

Vektorilaskenta

Demonstraatiotehtävät V, 06.10.2020

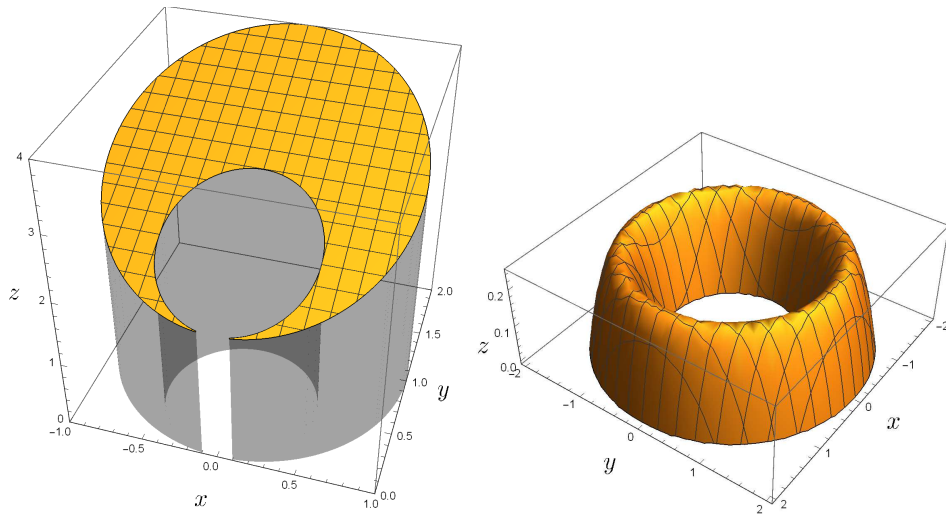
Tehtävä 1. Olkoon S yksikkökuution $[0, 1]^3$ se osa, jossa koordinaatit ovat järjestyksessä $x \leq y \leq z$, eli

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [0, 1], x \leq y \leq z\}.$$

Laske funktion $f(x, y, z) = x$ integraali yli joukon S . Laske myös joukon S tilavuus. Mikä on tämän perusteella joukon S pisteiden keskimääräinen x -koordinaatti? Vinkki: Kolme lukua voivat olla tarkalleen $3! = 6$ eri järjestyksessä (poislukien nollamittalliset tilanteet, joissa ainakin kaksi niistä on yhtäsuuria). Tästä saatkin tavan tarkistaa tuloksesi joukon S tilavuudelle. Jos harrastat todennäköisyyyslaskentaa, voit miettiä, miksi tehtävässä lasketaan vastaus seuraavaan kysymykseen: Olkoot x, y, z toisitaan riippumattomia satunnaislukuja, tasan jakautuneita välillä $[0, 1]$. Mikä on tällöin niistä pienimmän, $u = \min\{x, y, z\}$ odotusarvo?

Tehtävä 2. Vakuuta itsesi siitä, että tason $z = 0$ ja pinnan $z = H(1 - \frac{r}{R})$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, väliin jäävä kappale on suora ympyräkartio, jonka korkeus on H ja pohjan säde R . Johda tuttu suoran ympyräkartion tilavuuden kaava laskemalla vastaava napakoordinaatti-integraali.

Tehtävä 3. Näimme aiemmassa demotehtävässä (Dem.III/1), että napakoordinaattikäyrä $r = 2 \sin \phi$ määrittelee ympyrän, jonka säde on 1 ja keskipiste $(0, 1)$. Näin ollen käyrä $r = \sin \phi$ on ympyrä, jonka säde on $1/2$ ja keskipiste $(0, 1/2)$. Olkoon näiden kahden ympyrän väliin jäävä alue A . Sen päällä on tasojen $z = 0$ ja $z = y + 2$ välissä kappale (kuva alla vasemmalla). Laske sen tilavuus. Vinkki: Napakoordinaatti-integraali tarvitaan, tai ehkä fyysikko, joka osaa mielessään katkaista putken 45 asteen kulmassa!



Tehtävä 4. Funktio $f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(2 - \sqrt{x^2 + y^2})$ saa positiivisia arvoja rengasmaisessa alueessa

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Kyseisen renkaan päällä kuvaajapinnan $z = f(x, y)$ ja tason $z = 0$ väliin jää yllä oikealla olevan kuvan mukainen suklaakakun muotoinen kappale. Laske sen tilavuus.

Tehtävä 5. Hahmottele kuva kappaleesta, jota rajaavat sylinterikoordinaattiepäyhtälöt $1 \leq r \leq z \leq 2$. Huomaa, että ϕ ei esiinny. Tarkistus: kyseistä kappaletta voisi luonnehtia kartioksi, jonka läpi on porattu reikä.

Tehtävä 6. Otetaan käyttöön avaruudessa $\mathbb{R}^4$ "kaksinkertaiset napakoordinaatit" eli määritellään luvut $r_1, r_2 \in [0, \infty)$ ja kulmat $\phi_1, \phi \in [0, 2\pi)$ siten, että

$$\begin{cases} x_1 &= r_1 \cos \phi_1, \\ x_2 &= r_1 \sin \phi_1, \\ x_3 &= r_2 \cos \phi_2, \\ x_4 &= r_2 \sin \phi_2. \end{cases}$$

Osoita, että sijoituksen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (r_1 \cos \phi_1, r_1 \sin \phi_1, r_2 \cos \phi_2, r_2 \sin \phi_2) = g(r_1, \phi_1, r_2, \phi_2)$$

Jakobiaani on

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(r_1, \phi_1, r_2, \phi_2)} = r_1 r_2.$$

Tehtävä 7. Laske R -säteisen 4-ulotteisen avaruuden pallon (tai siis kuulan)

$$S(R) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq R^2\}$$

mitta (eli hypertilavuus). Tarkistus: Vastauksen yksikön pitää tietenkin olla metrin neljäs potenssi. Vinkki: Yksi tapa edetä on käyttää edellisen tehtävän koordinaatteja, ja todeta, että $S(R)$ määräytyy ehdosta $r_1^2 + r_2^2 \leq R^2$. Muutakin tapoja on.