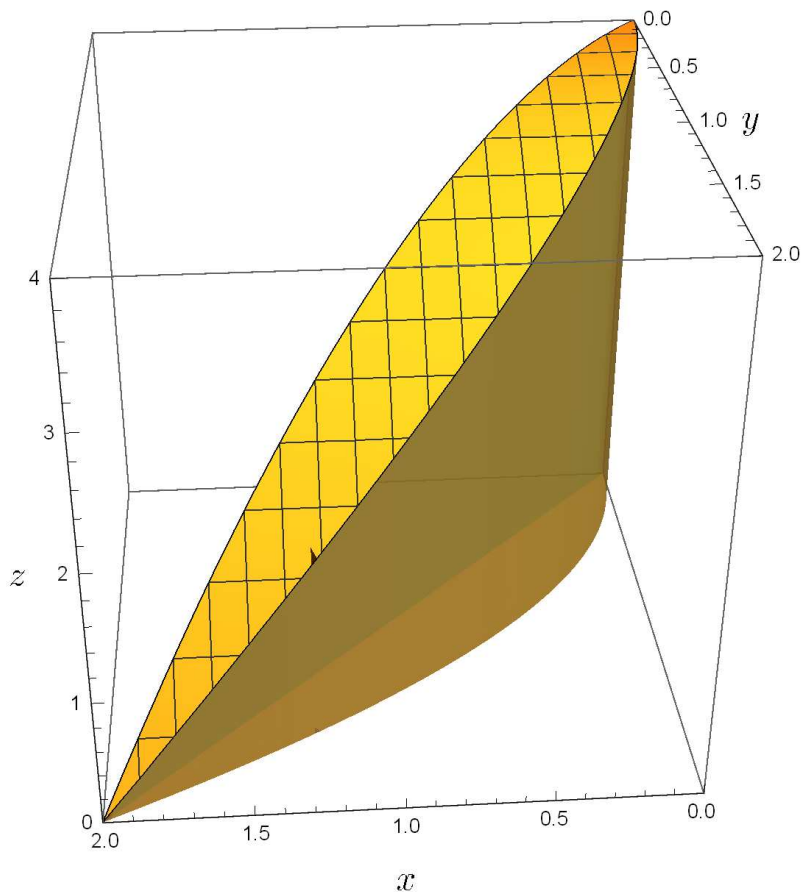


Vektorilaskenta

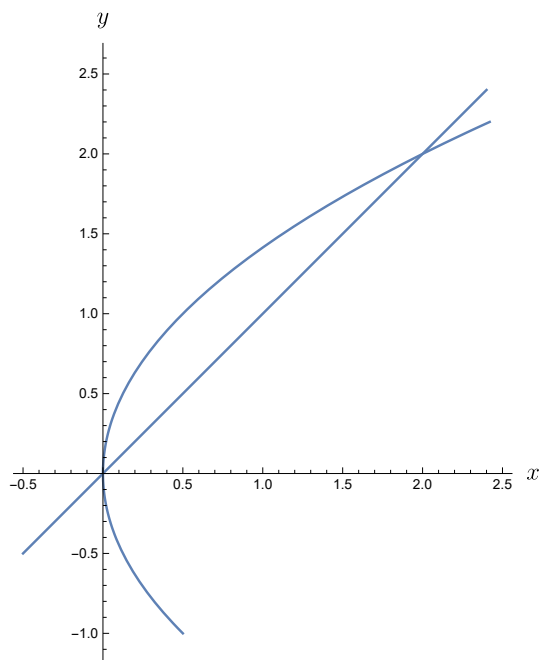
Harjoitustyö — Tilavuuden laskeminen karteesisissa koordinaateissa. #1

Ohessa on kuva kappaleesta. Sen pohja A on tasolla $z = 0$. Sitä rajaavat suora $y = x$, sekä käyrä $2x = y^2$. Kappaleen korkeus pisteessä $(x, y) \in A$ on $f(x, y) = 4 - y^2$.



