$\begin{cases} x(\phi, \theta) = R \cos \phi \sin \theta, \\ y(\phi, \theta) = R \sin \phi \sin \theta, \\ z(\phi, \theta) = R \cos \theta, \end{cases}$$

missä $\phi \in [0, 2\pi]$ ja $\theta \in [0, \pi]$.

Toistamalla Esimerkin 6.2 lasku saamme pinta-alkioksi,

$$\vec{dA} = \partial f_\theta \times \partial f_\phi d\theta d\phi = R^2(\sin^2 \theta \cos \phi, \sin^2 \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \theta) d\theta d\phi.$$

Yksikkövektori

$$\frac{1}{R}(x, y, z) = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta),$$

joten

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{dA} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} R^2 (\sin^3 \theta \cos^2 \phi + \sin^3 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta d\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (\sin^3 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta d\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \int_{S(R)} \vec{F} \cdot \vec{dA} &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta d\phi d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{q}{2\epsilon_0} \sin \theta d\theta \\ &= q/\epsilon_0. \end{aligned}$$

Kentän $\vec{F}$ vuo ei siis riipu pallon säteestä R . Sähköopissa tämä vastaa mielikuvaa siitä, että kentän voima-
viivat eivät katkea. Säteen kasvaessa vuon tiheys pienenee käänteisen neliön lain mukaisesti, mutta koska
pallopinnan ala kasvaa vastaavasti etäisyyden neliöön verrannollisesti, niin kentän vuo yli koko pallopinnan
ei muutu pallon säteen funktiona.

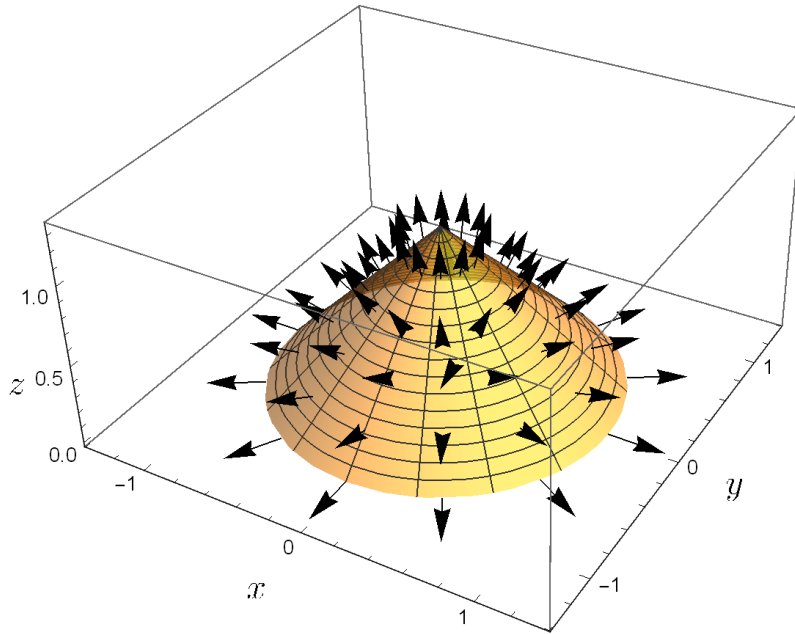
Esimerkki 6.13. Lasketaan vektorikentän $f(x, y, z) = (x, y, z)$ integraali yli sen suoran ympyräkartion
vaipan S , jonka akseli on z -akselilla, huippu pisteessä $(0, 0, 1)$, ja pohjaympyrä tasolla $z = 0$, säde $= 1$.

Ratkaisu. Sylinterikoordinaateissa (r, ϕ, z) kyseisen kartion vaipan yhtälö on selvästi $r = 1 - z$ (vaihtoehtoisesti se saadaan janan $z = 1 - x$, $x \in [0, 1]$, pyörähtaessä z -akselin ympäri). Näin ollen vaipalle saadaan
sylinterikoordinaattien avulla parametrisointi

$$\begin{cases} x(\phi, z) = (1 - z) \cos \phi, \\ y(\phi, z) = (1 - z) \sin \phi, \\ z(\phi, z) = z, \end{cases}$$

missä $\phi \in [0, 2\pi]$ ja $z \in [0, 1]$. Osittaisderivoimalla saadaan parametrisointifunktion

$$f(\phi, z) = (x(\phi, z), y(\phi, z), z)$$



Kuva 6.8: Vektorikenttä (x, y, z) kartion pinnalla

derivaataksi

$$\partial f_\phi = (-(1-z)\sin\phi, (1-z)\cos\phi, 0),$$

$$\partial f_z = (-\cos\phi, -\sin\phi, 1).$$

Pinta-alkioksi saadaan siis

$$\vec{dA} = \partial f_\phi \times \partial f_z d\phi dz = (1-z)(\cos\phi, \sin\phi, 1) d\phi dz.$$

Huomaa, että käsiteltävänä olevassa kartion osassa $1-z > 0$, joten pinta-alkiovektori osoittaa ylöspäin ja ulospäin.

