

Vektorilaskenta

Demonstraatiotehtävät II, 15.09.2020

Tehtävä 1. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^2$ neljännestaso, jossa $x > 0$ ja $y > 0$. Tutkitaan funktiota

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Tarkista osittaisderivoimalla, että $f_x = y/(x^2 + y^2)$ ja $f_y = -x/(x^2 + y^2)$. Helpompia osittaisderivointi harjoituksia ViLLEssä!

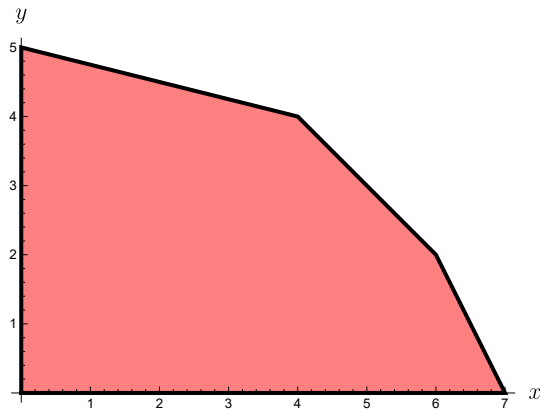
Tehtävä 2. Hävittäjäkone lentää vakiokorkeudella h kaksinkertaisella äänennopeudella reittiä, joka vie sen suoraan maan pinnalla olevan havaitsijan ylitse. Miten kaukana (vaakasunnassa) hävittäjäkone on sillä hetkellä, kun sen ja havaitsijan välinen etäisyys pienenee äänen nopeudella? Monisteen Esimerkki 2.4. auttaa. Voit lisätehtävänä (ainakin jos olet fyysikko) miettiä, miksi koneen kyseisessä paikassa synnyttämä ääni on se, jonka havaitsija ensimmäiseksi kuulee.

Tehtävä 3. Oletetaan, että funktioiden $f(x, y)$ ja $g(x, y)$ osittaisderivaatat ovat jatkuvia avoimessa joukossa $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Selitä, miksi niiden tulon fg gradientille on voimassa sääntö

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

kaikkialla A :ssa? Vinkki: Mites se tulon derivoimiskaava menikään?

Tehtävä 4. Käyrät $y = x^2$ ja $y = 2 - x$ leikkaavat kahdessa pisteessä, $P_1 = (x_1, y_1)$ ja $P_2 = (x_2, y_2)$. Etsi ne ratkaisemalla tämä yhtälöpari. Miksi kummassakin leikkauspisteessä funktion $h(x, y) = (y - x^2)(2 - y - x)$ gradientti häviää? Vinkki: Auttaisiko edellinen tehtävä? Tämä tehtävä saa jatkoa, kun ehdimme lukuun 4.

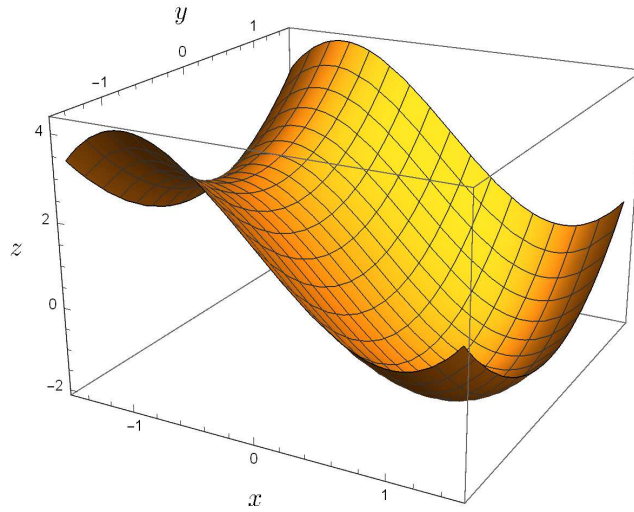


Tehtävä 5. Yllä on kuva tason monikulmiosta A , jonka kärjet ovat origon lisäksi pisteissä $(0, 5)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$ ja $(7, 0)$. Missä joukon A pisteessä funktio $f(x, y) = x + 3y$ saa suurimman arvonsa? Entä funktio $g(x, y) = 3x + 2y$? Mitä hivenen poikkeuksellista tapahtuu funktiolla $h(x, y) = x + y$? Vinkki: Gradienttia ja suunnattua derivaattaa voi käyttää kuten monisteen Esimerkkissä 2.18. Kai tämän voi runtata läpi myös jotenkin toisin :-)

Tehtävä 6. Laske funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z$$

gradientti pisteessä $Q = (2, 0, 1)$. Laske myös suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{u}}f(Q)$ kun $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$ ja kun $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$.



Tehtävä 7. Yllä on erään suorakaiteessa $S = \{(x, y) \mid x, y \in [-3/2, 3/2]\}$ määritellyn funktion f kuvaajapinta $z = f(x, y)$. Alla on kuvattu kolme vektorikenttää joukossa S . Mikä niistä on mielestäsi funktion f gradientti $\nabla f(x, y)$?