Laske kappaleen tilavuus. 5 lisäpistettä saa laskemalla kappaleen pohjan pinta-alan. Toiset 5 lisäpistettä saa laskemalla kappaleen keskimääräisen korkeuden ja tekemällä kuvan avulla arvion siitä, onko tulos järkevä.

Ratkaisu. Yhtälö $y = x$ on tunnettu suora. Yhtälö $2x = y^2$ on oikealle aukeava paraabeli. Aloitetaan piirtämällä nämä.



Näyttäisi siltä, että järkevä alue rajautuu käyrien leikkauspisteiden välisillä osilla. Leikkauspisteissä yhtälöt $y = x$ ja $2x = y^2$ ovat samanaikaisesti voimassa. Sijoittamalla ensimmäinen yhtälö jälkimmäiseen saadaan, että leikkauspisteissä yhtälö $2x = x^2$ on voimassa. Tämän ratkaisut ovat $x = 0$ ja $x = 2$. Näin ollen leikkauspisteet ovat $(0, 0)$ ja $(2, 2)$. Tämä sopii hyvin yhteen kappaleen kuvan kanssa, sillä siinä sekä x - että y -koordinaatin vaihteluvälit ovat $[0, 2]$.

Alue A on paraabelin ja suoran välinen xy -tason osa. Paraabeli on suoran yläpuolella, joten jos annamme x :lle kiinteän arvon väliltä $[0, 2]$, niin piste (x, y) on alueessa A jos sekä $y \geq x$ että $y^2 \leq 2x$ eli $y \leq \sqrt{2x}$. Tämä johtaisi sisäintegraaliin $\int_{y=x}^{\sqrt{2x}}$. Koska siinä esiintyy ylärajassa "ikävä" neliöjuuri, niin teenkin toisin päin, ja valitsen sisäintegraalin muuttujaksi x :n. Jos nimittäin annammekin y :lle kiinteän arvon väliltä $[0, 2]$, niin piste (x, y) on alueessa A kunhan $x \geq y^2/2$ ja $x \leq y$. Nimittäin kuvan perusteella paraabeli on alueen vasen reuna (= x :n alaraja) ja suora oikea reuna (= x :n yläraja).

Kappaleen tilavuuden antaa siis iteroitu integraali

$$V = \int_{y=0}^2 \left(\int_{x=y^2/2}^y f(x, y) dx \right) dy.$$

Sisäintegraaliksi saadaan

$$\begin{aligned} A(y) &= \int_{x=y^2/2}^y (4 - y^2) dx \\ &= \left|_{x=y^2/2}^y (4 - y^2)x \right. \\ &= (4 - y^2)(y - y^2/2) \\ &= 4y - 2y^2 - y^3 + \frac{y^4}{2}. \end{aligned}$$

Näin ollen kysytty tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^2 A(y) \, dy \\ &= \int_{y=0}^2 \left(4y - 2y^2 - y^3 + \frac{y^4}{2} \right) \, dy \\ &= \left[2y^2 - \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{10}y^5 \right]_{y=0}^2 \\ &= 8 - \frac{16}{3} - 4 + \frac{32}{10} \\ &= \frac{28}{15}. \end{aligned}$$

Pohjan ala saadaan lukio/Analyysi I tiedoilla integraalista

$$A = \int_{y=0}^2 \left(y - \frac{1}{2}y^2 \right) \, dy = \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 \right]_{y=0}^2 = 2/3.$$

Keskimääräinen korkeus h saadaan jakamalla tilavuus pohjan alalla

$$h = \frac{28/15}{2/3} = \frac{14}{5},$$

eli hiukan alle kolmen. Tämän on hiukan hankala kuvasta tarkistettava. Järkevä se on sikäli, että maksimikorkeus on 4 (kun $y = 0$) ja minimi nolla. Lisäksi korkeus on ≥ 3 A :n siinä osassa, jossa $y \leq 1$. Kuvan perusteella tämä osa kattaa yli puolet A :n pinta-alasta. Näin ollen ei ole yllättävää, että keskiarvo on näinkin selvästi > 2 .