Kuvassa 6.8 on kuvattu vektorikenttä $f(x, y, z)$ kartion vaipalla S . Koska kenttä osoittaa suoraan pois päin origosta, se ei ole aivan vaipan ulospäin suuntautuneen normaali suuntainen. Selvästi kuitenkin kentän vuo pinnan läpi on kaikkialla positiivinen, joten meillä on syytä odottaa nollasta eroavaa pinta-integraalia.

Pinnalla S sisätulo $f(x, y, z) \cdot \vec{dA}$ on

$$\begin{aligned} \vec{f} \cdot \vec{dA} &= ((1-z)\cos\phi, (1-z)\sin\phi, z) \cdot (1-z)(\cos\phi, \sin\phi, 1) d\phi dz \\ &= ((1-z)^2\cos^2\phi + (1-z)^2\sin^2\phi + z(1-z)) d\phi dz \\ &= ((1-z)^2 + z(1-z)) d\phi dz \\ &= (1-z) d\phi dz. \end{aligned}$$

Näin ollen integraaliksi saadaan

$$\begin{aligned}\int_S (x, y, z) \cdot \vec{dA} &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 (1-z) dz d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} d\phi \\ &= \pi.\end{aligned}$$

6.4 Divergenssilause

Jos $V \subseteq \mathbb{R}^3$ on avoin joukko, ja $f = (f_1, f_2, f_3) : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ on vähintään C^2 -luokan vektorikenttä, niin funktiota $V \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

kutsutaan kentän f *divergenssiksi*. Etenkin vanhemmissa suomenkielisissä teksteissä divergenssin asemesta puhutaan *lähteisyydestä*.

Esimerkki 6.14. Jos $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on "paikkavektorikenttä" $f(x, y, z) = (x, y, z)$, niin näemme, että

$$\nabla \cdot f(x, y, z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

on avaruuden dimensio.

Esimerkki 6.15. Osoitetaan, että origon ulkopuolella Esimerkin 6.12 pistemäisen varauksen luoman sähkökentän

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{(x, y, z)}{r},$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, divergenssi häviää.

Ratkaisu. Ketjusäännön avulla osittaisderivoimalla nähdään, että

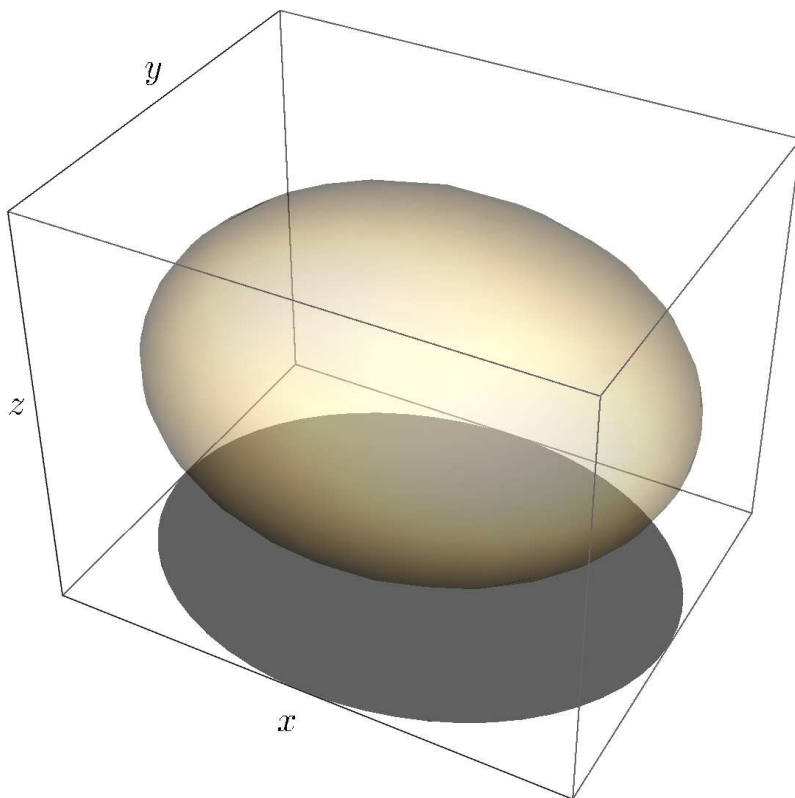
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot (2x) = \frac{x}{r}.$$

