

Vektorilaskenta

Demonstraatiotehtävät III, 22.09.2020

Tehtävä 1. Tasolla $\mathbb{R}^2$ oleva käyrä annetaan joskus napakoordinaattien avulla muodossa $r = f(\phi)$, missä f on suuntakulman ϕ funktio. Tällöin suuntakulman arvoon ϕ liitetään piste, jonka x -koordinaatti on $x = r \cos(\phi) = f(\phi) \cos \phi$ ja vastaavasti y -koordinaatti $y = r \sin(\phi) = f(\phi) \sin \phi$. Selvitetään millainen käyrä muodostuu, kun käytetään funktiota $f(\phi) = 2 \sin \phi$, ja rajataan suuntakulma välille $\phi \in [0, \pi]$.

A) Mitkä pisteet (x, y) saadaan, kun suuntakulmalle annetaan arvot $\phi = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$.

B) Osoita trigonometrysten kaavojen avulla, että kaikilla ϕ :n arvoilla saatava xy -tason piste on etäisyydellä yksi pisteestä $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Tehtävä 2. Olkoot $f(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ ja $g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ annetut funktiot $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Määrittää ketjusääntöä käyttäen yhdistetyn funktion $f \circ g$ Jacobin matriisi pisteessä $(x, y) = (0, \pi/4)$.

Tehtävä 3. Jos $U \subseteq \mathbb{R}^3$ on avoin ja kentän $f = (f_1, f_2, f_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ komponentit ovat osittaisderivaattojen jatkuvia joukossa U , niin voimme muodostaa kentän f roottorin "muodollisena ristitulona"

$$\nabla \times f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = (\partial_y f_3 - \partial_z f_2, \partial_z f_1 - \partial_x f_3, \partial_x f_2 - \partial_y f_1),$$

mikä on siis toinen vektorikenttä $U \rightarrow \mathbb{R}^3$, sekä "muodollisena sisätulona" divergenssin

$$\nabla \cdot f = \partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3,$$

mikä puolestaan on funktio $U \rightarrow \mathbb{R}$. Oletetaan, että $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ja $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ovat luokkaa C^2 . Selitä, miksi sekaderivaattojen järjestyksenvaihtosäännön vuoksi tällöin

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \vec{0},$$

ja

$$\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0.$$

Tehtävä 4. Demotehtävässä II/1 laskimme funktion

$$f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

osittaisderivaatat f_x ja f_y . Tarkista, että sekaderivaattojen järjestyksenvaihtosääntö on tässä voimassa, eli laske derivaatat

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f_y}{\partial x}$$

ja varmistu siitä, että tässäkin tapauksessa ne yhtyvät alueessa $x > 0, y > 0$.

Tehtävä 5. Ns. pallokoordinaatit ovat napakoordinaattien eräs yleistys 3-ulotteiseen avaruuteen. Pallokoordinaateista käytetään usein symboleja (r, θ, ϕ) . Näiden geometrisestä merkityksestä enemmän monisteen kolmannen luvun loppupuolella. Differentiaali- ja integraalilaskennan menetelmien käyttö perustuu funktion $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$g(r, \theta, \phi) = (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)$$

käyttöön: $(x, y, z) = g(r, \theta, \phi)$.

A) Muodosta funktion g Jacobin matriisi $J = Dg(r, \theta, \phi)$. Vinkki: Vastauksesi voit tarkistaa monisteen sivulta 87.

B) Tarkista sisätuloja laskemalla, että matriisin J kolme saraketta ovat kaikki toisiaan vastaan kohtisuorassa. Osoita lisäksi, että niiden pituudet ovat 1, r ja $r \sin \theta$. Voit olettaa, että $r \geq 0$, ja että θ on välillä $[0, \pi]$.

Tehtävä 6. Laske funktion $f(x, y) = 2x + xy^2$ integraali yli välin $I = [0, 2] \times [0, 2]$ iteroituna integraalina molemmilla tavoilla.

Tehtävä 7. Laske funktion $g(x, y) = xe^{3x+2y}$ integraali yli välin $I = [0, 2] \times [0, 3]$. Vinkki: x -integroinnissa tarvitset osittaisintegrointia (kerta tarvittaessa kurssilta *Analyysi II(A)*). Tarkistuksena paljastan, että vastauksessa esiintyy luvun e korkeahkoja potensseja.