Kentän $\vec{F}$ ensimmäinen komponentti on vakiokerrointa vaille x/r^3 . Tulon derivoimiskaavalla

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}.\end{aligned}$$

Muille komponenteille saadaan vastaavat kaavat. Näin ollen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{F} &= \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) \\ &= \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.\end{aligned}$$



Kuva 6.9: Yksinkertainen kappale, ja sen projektio xy -tasolla.

Huomaa kuitenkin, että kenttä $\vec{F}$ ei ole edes määritelty origossa, ja $\|\vec{F}\| \rightarrow \infty$ origoa lähestyttäessä. Voidaankin tulkita luonnollisella tavalla, että origossa sijaitseva varaus on tämän kentän ainoa lähde.

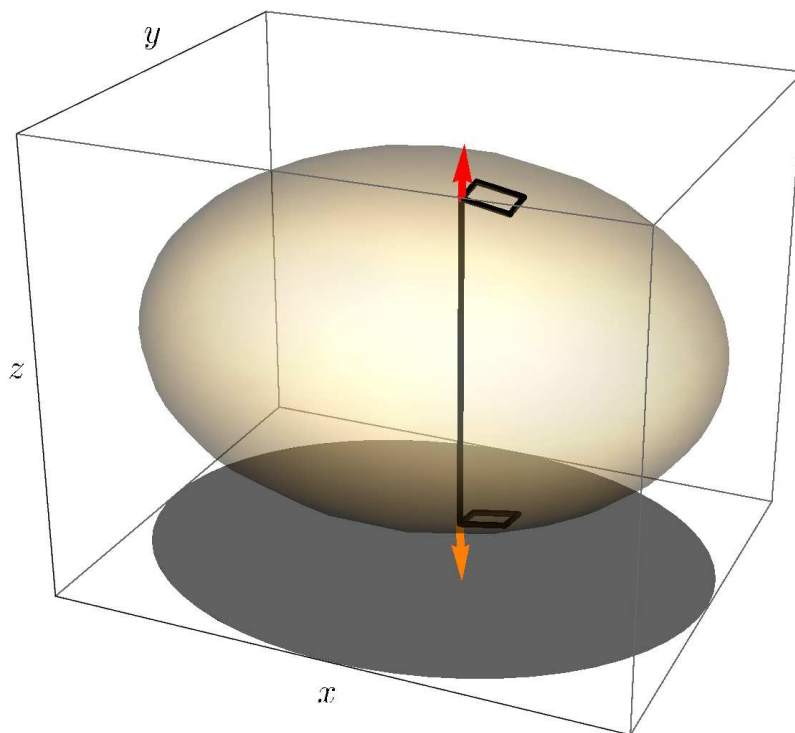
Divergenssilause liittää vektorikentän integraalin yli 3-ulotteisen kappaleen reunapinnan sen divergenssin integraaliin yli itse kappaleen. Jotta kaikki esiintyvät integraalit olisivat varmasti olemassa, joudumme oletamaan säännöllisyysominaisuuksia sekä kentästä että kappaleesta.

Lause 6.16. (*Divergenssilause*). Oletetaan, että $K \subset \mathbb{R}^3$ on kompakti joukko. Oletetaan lisäksi, että sen reuna ∂K on äärellisen monen sileästi parametrisoidun pinnan unioni. Suunnastetaan ∂K siten, että kaikkialla pinta-alkiovektorit $\vec{dA}$ osoittava ulospäin, eli pois päin K :n sisäosasta. Oletetaan, että vektorikenttä $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ on vähintään luokkaa C^2 joukossa K . Tällöin

$$\int_K \nabla \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial K} \vec{F} \cdot \vec{dA}.$$

Todistus. Kuten Greenin Lausetta pohtiessamme täsmällinen todistus edellyttäisi joukon epätriviaaleja topologisia ja geometrisia aputuloksia. Tyydymme siis samanlaiseen käsittelyyn kuin Greenin Lauseenkin kohdalla. Oletetaan ensin, että joukko K on seuraavassa mielessä yksinkertainen:

- Joukolla K on yläreuna ja alareuna siinä mielessä, että jos merkitään K :n projektio xy -tasolla K_z :lla, niin on olemassa sellaiset funktiot C^1 -luokan funktiot $z_1, z_2 : K_z \rightarrow \mathbb{R}$ että $(x, y, z) \in K$ silloin ja



Kuva 6.10: Pinta-alkiot yksinkertaisen kappaleen ylä- ja alareunoilla

vain silloin, kun $(x, y) \in K_z$ ja $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$. Tämä vastaa mielikuvaa, jonka mukaan K :n yläreuna on pinnalla $z = z_2(x, y)$ ja alareuna pinnalla $z = z_1(x, y)$.

- Vastaavasti edellytämme, että joukolla K on vasen ja oikea reuna $y = y_1(x, z)$, $y = y_2(x, z)$, missä pari (x, z) käy läpi K :n projektioon xz -tasolla kuuluvat pisteet.
- Edelleen edellytämme, että joukolla K on etu- ja takareunat $x = x_1(y, z)$, $x = x_2(y, z)$, missä $(y, z) \in K_x$ käy läpi K :n projektioon yz -tasolla kuuluvat pisteet.

Mielikuva on siis kupera ja sileä munamainen möhkäle kuten Kuvassa 6.9, missä on myös kuvattuna xy -tason projektio K_z .

Käsitellään vektorikenttää $\vec{F}$ komponentti kerrallaan. Osoitetaan ensin, että

$$\int_{\partial K} (0, 0, f_3(x, y, z)) \cdot \vec{dA} = \int_K \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz.$$

Tässä tapauksessa pinta ∂K kannattaa jakaa kahteen osaan. Yläreunaan S_1 , jolla on parametrisointi $(x, y, z) = (x, y, z_2(x, y))$ ja alareunaan S_2 , jolla on parametrisointi $(x, y, z) = (x, y, z_1(x, y))$. Esimerkin 6.3 laskun nojalla yläreunalla

$$\vec{dA} = (-\partial_x z_2(x, y), -\partial_y z_2(x, y), 1) dx dy,$$

mutta alareunalla käytämme ulospäin suuntautuvan suunastuksen saamiseksi vastavektoria

$$\vec{dA} = (\partial_x z_1(x, y), \partial_y z_1(x, y), -1) dx dy.$$

Kummassakin tapauksessa (x, y) käy läpi projektion K_z pisteet. Näin ollen

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} (0, 0, f_3) \cdot \vec{dA} &= \int_{S_1} + \int_{S_2} \\ &= \int_{K_z} f_3(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \int_{K_z} f_3(x, y, z_1(x, y)) dx dy \\ &= \int_{K_z} (f_3(x, y, z_2(x, y)) - f_3(x, y, z_1(x, y))) dx dy.\end{aligned}$$

Toisaalta Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}\int_K \partial_z f_3(x, y, z) dz dx dy &= \int_{K_z} \left(\int_{z=z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \partial_z f_3(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \int_{K_z} \left|_{z=z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f_3(x, y, z) dx dy \right. \\ &= \int_{K_z} (f_3(x, y, z_2(x, y)) - f_3(x, y, z_1(x, y))) dx dy,\end{aligned}$$

eli sama integraali.

Vastaavasti nähdään, että $\int_{\partial K} (0, f_2, 0) \cdot \vec{dA} = \int_K \partial_y f_2 dV$ ja $\int_{\partial K} (f_1, 0, 0) \cdot \vec{dA} = \int_K \partial_x f_1 dV$. Väite seuraa laskemalla nämä yhtälöt yhteen puolittain. $\square$

Huomautus 6.17. Kuten Greenin Lauseenkin yhteydessä, näemme, että oleellinen askel itse asiassa oli kurssilta Analyysi II tuttu *Analyysin Peruslause*. Sama toistuu vielä seuraavassa pykälässä Stokesin Lauseen kohdalla.

Huomautus 6.18. Kuten Greenin Lauseenkin tapauksessa monimutkaisempi kappale voidaan jakaa yksinkertaisiin osiin lisäämällä väliaikaisia reunapintoja. Päättelyissä käytetään hyväksi sitä, että integraalit yli saman mutta vastakkaisilla suunnastuksilla varustetun pinnan ovat toistensa vastalukuja. Näin ollen väliaikaisen lisäreunan vaikutus kumoutuu.

Esimerkki 6.19. Jatketaan hetki Esimerkin 6.12 pintaintegraalien kanssa. Näimme, että kentän $\vec{F}$ integraali yli origokeskisen R -säteisen pallon ulospäin suunnatun pinnan $S(R)$ yli oli säteestä riippumaton vakio q/ϵ_0 . Jos K on pallopintojen $S(R_1)$ ja $S(R_2)$, $0 < R_1 < R_2$, rajaama "kuori", niin tuloksemme mukaan pintaintegraali yli reunan ∂K on $\int_{S(R_2)} - \int_{S(R_1)} = (q/\epsilon_0) - (q/\epsilon_0) = 0$. Toisaalta näimme Esimerkissä 6.15, että $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ kuorella K . Näin ollen divergenssilause antaa meille saman tuloksen.

Esimerkki 6.20. Näimme, että paikkavektorikentän $\vec{r} = (x, y, z)$ divergenssi on vakio 3. Näin ollen divergenssilauseen nojalla sileäreunaisen kappaleen K tilavuudelle V saadaan kaava

$$3V = \int_K 3 dx dy dz = \int_K \nabla \cdot \vec{r} dx dy dz = \int_{\partial K} \vec{r} \cdot \vec{dA}.$$

Kappaleen tilavuus on siis paikkavektorikentän integraali yli sen pinnan jaettuna kolmella. Tarkistetaan tämä Esimerkin 6.13 kartiolle.

Ratkaisu. Laskimme Esimerkissä 6.13, että yli kartion vaipan S

$$\int_S \vec{r} \cdot d\vec{A} = \pi.$$

Kartion K reunaan ∂K kuuluu vaipan S lisäksi kartion pohjalevy

$$D = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Pohjalevyn ulospäin suuntautuva normaali osoittaa suoraan alas vektorin $\vec{n} = (0, 0, -1)$ suuntaan. Koko levyllä D on voimassa $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$. Näin ollen $\int_D \vec{r} \cdot d\vec{A} = 0$. Samaan päädytään tekemällä havainto, että kartion pohjalla paikkavektorikenttä on pohjalevyn tason suuntainen.

Joka tapauksessa

$$\int_{\partial K} \vec{r} \cdot d\vec{A} = \int_S + \int_D = \pi + 0 = \pi.$$

Muistamme geometriasta että suoran ympyräkartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Kartiolle K on $r = h = 1$, joten sen tilavuus on $V = \pi/3$. Näin ollen $3V = \int_{\partial K} \vec{r} \cdot d\vec{A}$ kuten divergenssilauseen nojalla pitääkin olla.

Divergenssilause johtaa seuraavaan vektorikentän divergenssin tulkintaan. Kuvitellaan pieni laatikko $K = [x_0 - \Delta x/2, x_0 + \Delta x/2] \times [y_0 - \Delta y/2, y_0 + \Delta y/2] \times [z_0 - \Delta z/2, z_0 + \Delta z/2]$ pisteen (x_0, y_0, z_0) ympärille. Pintaintegraali tulkinta vektorikentän vuona johtaa silloin siihen, että $\int_{\partial K} \vec{f} \cdot d\vec{A}$ laskee kentän "nettovuon" ulospäin laatikosta K , missä virtaus laatikosra ulospäin jonkin tahkon läpi on plusmerkkistä, ja virtaus laatikon sisään miinusmerkkistä. Divergenssilauseen nojalla sama integraali on $\int_K \nabla \cdot \vec{f} dV$. Jos laatikko on hyvin pieni, niin osittaisderivaattojen jatkuvuuden nojalla divergenssi ei juuri muutu, ja $\int_K \nabla \cdot \vec{f} dV \approx (\nabla \cdot \vec{f})(x_0, y_0, z_0) \Delta x \Delta y \Delta z$. Divergenssi saadaan jakamalla tämä integraali laatikon tilavuudella $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Näin ollen

Vektorikentän divergenssi mittaa kentän nettovuota tilavuusyksikköä kohti pienestä laatikosta.

6.5 Stokesin lause

Palautetaan mieleen avoimessa joukossa $V \subseteq \mathbb{R}^3$ määritellyn C^2 -luokan vektorikentän $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ *roottori*, joka määritellään muodollisena ristitulona

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = (\partial_y f_3 - \partial_z f_2, \partial_z f_1 - \partial_x f_3, \partial_x f_2 - \partial_y f_1).$$

Vanhemmissa teksteissä puhutaan roottorin asemesta kentän *pyörteisyydestä*.

Esimerkki 6.21. Osoitetaan, että origossa sijaitsevan pistemäisen varauksen q luoma sähkökenttä

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{(x, y, z)}{r},$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ on *pyörteetön*, eli $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

Ratkaisu. Johdimme Esimerkin 6.15 yhteydessä kaavat $\partial_x r = x/r$, $\partial_y r = y/r$ ja $\partial_z r = z/r$. Roottorin $\nabla \times \vec{F}$ ensimmäistä komponentti varten tarvitsemme osittaisderivaatan

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_3}{\partial y} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial(z/r^3)}{\partial y} \\ &= -3 \frac{qz}{4\pi\epsilon_0} r^{-4} \partial_y r \\ &= \frac{-3qyz}{4\pi\epsilon_0 r^5}\end{aligned}$$

sekä osittaisderivaatan

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial(y/r^3)}{\partial z} \\ &= -3 \frac{qy}{4\pi\epsilon_0} r^{-4} \partial_z r \\ &= \frac{-3qyz}{4\pi\epsilon_0 r^5}.\end{aligned}$$

Koska nämä yhtyvät, roottorin 1. komponentti häviää. Vastaavat laskut osoittavat myös muiden komponenttien häviävän.

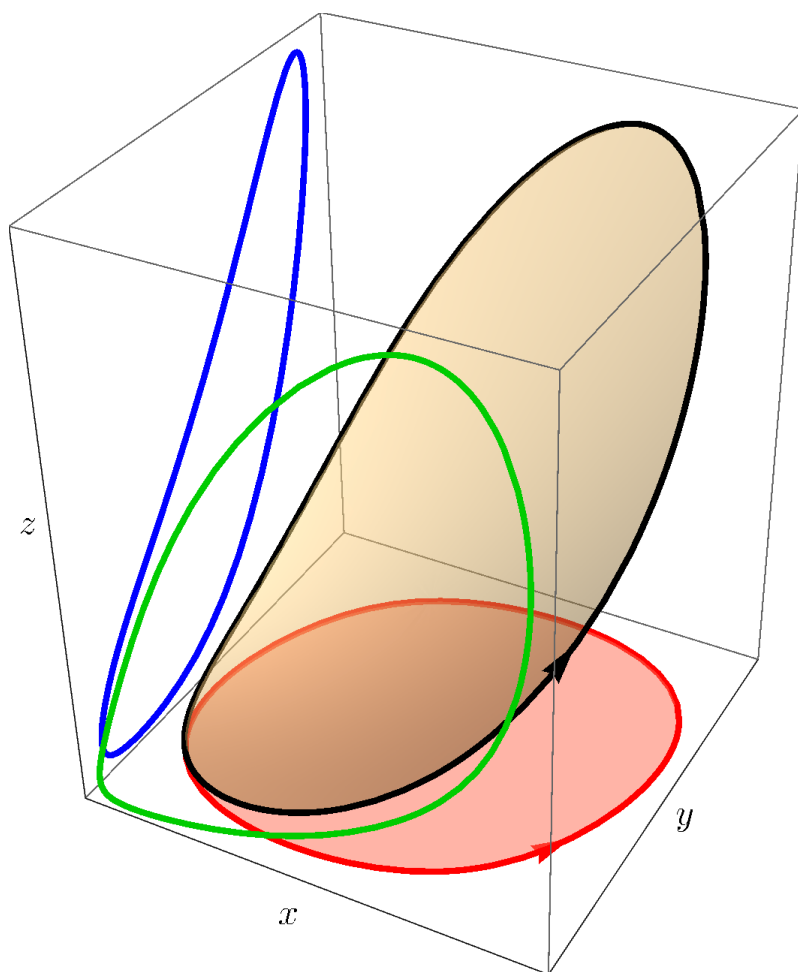
Kuten Greenin Lause ja Divergenssilausekin seuraavaksi kuvailtava *Stokesin Lause* sitoo toisiinsa kaksi erilaista integraalia. Toisessa lasketaan annetun kentän roottorin pintaintegraali yli 3-ulotteisen avaruuden rajoitetun pinnan S , toisessa taas lasketaan kyseisen kentän integraali yli pinnan S reunakäyrän $\gamma = \partial S$. Koska γ kiertää, koko pinnan S , se on sulkeutuva käyrä. Arvattavasti kiertosuunta on valittava pinnan S suunnastusta vastaavasti — jos kuvittelemme itsemme kävelemään pitkin reunakäyrää γ siten, että päämme osoittaa pinta-alkiovektorien suuntaan, niin kulkusuunta määräytyy siitä, että pinta on vasemman käden puolella.

Lause 6.22. (*Stokesin Lause*) Oletetaan, että S rajoitettu sileästi parametrisoitu pinta avaruudessa $\mathbb{R}^3$, ja γ sen yhteensopivasti suunnastettu rajoitettu reunakäyrä. Oletetaan, että vektori kenttä $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ on luokkaa vähintään C^2 avoimessa joukossa, joka sisältää pinnan S reunoineen. Tällöin

$$\oint_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_S (\nabla \times \vec{f}) \cdot d\vec{A}.$$

Todistus. Tuttuun tapaan käsittelemme vain "yksinkertaisen tapauksen", johon monimutkaisemmat tilanteet palautuvat halkaisemalla pinta S useampaan osaan ylimääräisiä reunoja lisäämällä. Oletetaan siis, ensin, että S on sellaisessa asennossa, että reunakäyrän γ projektiot γ_x, γ_y ja γ_z koordinaattitasoille ovat pinnan S vastinprojektioiden S_x, S_y ja S_z reunakäyriä. Lisäksi oletamme, että projektiokuvaukset $S \rightarrow S_x, S_y, S_z$ ovat injektioita, eli minkä tahansa koordinaattiakselin suuntainen suora leikkaa pinnan S enintään yhdessä pisteessä. Näin ollen käytettävissämme on pinnalle S kolme eri parametrisointia $S_x \rightarrow S, S_y \rightarrow S, S_z \rightarrow S$ ja oletamme, että ne ovat sileitä (mahdollisesti nollajoukkoa lukuun ottamatta).

Kuvassa 6.11 on kuvattu mustareunainen pinta, jonka projektiolla on vaadittu ominaisuus. Projektiio γ_x on kuvattu sinisellä, γ_y vihreällä ja γ_z sekä S_z punaisella.



Kuva 6.11: Pinta, jonka reunakäyrän projektiot ovat pinnan vastinprojektioiden reunakäyriä

Koska sekä käyrä- että pintaintegraalit kunnioittavat vektorikenttien summia, riittää käsitellä kenttää $\vec{f}$ komponentti kerrallaan. Otetaan tarkasteltavaksi kenttä $(f_1, 0, 0)$. Sen roottori on

$$\nabla \times (f_1, 0, 0) = (0, \frac{\partial f_1}{\partial z}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}).$$

Koska z -akselin suuntaiset suorat leikkaavat pinnan S enintään yhdessä pisteessä, sillä on parametrisointi $\phi : (x, y) \mapsto (x, y, z(x, y))$, missä $z(x, y)$ on vähintään luokkaa C^2 . Tätä parametrisointia vastaa pinta-alkio (ks. Esimerkki 6.3)

$$\vec{dA} = (-z_x, -z_y, 1) dx dy.$$

Huomaa, että tässä oletamme (kuten Kuvassa 6.11), että pinnan S suunnastus on sellainen, että pinta-alkiovektorin $\vec{dA}$ z -komponentti on positiivinen. Jos näin ei ole, niin alla olevissa laskuissa teemme merkkivirheen, koska se perustuu vastakkaiseen suunnastukseen.

Pintaintegraalin integrandina on siis

$$\nabla \times (f_1, 0, 0) \cdot \vec{dA} = (-z_y \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial y}) dx dy.$$

Otetaan käyttöön apufunktio $F_1 : S_z \rightarrow \mathbb{R}$, $F_1(x, y) = f_1(x, y, z(x, y))$. Ketjusäännön nojalla

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + z_y \frac{\partial f_1}{\partial z},$$

joten edeltävä laskumme sanoo, että

$$\nabla \times (f_1, 0, 0) \cdot \vec{dA} = -\frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy.$$

Näin ollen pintaintegraaliksi saadaan

$$I = \int_S \nabla \times (f_1, 0, 0) \cdot \vec{dA} = \int_{S_z} (-\frac{\partial F_1}{\partial y}) dx dy.$$

Toisaalta soveltamalla Greenin Lausetta alueeseen S_z saadaan

$$I = \int_{\gamma_z} F_1(x, y) dx = \int_{\gamma} f_1(x, y, z) dx,$$

sillä käyrän γ parametrisointi $(x(t), y(t), z(t))$ saadaan käyrän γ_z parametrisoinnista $(x(t), y(t), 0)$ asettamalla $z(t) = z(x(t), y(t))$. Koska dx on ainoa tässä käyräintegraalissa esiintyvä differentiaali, niin olemme näyttäneet, että

$$\int_S \nabla \times (f_1, 0, 0) \cdot \vec{dA} = \int_{\gamma} (f_1, 0, 0) \cdot (dx, dy, dz).$$

Huomaa jälleen, että mikäli pinnan S suunnastus olisi sellainen, että pinta-alkiovektorien z -komponentit olisivatkin negatiivisia, niin projisoitu reunakäyrä γ_z kiertäisikin pinnan projektiota S_z negatiiviseen kierto-suuntaan. Tästä aiheutuva merkkivirhe kuitenkin kompensoituu aiemmin tekemämme merkkivirheen kanssa.

Stokesin Lauseen väite seuraa käsitellyssä tapauksessa tekemällä vastaavat laskut vektorikentille $(0, f_2, 0)$ ja $(0, 0, f_3)$ ja laskemalla saadut tulokset yhteen. $\square$

Huomautus 6.23. Jos Stokesin Lauseessa oletamme, että pinta S on tasolla $z = 0$, ja vektorikenttä $\vec{f} = (f_1, f_2, 0)$ on sekin oleellisesti 2-ulotteinen, niin tällöin

$$\nabla \times \vec{f} = (0, 0, \partial_x f_2 - \partial_y f_1, 0),$$

ja pinta-alkiovektori

$$\vec{dA} = (0, 0, 1) dx dy$$

osoittaa z -akselin suuntaan. Näin ollen pintaintegraali

$$\int_S \nabla \times \vec{f} \cdot \vec{dA} = \int_S (\partial_x f_2 - \partial_y f_1) dx dy$$

ja

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot (dx, dy, dz) = \int_\gamma f_1 dx + f_2 dy.$$

Nämä yhtyvät Greenin Lauseen 5.14 nojalla.

Huomautus 6.24. Stokesin Lauseen yleisempien versioiden perustelussa "paloittelutekniikka" ei aina ole aivan ongelmaton. Jos esimerkiksi jokin osa pinnasta S on kohtisuorassa jotakin koordinaattitasoa vastaan, niin paloittelu ei saa aikaan tilannetta, jossa projektio ko. koordinaattitasolle käyttäytyisi halutulla tavalla. Tällaisessa poikkeustilanteessa kuitenkin reunakäyrän projektio on vastaavasti degeneroitunut samaa viivaa pitkin edestakaisin sahaavaksi käyräksi, jolloin tapahtuu ilmeistä kumoutumista. Jätämme yksityiskohdat Stokesin Lauseen perustelemiseksi tällaisessa tapauksessa harjoitustehtäväksi.

Esimerkki 6.25. Origokeskisellä puolipallopinnalla $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$ on reunakäyränä pallon "päiväntasaaja" $\gamma(\phi) = (R \cos \phi, R \sin \phi, 0), \phi \in [0, 2\pi]$. Tarkistetaan Stokesin Lause pinnalle S ja vektorikentälle

$$\vec{f} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(-y, x, 0).$$

Ratkaisu. Osittaisderivoimalla saadaan

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}(xz, yz, z^2).$$

Esimerkissä 6.12 saimme pallon pinta-alkioksi pallokoordinaateissa

$$\vec{dA} = R^2(\sin^2 \theta \cos \phi, \sin^2 \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \theta) d\theta d\phi.$$

Roottorin $\nabla \times \vec{f}$ arvo pinnan pisteessä

$$\begin{cases} x(\phi, \theta) = R \cos \phi \sin \theta, \\ y(\phi, \theta) = R \sin \phi \sin \theta, \\ z(\phi, \theta) = R \cos \theta, \end{cases}$$

on siis

$$\nabla \times \vec{f}(x(\phi, \theta), y(\phi, \theta), z(\phi, \theta)) = \frac{2}{R^2}(\cos \phi \sin \theta \cos \theta, \sin \phi \sin \theta \cos \theta, \cos^2 \theta).$$

Integroitavaksi tulee näin

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{f} \cdot \overrightarrow{dA} &= 2(\cos^2 \phi \sin^3 \theta \cos \theta + \sin^2 \phi \sin^3 \theta \cos \theta + \sin \theta \cos^3 \theta) d\theta d\phi \\ &= 2(\sin^3 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta \sin \theta) d\theta d\phi \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi = \sin 2\theta d\theta d\phi.\end{aligned}$$

Roottorin integraali yli puolipallon pinnan on siis

$$\int_S \nabla \times \vec{f} \cdot \overrightarrow{dA} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta d\phi = 2\pi.$$

Päiväntasaajalla γ on $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ja

$$\vec{dr} = R(-\sin \phi, \cos \phi, 0) d\phi,$$

joten käyräintegraalin integrandiksi tulee

$$\vec{f}(\gamma(\phi)) \cdot \vec{dr} = (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) d\phi = d\phi,$$

ja käyräintegraaliksi

$$\oint_{\gamma} \vec{f}(\gamma(\phi)) \cdot \vec{dr} = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 2\pi,$$

kuten Stokesin Lauseen nojalla pitikin.